FONDO PIZZOFALCONE

S-B-64

BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armadio XVIII

Palchetto

Num.° d' ordine 24

No 111

NAZIONALE
B. Prov.
U 1
1603
NAPOLI
R. BIBLIOTECA
VITT. EM. III

B- Romanum
II.
193

ex libris petri jurratti

# ÉLÉMENS D'ARITHMÉTIQUE, D'ALGÉBRE, ET DE GÉOMÉTRIE,

*Avec une Introduction aux Sections coniques.*

Ouvrage utile pour faire entrer dans l'esprit de ces Sciences & pour disposer à l'étude de la Physique & des Sciences Physico-Mathématiques.

*Par* J. M. MAZÉAS, *ancien Professeur de Philosophie en l'Université de Paris, au Collége Royal de Navarre.*

SIXIÉME ÉDITION,

Revue & corrigée par l'Auteur.

*A PARIS,*

Chez PH.-D. PIERRES, Libraire-Imprimeur, rue Saint-Jacques.

M. DCC. LXXVII.

*Avec Approbation & Privilége du Roi.*

BIBLIOTECA PROVINCIALE DI NAPOLI

*L'*AUTEUR *croit devoir avertir le Public, que tous les Exemplaires de cette ſixieme Édition, ſont ſignés & paraphés de lui ſur le revers du frontiſpice : de ſorte que ceux qui ne le ſeront pas, doivent être regardés, ou comme étant d'anciennes Editions, qui ſont la plupart moins amples, & toutes moins correctes que cette derniere ; ou comme étant des exemplaires contrefaits, dont on connoît les inconvéniens, à cauſe du grand nombre de fautes, & d'inexactitudes qui s'y gliſſent ordinairement, ſur-tout dans les Ouvrages de ce genre.*

J. M. Marcas

A MONSEIGNEUR

# LE RECTEUR,

ET

# A L'UNIVERSITÉ

DE PARIS.

MONSEIGNEUR ET MESSIEURS,

*On connoît le zèle que l'Université a toujours fait paroître pour animer les Etudes, & pour en faciliter les progrès. Attentive à tout ce qui peut contribuer au bien de ceux qu'Elle eſt chargée d'inſtruire, & perſuadée que la Géométrie eſt comme la clef de Sciences, Elle a voulu qu'elle fût une partie de l'Education publique à laquelle Elle préſide. Les ſuccès ont répondu à ſes vues. Les progrès dans ſes Ecoles ont été plus rapides, le goût mieux formé, & les connoiſſances plus étendues.*

*A qui puis-je mieux offrir ces Elémens de Géométrie, qu'à Vous, MONSEIGNEUR & MESSIEURS, qui, par de ſages diſpoſitions, avez ſi bien réuſſi à étendre le goût de cette Science. En les faiſant paroître ſous vos Auſpices, ce ſera pour moi un titre pour augurer qu'ils ne déplairont point, & qu'ils pourront être utiles aux Eléves que vous formez. Ce ſont eux ſur-tout que j'ai eu en vue, & je croirois avoir travaillé avec fruit, ſi j'avois contribué à leur rendre l'étude des Mathématiques plus aiſée & plus intéreſſante.*

*Je ſerois flaté qu'un Livre, dont le but eſt de contribuer au progrès des Sciences, parût avec les ſuffrages d'une Compagnie qui en eſt la Mere commune. Il eſt juſte que je lui faſſe hommage des connoiſſances dont je lui ſuis redevable. En lui rendant ce tribut de mon reſpect & de ma reconnoiſſance, je ne lui rends que ce qui lui appartient. Daignez agréer l'hommage que j'ai l'honneur de lui rendre, en lui préſentant les fruits que j'ai recueillis dans ſon ſein.*

*Je ſuis avec un très-profond reſpect,*

MONSEIGNEUR ET MESSIEURS,

Votre très-humble & très-obéiſſant Serviteur,
J. M. MAZÉAS.

# AVERTISSEMENT

*Sur le deſſein de cet Ouvrage.*

QUOIQUE nous ne manquions pas aujourd'hui d'Elémens de Géométrie, propres à initier les Commençans dans cette Science, je n'ai pourtant point héſité à faire paroître ceux-ci, les croyant propres à remplir l'objet que je me ſuis propoſé. J'ai moins cherché à faire un Ouvrage ſçavant, qu'à faire un Ouvrage proportionné à la capacité & aux beſoins de ceux pour qui il eſt ſur-tout deſtiné. Obligé par état à préparer de jeunes Etudians à l'étude de la Phyſique par des Leçons de Géométrie, je me ſuis appliqué à leur expoſer dans un volume médiocre les principes & les connoiſſances de la Géométrie, qui ſont néceſſaires pour la Phyſique & pour les Sciences Phyſico-Mathématiques.

Un intervalle auſſi court que celui que nous donnons aux Leçons de la Géométrie, ne permet pas de ſuivre cette Science dans tous ſes détails, qui ſont immenſes. Il a donc fallu ſe borner à donner les principes. Je les ai recueillis dans les différens Traités & Elémens que nous avons dans ce genre; j'y ai choiſi ce qui m'a paru de plus ſimple & de plus facile, & j'ai voulu en faire un tout & un enſemble qui fût lié, & qui procédât avec ordre & méthode.

C'eſt par-là que j'ai cru devoir ſur-tout rendre la lecture de cet Ouvrage plus intéreſſante.

J'ai tâché de ne pas perdre de vue ceux pour qui je travaillois. Je me ſuis appliqué à traiter les matieres d'une façon propre à leur donner l'eſprit géométrique, encore plus que la Géométrie elle-même. Cet eſprit n'eſt autre choſe que cette juſteſſe qui ſaiſit ſon objet, cette liaiſon qui aſſortit toutes les parties, cette pénétration qui voit les rapports; je n'ai rien négligé pour adopter les méthodes, où ces avantages puſſent ſe rencontrer. Je me ſuis appliqué à donner aux matieres un ordre & une ſuite, qui pût faire ſentir l'enchaînement des idées, la différence des objets, &, pour ainſi dire, les nuances qu'ils prennent par la variété de leurs rapports. Je ſuis même entré quelquefois dans de certains détails, où la ſuite menoit naturellement; mais c'étoit moins pour les donner, que pour les faire appercevoir dans un principe ſimple, mais fécond, quand il eſt médité. C'eſt auſſi pour cette raiſon que dans l'Introduction aux Sections coniques, j'ai ſaiſi avec empreſſement la méthode que j'ai trouvée miſe en uſage par pluſieurs Géométres avec autant de goût que de ſuccès, & qui conſiſte à faire dériver les Sections coniques, ainſi que leurs équations, d'un principe primitif; à les décrire, ſoit géométriquement, ſoit méchaniquement, ſuivant un plan général, qui ſe modifie par l'exigence & la nature de la Courbe. Ces méthodes qui donnent l'eſprit

de comparaiſon, en introduiſant du goût dans les Sciences, font évanouir ce qu'elles ont de difficile & de rebutant. L'expérience fait voir combien elles ſont utiles pour les Etudians, dont elles fixent l'attention, en les intéreſſant à des vérités, dont la liaiſon les étonne, & leur fait naître le deſir de ſuivre le principe dans toutes les conſéquences qui en découlent.

Tel eſt à peu près le plan que je me ſuis propoſé : pour l'exécuter, j'ai cru que je devois m'attacher aux principes, plutôt qu'aux détails, faire plutôt un Abrégé, qu'un Ouvrage complet, & enfin choiſir dans les matieres & les méthodes qui ſont propres à cette Science, celles qui ſont le plus à la portée des Commençans, & qui peuvent les mettre en état d'entrer eux-mêmes plus avant dans cette Science par la lecture des Ouvrages plus étendus que celui-ci.

---

*APPROBATION.*

J'AI examiné, par ordre de Monſeigneur le Chancelier, un Manuſcrit intitulé, *Elémens d'Arithmétique, d'Algébre & de Géométrie, avec une Introduction aux Sections coniques.* Cet Ouvrage m'a paru être fait avec méthode, & écrit auſſi clairement que la matiere le comporte, & je crois que l'impreſſion en ſera utile au Public. A Paris, ce 10 Novembre 1757.

*Signé* DEPARCIEUX.

# *EXTRACTUM*

## È COMMENTARIIS UNIVERSITATIS.

*Anno Domini* 1758, *die tertiâ Junii, habita ſunt Comitia ordinaria Deputatorum Univerſitatis, apud Ampliſſimum Rectorem, in Regia Navarra.*

Artic. III. De Opere novo, quod Vir clariſſimus, Magiſter Joannes Mathurinus Mazeas, Philoſophiæ Profeſſor in Regia Navarra, parat in vulgus edere ſuper Rebus Mathematicis, quodque die primâ Aprilis poſtulavit, ut ſibi liceret Univerſitati Pariſienſi dedicare : auditâ relatione M. Hamelin, Antiqui Rectoris, & M. Turquet, Philoſophiæ in dicta Univerſitate Profeſſoris, ad expendendum præfatum Opus tunc delegatorum, viſâque eorum ſententiâ ſcripto datâ, quæ ſic habet : Ampliſſimi Rectoris, Tribunaliſque Academici juſſu perlegimus Opus Gallicè ſcriptum, cui titulus : *Elémens d'Arithmétique, d'Algébre & de Géométrie, avec une Introduction aux Sections coniques*, cujus clariſſimus Auctor id aſſecutus Nobis videtur, quod ſibi propoſuerat ; nimirùm ut intrâ volumen, non amplum ſanè, eam Diſciplinarum Mathematicarum comprehendat copiam, quæ & Academicæ Juventutis ætati, & Studiorum rationi ac tempori conveniat. Perſpeximus inſuper, quod Virumin arte docendi verſatiſſimum demonſtrat, rerum delectum, diſtributionem, ordinem, lucem, conjunctionem tantam, ut quod expoſitione indiget, excitare potiùs, quàm morari videatur ; & Magiſtro ſimul ac Diſcipulo relinquat, undè non meras recitantium, ſed grato ac facili labore detegentium partes agant. In cujus rei fidem ſubſcripſimus, die tertiâ menſis Junii, anno 1758. Signatum, Hamelin, Turquet; placuit oblatam Dedicationem admittere.

FOURNEAU, *Scriba.*

## *AUTRE APPROBATION.*

J'ai examiné, par ordre de Monſeigneur le Chancelier, les Changemens & Additions que M. Mazéas veut faire à ſes *Elémens d'Arithmétique, d'Algébre & de Géométrie.* Le prompt débit de la premiere Edition a répondu au jugement que j'avois porté de cet Ouvrage, & cette ſeconde Edition ne doit point avoir un moindre ſuccès, vu que ces Changemens & Additions tendent à le rendre plus clair. A Paris, ce 4 Janvier 1761.

*Signé* DEPARCIEUX.

## *AUTRE APPROBATION.*

J'AI vu, par ordre de Monſeigneur le Vice-Chancelier, les Additions que M. Mazéas a fait à la quatriéme Edition de ſes *Elémens d'Arithmétique, d'Algébre & de Géométrie*, qui les rendent de plus en plus parfaits. Faire remarquer qu'un Ouvrage de Mathématiques, matiere à la portée de peu de Lecteurs, eſt à ſa quatriéme Edition dans l'eſpace de dix ans, eſt le meilleur éloge qu'on en puiſſe faire. A Paris, ce 22 Décembre 1767.

*Signé* DEPARCIEUX.

## *AUTRE APPROBATION.*

J'AI lu, par ordre de Monſeigneur le Chancelier, les Additions que M. Mazéas ſe propoſe de faire dans la cinquiéme Edition de ſes *Etémens d'Arithmétique, d'Algébre & de Géométrie*. Elles m'ont paru propres à amélioret ſon Ouvrage, par leur préciſion & leur clarté. A Paris, le premier Août 1772.

*Signé* MARIE.

## *PRIVILÉGE DU ROI.*

LOUIS, PAR LA GRACE DE DIEU, ROI DE FRANCE ET DE NAVARRE; A nos amés & féaux Conſeillers, les Gens tenans nos Cours de Parlement & Conſeils Supérieurs, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Prévôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenant Civils, & autres nos Juſticiers qu'il appartiendra; SALUT. Notre amé le Sieur MAZEAS, Profeſſeur de Philoſophie en l'Univerſité de Paris, Nous a fait expoſer qu'il deſireroit faire imprimer & donner au Public, un Ouvrage qui a pour titre: *Elémens d'Arithmétique, d'Algébre & de Géométrie, avec une Introduction aux Sections coniques*, de ſa compoſition, s'il Nous plaiſoit lui accorder nos Lettres de Privilége pour ce néceſſaires. A CES CAUSES, voulant *favorablement* traiter l'Expoſant, Nous lui avons permis & permettons par ces Préſentes, de faire imprimer ledit Ouvrage autant de fois que bon lui ſemblera, & de le vendre, faire vendre & débiter par tout notre Royaume, pendant le tems de *dix années* conſécutives, à compter du jour de la date des Préſentes. Faiſons défenſes à tous Imprimeurs, Libraires, & autres Perſonnes, de quelque qualité & condition qu'elles ſoient, d'en introduire d'impreſſion étrangere dans aucun lieu de notre obéiſſance; comme auſſi

d'imprimer, ou faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter ni contrefaire ledit Ouvrage, ni d'en faire aucun extrait, ſous quelque prétexte que ce puiſſe être, ſans la permiſſion expreſſe & par écrit dudit Expoſant, ou de ceux qui auront droit de lui; à peine de confiſcation des Exemplaires contrefaits, de trois mille livres d'amende contre chacun des Contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, & l'autre tiers audit Expoſant, ou à celui qui aura droit de lui, & de tous dépens, dommages & intérêts; à la charge que ces Préſentes ſeront enregiſtrées tout au long ſur le Regiſtre de la Communauté des Imprimeurs & Libraires de Paris, dans trois mois de la date d'icelles; que l'impreſſion dudit Ouvrage ſera faite dans notre Royaume, & non ailleurs, en bon papier & beaux caracteres, conformément aux Réglemens de la Librairie, & notamment à celui du 10 Avril 1725; à peine de déchéance du préſent Privilége; qu'avant de l'expoſer en vente, le Manuſcrit qui aura ſervi de copie à l'impreſſion dudit Ouvrage, ſera remis dans le même état où l'Approbation y aura été donnée, ès mains de notre très-cher & féal Chevalier Chancelier Garde des Sceaux de France, le Sieur DE MAUPEOU; qu'il en ſera enſuite remis deux Exemplaires dans notre Bibliothéque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle dudit Sieur DE MAUPEOU: le tout à peine de nullité des Préſentes: Du contenu deſquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir ledit Expoſant & ſes ayans-cauſes, pleinement & paiſiblement, ſans ſouffrir qu'il leur ſoit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons que la copie des Préſentes, qui ſera imprimée tout au long, au commencement ou à la fin dudit Ouvrage, ſoit tenue pour duement ſignifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés & féaux Conſeillers-Secrétaires, foi ſoit ajoutée comme à l'original. Commandons au premier notre Huiſſier ou Sergent ſur ce requis, de faire pour l'exécution d'icelles, tous actes requis & néceſſaires, ſans demander autre permiſſion, & nonobſtant clameur de Haro, Charte Normande, & Lettres à ce contraires: Car tel eſt notre plaiſir. DONNÉ à Paris, le vingt-neuviéme jour du mois de Juin, l'an de grace mil ſept cent ſoixante-quatorze, & de notre Régne le premier. Par le Roi, en ſon Conſeil.

*Signé* LE BEGUE, avec grille & paraphe.

*Regiſtré ſur le Regiſtre XIX de la Chambre Royale & Syndicale des Libraires & Imprimeurs de Paris*, N° 3018, *folio* 268, *conformément au Réglement de* 1723, *qui fait déſenſes*, Art. IV, *à toutes perſonnes, de quelque qualité & condition qu'elles ſoient, autres que les Libraires & Imprimeurs, de vendre, débiter & faire afficher aucuns livres pour les vendre en leurs noms, ſoit qu'ils s'en diſent les Auteurs ou autrement, & à la charge de fournir à la ſuſdite Chambre huit exemplaires preſcrits par l'Article* 108 *du même Réglement. A Paris, ce* 4 *Juillet* 1774.

*Signé* A. P. LOTTIN jeune, Adjoint.

Achevé d'imprimer pour la ſixiéme fois, le 12 Avril 1777.

DE L'IMPRIMERIE DE PH.-D. PIERRES,
rue Saint-Jacques.

# AVERTISSEMENT

## *Sur cette nouvelle Edition.*

ON a ſuivi dans cette Edition le même plan que dans les précédentes, mais on l'a perfectionné, ce qui donne à l'Ouvrage plus de clarté & de méthode. Les changemens & les additions que l'on y a faits, en rendant ces élémens plus corrects & plus lumineux, les rendent auſſi plus complets. Pluſieurs morceaux qui pouvoient paroître trop concis, ont été traités avec plus d'étendue, afin d'en rendre, ou la théorie plus développée, ou la pratique plus aiſée & plus ſuivie. Les Eléves trouveront ainſi dans cette Edition tout ce qui leur eſt néceſſaire pour bien apprendre les Elémens de Géométrie, pour ſe diſpoſer à des études plus profondes de cette ſcience, & pour pouvoir même s'initier dans le calcul infinitéſimal.

Peut-être eût-il paru naturel que j'en eus donné moi-même quelques principes & quelques applications pour rendre cet Ouvrage plus complet; mais je renvois aux traités qui en ont déjà été donnés par quelques Profeſſeurs de l'Univerſité de Paris. On connoît celui que M. l'Abbé Marie a mis à la fin de l'Edition qu'il a donné des Leçons de Mathématiques de feu M. l'Abbé de la Caille, & lequel a mérité à juſte titre l'eſtime & le ſuffrage du Public. Celui que M. l'Abbé Beguin a fait imprimer il y a quelque tems chez

J. Barbou mérite auſſi d'être connu par la netteté & le goût qu'il y fait regner. Celui que M. l'Abbé Girault de Koudou vient de faire imprimer chez Ph. D. Pierres, ne mérite pas moins d'être connu, & eſt remarquable par l'ordre, la préciſion & le goût vraiment Neutonien que l'on y trouve. Ceux qui, à l'étude de la Géométrie Elémentaire voudroient ajouter celle de la Géométrie Tranſcendante, pourront ſe ſervir avec fruit des Traités que je viens de citer.

Mais les Etudians doivent faire attention que les progrès dans cette Science conſiſtent ſurtout à appercevoir la ſuite & la liaiſon des idées, & à en ſaiſir les rapports & l'enchaînement dans les différentes matieres que l'on y traite. On n'eſt pas Géométre préciſément pour ſçavoir un grand nombre de propoſitions & de théorêmes; mais on le devient en entrant plutôt dans l'eſprit des choſes, & en ſaiſiſſant leur enſemble. C'eſt pour y accoutumer les Commençans que je me ſuis déterminé depuis peu à donner en leur faveur un Abrégé de ces Elémens, & que j'ai réduit à ce qu'il y a d'eſſentiel dans la Géométrie Elémentaire. En retranchant les matieres les plus difficiles, en introduiſant des facilités dans celles qui ſont traitées, & en conſervant du reſte le même ordre & le même plan que dans l'Ouvrage lui-même; j'ai cru par-là mettre les Eléves plus à portée d'entendre cette ſcience, & de ſaiſir de bonne-heure le vrai goût de ſon étude. Dans cette vue ils pourront s'aider beaucoup de la Table raiſonnée & méthodi-

que des Matieres, qui ſe trouve à la fin de cet Ouvrage & de ſon Abrégé, laquelle a été perfectionnée dans les dernieres éditions, & qui eſt diſpoſée de façon qu'elle préſente un plan général, ſuivi & méthodique de tout l'Ouvrage. La lecture réitérée de cette Table, à laquelle on ne peut pas trop exhorter les jeunes Etudians, ne contribuera pas peu à les faire entrer dans l'eſprit des choſes qui ſont traitées dans le corps du Livre, & à les faire réuſſir dans l'étude d'une ſcience qui conſiſte toute entiere en combinaiſons, en rapports & en une ſuite de conſéquences. Par-là ils s'accoutumeront à généraliſer leurs idées, à prendre l'enſemble des choſes, & à ſe donner cet eſprit de juſteſſe, de préciſion, & de conſéquence, que procure l'étude de la Géométrie, lorſqu'elle eſt faite avec goût & avec méthode.

---

## *AVIS AU RELIEUR.*

Le Relieur eſt averti,

I°. De mettre à la fin du Livre toutes les Tables des Figures.

II°. De plier ces Tables de façon que le quarré qui contient les figures, puiſſe ſortir tout entier du Livre.

III°. De les plier de maniere qu'en reliant le Livre, on ne puiſſe pas couper les plis de ces Tables.

## FAUTES A CORRIGER.

*Page* 63, *ligne* 7, *au lieu* de $= 3b - 2ac$, *liſez* $= 3b - ac$.

*P.* 80, *ligne* 30, $\frac{6\sqrt{36}}{2\sqrt{4}} = 3\sqrt{9}$ &c., *liſez* $\frac{6\sqrt{36}}{2\sqrt{4}} = \frac{6}{2}\sqrt{\frac{36}{4}} = 3\sqrt{9}$ &c.

*P.* 120, *ligne* 13, 2 : 4 :: 6 · 2 :: , *liſez* 2 : 4 :: 6 : 12 :: .

*P.* 157, *ligne* 19, on, *liſez* ont.

*P.* 165, *ligne* 6, $\overline{D} = 13$, *liſez* $\frac{B}{D} = 13$.

*P.* 167, *ligne* 26, $x = \frac{a}{2} - \frac{a}{2} + \frac{d}{2}$, *liſez* $x = \frac{2a}{2} - \frac{a}{2} + \frac{d}{2}$.

*P.* 254, *ligne* 8, *ac* : AC : *bc* : BC, *liſez* *ac* : AC :: *bc* : BC.

*P.* 280, *ligne* 29, en ajouant, *liſez* en ajoutant.

*P.* 294, *ligne* 2, entr'elſe, *liſez* entr'elles.

*P.* 326, *ligne* 23, PA &c., *liſez* BA &c.

*P.* 351, *ligne* 2, ſéprre, *liſez* ſépare.

*P.* 389, *ligne* 33, 'angle, *liſez* l'angle.

*P.* 414, *ligne* 29, qn'aux, *liſez* qu'aux.

*P.* 416, *ligne* 7, on connoît, *liſez* on connoîtra.

*Idem*, *ligne* 27, & des, *liſez* & de.

*P.* 442, *ligne* 23, égale, *liſez* égal.

*P.* 446, *ligne* 27, l'équation, *liſez* équation.

*P.* 463, *ligne* 28, $c\,\frac{x-aa}{a}$ *liſez* $\frac{cx-aa}{a}$.

ÉLÉMENS

# *ÉLÉMENS*

# D'ARITHMÉTIQUE,

# *D'ALGÉBRE*

# ET

# DE GÉOMÉTRIE.

## *Des Mathématiques en général.*

LES Mathématiques ſont une Science qui a pour objet la Grandeur en tant que meſurable.

2. On appelle *Grandeur* ou *Quantité*, tout ce qui eſt ſuſceptible de plus ou de moins; tout ce qui peut être augmenté ou diminué, *par exemple*, l'*Etendue*, le *Mouvement*, &c.

3. La Grandeur eſt ou *diſcrete* ou *continue*. On appelle Grandeur ou Quantité diſcrete, un aſſemblage de parties déſunies entr'elles, & qui forment pluſieurs tous, plutôt que des parties d'un même tout; *par ex:* un monceau de *bled*, de *ſable*, &c. On appelle Quantité *continue*, celle dont les parties ſont

unies entr'elles, & forment un même tout; telle eſt l'*Etendue*. La Quantité diſcrete s'appelle autrement Quantité *numérique* ou *arithmétique*, & la quantité continue s'appelle Quantité *géométrique*.

4. Les Mathématiques ſe diviſent en Mathématiques *pures* & Mathématiques *mixtes*: celles-là ont pour objet la grandeur, en tant que grandeur préciſément, & ſans aucun rapport aux qualités ſenſibles & phyſiques; celles-ci ont pour objet la grandeur, en tant que revêtue des qualités ſenſibles & phyſiques, telles que ſont le *Mouvement*, la *Dureté*, la *Fluidité*, &c. & par cette raiſon on les appelle Sciences *Phyſico-mathématiques*.

5. Les Mathématiques mixtes ont pluſieurs parties, qui ſont la *Méchanique*, l'*Aſtronomie*, l'*Optique*, &c. Les Mathématiques pures ſe diviſent ordinairement en trois parties, ſçavoir, l'Arithmétique, l'Algébre & la Géométrie: nous les diviſerons en deux ſeulement, qui ſeront le *Calcul* & la *Géométrie*. Le Calcul a pour objet la quantité *diſcrete*, & la Géométrie a pour objet la quantité *continue*: le but de l'une & de l'autre eſt de meſurer.

6. On appelle *meſurer*, chercher combien de fois une quantité moindre, mais connue, eſt contenue dans une plus grande: meſurer une longueur, c'eſt porter ſur cette longueur une quantité moindre, mais connue, telle que la toiſe, ou le pied, pour ſçavoir combien de fois elle y eſt contenue; & l'on dit alors que cette longueur a tant de toiſes, ou de pieds, &c. Cette quantité moindre que l'on prend un certain nombre de fois, s'appelle *Meſure*; la quantité plus grande à laquelle on applique la meſure, s'appelle *Grandeur*. Lorſqu'on connoît le rapport de la meſure avec la grandeur, cette grandeur eſt appellée *commenſurable*; & lorſqu'on ne peut pas trouver de rapport entre l'une & l'autre, on l'appelle *incommenſurable*.

7. Le procédé des Géométres, pour parvenir à meſurer la grandeur, eſt remarquable par la clarté & les lumieres qu'il répand ſur les matieres que l'on traite. On l'appelle *Méthode des Géométres*. C'eſt la même que celle dont on explique l'Art, & dont on démontre les regles dans la Logique. Elle conſiſte dans une ſuite de propoſitions que l'on appelle, *Demandes*, *Hypotheſes* ou *Suppoſitions*, *principes*, *Axiômes*, *Lemmes*, *Théorêmes*, *Problêmes*, *Corollaires*, *Scholies* ou *Remarques*, tellement aſſorties & liées enſemble, que les vérités que l'on démontre, ſe déduiſent les unes des autres, & forment une ſuite & un enchaînement merveilleux.

Avant que d'entrer en matiere, il eſt à propos d'expoſer quelques principes & axiômes qui ſervent de fondement à toutes les parties des Mathématiques.

## *AXIOMES.*

### I.

8. Le tout eſt plus grand que ſa partie. Le tout eſt égal à toutes ſes parties priſes enſemble. Chaque grandeur ou quantité eſt égale à elle-même.

### II.

9. Deux grandeurs qui ſont égales chacune à une troiſiéme grandeur, ſont égales entr'elles.

### III.

10. Si à des grandeurs égales on ajoute des quantités égales, les ſommes ſeront égales: & ſi à des grandeurs inégales on ajoute des quantités égales, les ſommes ſeront inégales.

### IV.

11. Si de grandeurs égales on retranche des quantités égales, les reſtes ſont égaux; & ſi de grandeurs inégales on retranche des quantités égales, les reſtes ſeront inégaux.

V.

12. Si on multiplie des grandeurs égales par des quantités égales, les réſultats ſeront égaux; ſi vous multipliez des grandeurs inégales par des quantités égales, les réſultats ſeront inégaux.

V I.

13. Si vous diviſez deux quantités égales par une même troiſiéme grandeur, les réſultats ſeront égaux; & ſi vous diviſez deux quantités inégales par une même troiſiéme grandeur, les réſultats ſeront inégaux.

V I I.

14. Deux quantités qui ſont ſemblables à une même troiſiéme grandeur, ſont ſemblables entr'elles.

V I I I.

15. Deux rapports qui ſont égaux, chacun à un même troiſiéme rapport, ſont égaux entr'eux.

I X.

16. Une grandeur eſt une fois contenue en elle-même, c'eſt pourquoi une grandeur diviſée par elle-même, eſt égale à l'unité: au contraire, une grandeur retranchée d'elle-même devient nulle, ou égale à zero.

X.

17. Une grandeur multipliée, & enſuite diviſée par une même quantité, ne change pas, mais reſte la même; *par ex :* 4 multiplié & puis diviſé par 3, ſera toujours 4; car 4 multiplié par 3 donne 12, & 12 diviſé par 3 donne 4.

# LIVRE PREMIER.

## *DES PRINCIPES DU CALCUL.*

LE calcul peut être conſidéré, ou dans ſes élémens, ou dans ſon progrès. Les élémens du calcul ſont le calcul ſimple des *quantités*, & il conſiſte dans la combinaiſon ſimple des quantités entr'elles, & c'eſt ce que l'on appelle proprement *Calcul*. Le progrès du calcul eſt le calcul des *rapports* des quantités, & il conſiſte à combiner les rapports qu'ont entr'elles les quantités, & c'eſt ce que l'on appelle *Analogie* ou *Proportion*. Nous allons donc parler, 1°. du calcul ſimple des quantités; 2°. du calcul des rapports des quantités, ou de l'analogie & des proportions.

## SECTION I.

BIBLIOTECA PROVINCIALE DI NAPOLI

### *Du Calcul ſimple des Quantités.*

18. LE calcul proprement dit conſiſte à combiner des quantités homogênes, ou de même eſpece; car on ne peut pas combiner & aſſembler des quantités hétérogênes ou de différente eſpece, telles que ſeroient; *par ex*: des *heures* & des *toiſes*. Or cette combinaiſon ſe fait par la voie de l'*Addition* ou de la *Souſtraction*. L'addition eſt l'aſſemblage de deux ou pluſieurs quantités: la ſouſtraction ſe fait en retranchant une quantité d'une autre quantité. L'addi-

tion & la ſouſtraction peuvent ſe diverſifier par des méthodes, d'où réſultent de nouvelles opérations, que l'on appelle *Multiplication* & *Diviſion*, *Exaltation* & *Extraction*.

19. Le calcul a pour objet les quantités diſcretes: les quantités diſcretes ſont ou déterminées ou indéterminées. Les quantités déterminées ſont celles qui exprimẹnt une grandeur plutôt qu'une autre: *par ex*: le nombre 8, qui ſignifie une grandeur de huit parties, plutôt que de ſept, ou de neuf, ou de, &c. Les quantités indéterminées ſont celles qui expriment une grandeur qui n'eſt pas plutôt l'une que l'autre: *par ex*: la lettre *a*, laquelle ne ſignifie rien de fixe & de précis, n'exprime pas plutôt un mouvement qu'une étendue, un pied plutôt qu'un pouce.

20. Les quantités ou les grandeurs déterminées ſe repréſentent par les caracteres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, que l'on appelle *Chiffres*, leſquels nous ſont venus des Arabes, & les quantités ainſi exprimées s'appellent *Nombres*, ou quantités *numériques*. Les grandeurs indéterminées s'expriment par les lettres de l'Alphabet *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, &c. leſquelles, ne ſignifiant rien par elles-mêmes, ſont propres par cette raiſon à déſigner & à repréſenter toutes ſortes de grandeurs: or les quantités ainſi exprimées s'appellent Quantités *algébriques*.

21. Le calcul des quantités déterminées s'appelle calcul des *nombres*, ou calcul *arithmétique*: celui des quantités indéterminées s'appelle calcul des *lettres*, ou calcul *algébrique*. Nous allons expoſer les principes de l'un & de l'autre.

# CHAPITRE I.

## *Du Calcul des Nombres, ou l'Arithmétique.*

### *DÈFINITIONS.*

I.

22. LE nombre eſt un aſſemblage de pluſieurs unités, ou de parties de l'unité; *par ex*: 3 eſt un nombre, parce qu'il eſt compoſé de trois unités; $\frac{3}{4}$ ou trois quarts ſont un nombre, parce que c'eſt l'aſſemblage de trois parties de l'unité; ſavoir, trois de ces parties, dont chacune eſt la quatriéme partie de l'unité.

II.

23. On appelle Nombre *entier* un aſſemblage de pluſieurs unités, ou de pluſieurs tous; tels ſont 4, 7, 8, 9, &c. On appelle Nombre *Fractionnaire*, ou *Fraction*, celui qui exprime des parties de l'unité; *par ex*: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, &c. Ce qui ſignifie une demie, un tiers, un quart, deux tiers, trois cinquiémes, &c.

III.

24. Dans la fraction le nombre ſupérieur s'appelle *Numérateur*, & le nombre inférieur s'appelle *Dénominateur*: celui-ci s'appelle dénominateur; parce qu'il déſigne la qualité & la grandeur des parties auxquelles on a diviſé le tout, en exprimant ſi elles ſont des moitiés, ou des tiers, ou des quarts, ou, &c. Celui-là s'appelle numérateur, parce qu'il exprime combien l'on prend de ces parties.

## IV.

25. On appelle *Numération*, l'art d'exprimer & d'énoncer les nombres : pour cela il faut ſçavoir combiner & arranger dix caracteres, que l'on appelle *chiffres*, & qui ſont 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, qui ſignifient *zero*, *un*, *deux*, *trois*, *quatre*, *cinq*, *ſix*, *ſept*, *huit*, *neuf*. La combinaiſon & l'arrangement de ces chiffres donne l'art d'exprimer en chiffres les nombres énoncés dans le diſcours, & d'énoncer dans le diſcours les nombres exprimés en chiffres ; c'eſt ce que l'on appelle la *Numération*.

### *Principe.*

26. On eſt convenu, ( & c'eſt ici le fondement de toute l'Arithmétique, ) que lorſque des dix caracteres ou chiffres dont il vient d'être parlé, il s'en trouveroit pluſieurs de ſuite, leur valeur augmenteroit en proportion décuple, allant de droite à gauche ; c'eſt-à-dire qu'une unité du chiffre précédent vers la gauche ſeroit dix fois plus grande qu'une unité du chiffre ſuivant vers la droite ; *par ex* : dans la ſuite des chiffres 46527, chaque unité du chiffre 2 eſt dix fois plus grande que chaque unité du chiffre 7 ; pareillement chaque unité du chiffre 5 eſt dix fois plus grande que chaque unité du chiffre 2, & ainſi de ſuite. Zero tout ſeul ne ſignifie rien ; mais étant précédé d'un chiffre, il rend ſa valeur dix fois plus grande. C'eſt pourquoi le chiffre 1 tout ſeul ſignifie une unité, mais s'il eſt ſuivi d'un zero, on aura 10, qui ſignifie *dix* unités, ou une *dixaine* : s'il eſt ſuivi de deux zero, on aura 100, qui exprime dix fois dix, ou *cent* unités, ou une *centaine*, & ainſi du reſte.

### PROBLÊME I.

27. *Exprimer en chiffres des nombres énoncés dans le Diſcours.*

SOLUTION. I°. Prenez l'unité, & ajoutez-lui tou-

jours des zero pour augmenter ſa valeur en proportion décuple, & vous aurez 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000, 1000000, qui ſignifient, *un*, *dix*, *cent*, *mille*, *dix mille*, *cent mille*, *un million*, &c.

II°. Prenez ces nombres déja trouvés deux à deux, & vous trouverez des nombres intermédiaires & interceptés, en mettant ſucceſſivement les neuf caracteres à la place de l'unité; *par ex*: entre 1 & 10 vous aurez 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9: entre 10 & 100 vous trouverez 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, qui ſignifient *vingt*, *trente*, *quarante*, *cinquante*, *ſoixante*, *ſoixante-dix*, *quatre-vingt*, *quatre-vingt-dix*: & entre 100 & 1000 vous trouverez 200, 300, 400, 500, 600, 700, &c. qui ſignifient *deux cens*, *trois cens*, *quatre cens*, *cinq cens*, *ſix cens*, *ſept cens*, &c.

III°. Ces nombres intermédiaires admettent encore d'autres nombres intermédiaires, que vous trouverez en mettant ſucceſſivement les neuf caracteres à la place du zero, ou du dernier zero; *par ex*: entre 10 & 20 vous aurez 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, qui ſignifient *onze*, *douze*, *treize*, *quatorze*, *quinze*, *ſeize*, *dix-ſept*, *dix-huit*, *dix-neuf*: pareillement entre 20 & 30, vous trouverez 21, 22, 23, 24, &c. qui ſignifient *vingt-un*, *vingt-deux*, *vingt-trois*, *vingt-quatre*, &c. entre 100 & 200 vous aurez 101, 102, 103, 104, &c. qui ſignifient *cent-un*, *cent-deux*, *cent-trois*, *cent-quatre*, &c.

IV°. Si au lieu de mettre ſucceſſivement les neuf caracteres à la place du dernier zero, vous les euſſiez mis à la place du premier, ou du ſecond, ou du troiſiéme, &c zero, vous auriez trouvé d'autres nombres intermédiaires; *par ex*: entre 1000 & 2000 ſubſtituant les neuf caracteres à la place du premier zero, vous trouverez 1100, 1200, 1300, &c. en les ſubſtituant à la place du ſecond, vous aurez 1010, 1020, 1030, &c.

V°. Enfin, combinant toujours les nombres qui ſont au-deſſous de dix, (& que l'on appelle nombres *ſimples*,) avec ceux qui ſont au-deſſus de neuf, (& que l'on appelle nombres *compoſés*,) & mettant les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, &c. (que l'on appelle *poſitifs*,) à la place ſoit du premier, ſoit du ſecond, ſoit du troiſiéme, &c. zero, ou même à la place de tous les zero, vous trouverez tous les nombres que vous voudrez.

*Exemple.*

Soit propoſé d'exprimer en chiffres le nombre un *million*, *ſix cens*, *vingt-quatre mille*, *huit cens*, *quarante-deux*, lequel nombre eſt la même choſe que un million, ſix cent mille, vingt mille, quatre mille, huit cent, quarante, & deux: exprimez d'abord le nombre donné par parties.

| | |
|---|---|
| *Un million*, | 1000000 |
| *Six cens mille*, | 600000 |
| *Vingt mille*, | 20000 |
| *Quatre mille*, | 4000 |
| *Huit cens*, | 800 |
| *Quarante*, | 40 |
| *Deux*, | 2 |

& comme dans cette ſuite les zero ne ſervent qu'à faire garder aux chiffres poſitifs les rangs qu'ils doivent tenir pour conſerver leur valeur, ſupprimez les zero, & écrivez tous les chiffres poſitifs ſur une même ligne,

1624842.

& cette ſuite de chiffres exprimera le nombre énoncé dans le diſcours. Si dans l'énoncé il ſe trouvoit quelques nombres intermédiaires ſupprimés, mettez des zero à leur place, afin de conſerver aux chiffres précédens leur rang & leur valeur, *par ex*: *vingt mille cinquante* s'exprime par 20050.

PROBLÊME II.

28. *Enoncer dans le Diſcours des Nombres exprimés en Chiffres.*

SOLUTION. Il faut remarquer :

I°. Que dans une ſuite de chiffres donnés, on doit diſtinguer pluſieurs tranches, allant de droite à gauche, & que chaque tranche eſt compoſée de trois ordres ou chiffres.

II°. Que la premiere tranche à droite s'appelle la tranche des *unités*; la ſeconde, la tranche des *mille*; la troiſiéme, la tranche des *millions*; la quatriéme, la tranche des *billions*, & ainſi de ſuite.

III°. Que chaque tranche contient toujours trois ordres ou trois chiffres, excepté la derniere à gauche, qui quelquefois ne contient que deux chiffres, ou même un ſeul. Le premier ordre eſt celui des *unités*; le ſecond, celui des *dixaines*; le troiſiéme, celui des *centaines*; *par ex* :

| Millions, | | | Mille, | | | Unités. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 4 | 5, | 8 | 7 | 6, | 3 | 2 | 5. |
| Centaines. | Dixaines. | Unités. | Centaines. | Dixaines. | Unités. | Centaines. | Dixaines. | Unités. |

IV°. On commence par la tranche qui eſt à gauche, & il ne faut énoncer le nom propre à chaque tranche, qu'à la fin de cette tranche; *par ex*, la ſuite 345876325 ſignifie *trois cens quarante-cinq millions, huit cens ſoixante-ſeize mille, trois cens vingt-cinq.* On doit s'abſtenir de nommer les ordres dans leſquels il ſe trouve des zero à la place des chiffres poſitifs; *par ex*: la ſuite des chiffres 30421 ſignifie *trente mille, quatre cens, vingt & un.*

L'objet de l'Arithmétique ſont les opérations que l'on peut faire ſur les nombres, ſoit entiers, ſoit fractionnaires : nous parlerons ; 1°. des opérations ſur les nombres entiers ; 2°. des opérations ſur les fractions.

## ARTICLE I.

### *Des opérations ſur les Nombres entiers.*

Les opérations auxquelles on peut aſſujettir les nombres entiers, ſont l'Addition & la Souſtraction ; la Multiplication & la Diviſion ; l'Exaltation & l'Extraction.

### PARAGRAPHE I.

### *De l'Addition & de la Souſtraction.*

### *DÉFINITIONS.*

I.

29. L'addition eſt une opération dans laquelle on joint enſemble pluſieurs nombres donnés, pour avoir un réſultat que l'on appelle *Somme* ; *par ex* : ſi l'on ajoute enſemble 5 & 7, il eſt facile d'en trouver la ſomme qui eſt 12, ce qui s'exprime d'une maniere abregée par $5 + 7 = 12$, c'eſt-à-dire, 5 *plus* 7 *égal à* 12.

II.

30. La Souſtraction eſt une opération inverſe de l'addition. Dans l'addition on ajoute un nombre à un autre, pour avoir un réſultat qu'on appelle *Somme :* dans la ſouſtraction on retranche un nombre d'un autre, pour avoir un réſultat que l'on appelle *Différence*, *Reſte* ou *Excès*. Si on veut ſouſtraire 3 de 9, il reſte 6 qui ſera la *différence* des deux nombres, ou l'*excès*, dont le plus grand ſurpaſſe le plus petit, ce qui s'exprime ſimplement de cette maniere, $9 - 3 = 6$, c'eſt-à-dire 9 *moins* 3 *égal à* 6.

## PROBLÊME I.

31. *Faire l'Addition, ou chercher la Somme de plusieurs Nombres donnés.*

SOLUTION. I°. Si les nombres donnés ſont ſimples, il n'y a nulle difficulté, comme nous venons de le voir ; *par ex* : $3 + 4 = 7$.

II°. Mais ſi les nombres donnés ſont compoſés, il faut les écrire les uns ſous les autres, obſervant de mettre les unités ſous les unités, les dixaines ſous les dixaines, les centaines ſous les centaines, les mille, &c.

III°. On commence par la colonne des unités, & on en cherche la ſomme, laquelle s'exprime ou par un nombre ſimple, ou par un nombre compoſé de deux chiffres, ou par un nombre compoſé de pluſieurs chiffres : dans le premier cas on écrit cette ſomme ſous la colonne des unités, & l'on paſſe à la colonne des dixaines, pour opérer ſur elle comme on a fait ſur celle des unités ; dans le ſecond cas on écrit ſous la colonne des unités le dernier des chiffres du nombre compoſé, & on retient le premier, (qui exprime des dixaines, à cauſe de ſa valeur décuple, voyez le N° 26.) pour l'ajouter par la penſée à la colonne des dixaines, dont enſuite il faut chercher la ſomme & l'écrire de la même maniere, comme on l'a fait pour la colonne des unités : dans le troiſiéme cas, on écrit ſous la colonne des unités le dernier des chiffres du nombre compoſé, & on retient les autres pour les ajouter à la colonne des dixaines, & l'on prend la ſomme tant des chiffres qui compoſent cette colonne, que de ceux que l'on a retenus, pour l'écrire de la même maniere qu'on l'a fait dans le ſecond cas.

IV°. On continue la même opération & de la même maniere ſur la colonne des centaines, des mille, & ſur toutes les colonnes ſuivantes.

*Exemples.*

| | |
|---|---|
| 4382 | 2040 |
| 463 | 3705 |
| 5370 | 6003 |
| Somme 10215 | Somme 11748 |

Dans le premier exemple, commencez par la colonne des unités, & dites 0 & 3 font 3, & 2 font 5, écrivez 5 ſous la colonne des unités : paſſez à la colonne des dixaines, & dites 7 & 6 font 13, & 8 font 21, laquelle ſomme 21 contient 21 dixaines, ou 2 centaines & 1 dixaine (26); poſez donc 1 ſous la colonne des dixaines, & vous retiendrez 2 centaines, que vous ajouterez à la colonne des centaines, en diſant, 3 & 4 font 7, & 3 font 10, & 2 que vous avez retenus font 12; j'écris donc 2 ſous la colonne des centaines, & je retiens 1 (qui vaut mille), que je tranſporte à la colonne des mille, & je dis 5 & 4 font 9, & 1 de retenu font 10; j'écris 0 ſous la colonne des mille, & j'écris 1 plus avant, n'y ayant plus de colonne à laquelle je puiſſe le tranſporter, & la ſomme eſt 10215.

## PROBLÊME II.

32. *Faire la Souſtraction, ou chercher la Différence de deux Nombres donnés.*

SOLUTION. I°. Si les nombres donnés ſont ſimples, il n'y a nulle difficulté; *par ex* : $8 - 6 = 2$.

II°. Si les nombres donnés ſont compoſés, il faut faire l'opération par parties, comme on a fait dans l'addition, c'eſt-à-dire, qu'il faut ſouſtraire les unités des unités, les dixaines des dixaines, &c. & écrire ſous chaque colonne la différence des deux nombres; *par ex* : ſi de la ſomme 897, je veux ſouſtraire 753, j'opérerai de la maniere ſuivante.

De 7 ôtez 3, il reſte 4 que j'écris ſous la colonne des unités : je paſſe aux dixaines ; de 9 ôtez 5, reſte 4 que je poſe ſous les dixaines, & ainſi de ſuite.

| 897 |
|---|
| 753 |
| 144 |

III°. Lorſque le chiffre ſupérieur eſt plus petit que l'inférieur qui eſt à ſouſtraire, il faut alors augmenter le chiffre ſupérieur d'une unité priſe ſur le chiffre précédent, laquelle unité eſt une dixaine (26) par rapport au chiffre ſuivant, pour lequel on l'emprunte. Or le chiffre précédent ſur lequel on emprunte cette unité, doit être diminué d'autant, lorſqu'on opérera ſur lui ; ou bien on peut le laiſſer tel qu'il eſt, & augmenter le chiffre inférieur qui lui eſt correſpondant de cette unité : car ces deux procédés reviennent au même ; *par ex* : ſi de 625 je veux retrancher 453, je dirai de 5 ôtez 3, reſte 2 que j'écris ſous la colonne des unités : je paſſe aux dixaines ; de 2 ôtez 5, cela ne ſe peut, j'emprunte une unité ſur le chiffre précédent 6, que je marque d'un point. afin de m'en ſouvenir, & cette unité ajoutée à 2 fait alors 12, dont ôtant 5, reſte 7, que j'écris ſous la colonne des dixaines : je paſſe aux centaines, & le point qui eſt au-deſſus de 6 m'avertiſſant que j'en ai emprunté une unité, il ne vaut plus que 5, & je dis, de 5 ôtez 4, ou, ce qui revient au même, de 6 ôtez 5, reſte 1 que j'écris ſous la colonne.

| 625 |
|---|
| 453 |
| 172 |

IV°. On trouve quelquefois des zero dans le nombre ſupérieur ; il faut dans ce cas emprunter une unité du premier chiffre poſitif à gauche, laquelle ajoutée à zero, fait une dixaine, & enſuite opérer comme dans l'exemple ſuivant.

De 0 ôtez 1, cela ne ſe peut ; j'emprunte du 3 une unité qui vaut 10 ; ſi de 10 j'ôte 1, reſte 9 ; enſuite de 2 ôtez 2, ou (laiſſant le chiffre ſu-

| . . . |
|---|
| 45030 |
| 32621 |
| 12409 |

périeur tel qu'il eſt, & augmentant le chiffre inférieur de l'unité empruntée) de 3 ôtez 3, reſte rien, & je mets o ſous la colonne; & comme le chiffre ſuivant dans le nombre ſupérieur ſe trouve être un o, j'opere comme j'ai déja fait, c'eſt-à-dire que j'emprunte une unité du chiffre voiſin à gauche.

V°. Si dans le nombre ſupérieur il ſe trouvoit pluſieurs zero de ſuite devant le chiffre pour lequel il faut emprunter, alors l'unité doit être empruntée du premier chiffre poſitif qui précéderoit à gauche; mais dans ce cas tous les zero interceptés entre ce chiffre poſitif & le chiffre pour lequel on emprunte, ſe changent en 9. En effet, ſi de 402 il falloit retrancher 3, il eſt évident qu'après avoir emprunté une unité du 4 pour la donner à 2, le nombre 40 qui précéde, ne vaut plus que 39, & par conſéquent le zero intercepté entre 4 & 2 ſe change en 9. Voici un exemple.

De 2 ôtez 1, reſte 1. Je paſſe à la colonne des dixaines; de o ôtez 5, cela ne ſe peut; j'emprunte une unité du chiffre 3, & je dis de 10 ôtez 5; reſte 5. Je paſſe à la colonne des centaines, & le zero étant changé en 9, je dis de 9 ôtez 8, reſte 1. Dans la colonne ſuivante, je dis pareillement de 9 ôtez 2, reſte 7. Enfin pour la derniere colonne, de 2 ôtez 1, reſte 1.

| | |
|---|---|
| | 30002 |
| | 12851 |
| | 17151 |

VI°. Mais l'opération ſera plus aiſée en empruntant toujours l'unité ſur le zero précédent (comme ſi ce zero étoit un chiffre poſitif) & en ſe ſouvenant d'augmenter de l'unité empruntée le chiffre inférieur & correſpondant au zero duquel on l'aura empruntée; ainſi dans l'exemple précédent je dis, de 2 ôtez 1, reſte 1. Je paſſe à la colonne des dixaines; de o ôtez 5, cela ne ſe peut, mais j'emprunte une unité du zero précédent, & je dis de 10 ôtez 5, reſte 5. Dans la colonne des centaines je dis, de

de 0 ôtez 9, cela ne ſe peut, j'emprunte encore une unité ſur le zero précédent, & je dis de 10 ôtez 9, reſte 1. Je paſſe à la colonne des mille, de 0 ôtez 3, cela ne ſe peut encore; mais empruntant une unité ſur le chiffre précédent, je dis de 10 ôtez 3, reſte 7. Enfin dans la derniere colonne, de 3 ôtez 2, reſte 1.

*Corollaire.*

33. Toutes les parties de l'Arithmétique ſe prouvent par leurs contraires; ainſi l'addition & la ſouſtraction ſe ſervent réciproquement de preuves l'une à l'autre; c'eſt-à-dire, que c'eſt par la ſouſtraction que l'on s'aſſure qu'on a bien opéré dans l'addition, & par l'addition que l'on s'aſſure qu'on a bien opéré dans la ſouſtraction : ſi l'on veut prouver, *par ex :* que 4 & 3 font 7, on s'aſſurera aiſément que la ſomme 7 eſt juſte, en faiſant voir que 3 retranché de 7 laiſſe 4; car $4 + 3 = 7$, parce que $7 - 3 = 4$, & réciproquement. La raiſon eſt que ces deux opérations ſont oppoſées, & que l'une détruit ce que fait l'autre.

## PARAGRAPHE II.

### *De la Multiplication & de la Diviſion.*

### *DEFINITIONS.*

#### I.

34. Si les nombres dont il faut trouver la ſomme, étoient tous les mêmes; *par ex :* 4, 4, 4, au lieu d'écrire le chiffre 4, trois fois, pour avoir $4 + 4 + 4 = 12$, il ſera plus court de ne l'écrire qu'une ſeule fois, & de mettre au-deſſous de 4 le chiffre 3, pour marquer que le premier doit être pris trois fois; or 4 pris trois fois donne le même réſultat, ſçavoir, 12; & alors l'opération s'appelle *Multiplication;* le premier nombre s'appelle *Multiplicande;* le ſecond, *Multiplicateur;* & le troiſieme, *Produit.*

II.

35. Multiplier, c'eſt donc prendre ou ajouter une quantité qu'on appelle *Multiplicande*, autant de fois qu'il y a d'unités dans une autre quantité, qu'on nomme *Multiplicateur*, pour avoir un réſultat, qu'on appelle produit; *par ex :* ſi l'on multiplie 2 par 3, l'on aura 6 pour réſultat ou produit, ce qui s'exprime plus brievement de cette maniere, $2 \times 3 = 6$, c'eſt-à-dire, 2 *par* 3 *égal à* 6.

*Corollaire.*

36. Il ſuit de cette définition, que le produit contient le multiplicande autant de fois que le multiplicateur contient l'unité; & par conſéquent ſi le multiplicateur eſt égal à l'unité, le produit ſera égal au multiplicande; ſi le multiplicateur eſt plus grand que l'unité, le produit ſera plus grand que le multiplicande; & ſi le multiplicateur eſt plus petit que l'unité, le produit ſera plus petit que le multiplicande; *par ex :* on aura $2 \times 3 = 6$; $2 \times 1 = 2$; $2 \times \frac{1}{2} = 1$.

PROBLÊME I.

37. *Faire la Multiplication, c'eſt-à-dire, chercher le Produit d'un Nombre par un autre, lorſque le Multiplicateur eſt plus grand que l'unité.*

SOLUTION. Ou le multiplicande & le multiplicateur ſont tous les deux des nombres ſimples; ou l'un des deux eſt un nombre compoſé, & l'autre un nombre ſimple; ou bien le multiplicande & le mulriplicateur ſont tous les deux des nombres compoſés.

*Premier Cas.*

38. Si le multiplicande & le multiplicateur ſont tous les deux des nombres ſimples, il n'y a nulle difficulté; *par ex :* $4 \times 3 = 12$; $5 \times 4 = 20$. Pour trouver tout d'un coup le produit de deux nombres

ſimples, on peut s'aider de la table ſuivante, qui contient les produits de chaque nombre ſimple par tous les autres.

A B

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 |
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
| 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 |
| 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 |
| 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 |
| 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 |

C D

Car dans cette table tous les nombres ſimples étant à côté les uns des autres dans la ligne AB, & au-deſſous les uns des autres dans la ligne AC, ſi vous voulez multiplier un nombre ; *par ex :* 7 pris dans la ligne AC, par un autre nombre 6, pris dans la ligne AB, vous en trouverez le produit 42 dans la caſe qui répondra tant au chiffre ſupérieur 6, qu'au nombre collatéral 7.

*Second Cas.*

39. Si des deux nombres que l'on multiplie, l'un étoit un nombre compoſé, & l'autre un nombre ſimple ; ſi, *par ex :* le multiplicande eſt un nombre compoſé & le multiplicateur un nombre ſimple, il faudra multiplier ſucceſſivement les unités, les dixaines, les centaines, &c. du multiplicande par le multiplicateur, comme on va le voir.

| | |
|---|---|
| Multiplicande, | 3421 |
| Multiplicateur, | 3 |
| Produit, | 10263 |

Je dis 3 fois 1 font trois, j'écris 3 ſous le 3; enſuite 3 fois 2 ſont 6, j'écris 6 ſous le 2; 3 fois 4 font 12, j'écris 2 ſous le 4, & retiens 1; 3 fois 3 font 9 & 1 de retenu font 10, que j'écris en mettant le 0 ſous le 3, & avançant la dixaine.

Or ce produit contenant le produit des unités, des dixaines, &c. du multiplicande par le multiplicateur, eſt par conſéquent le véritable produit.

Si le multiplicande étoit un nombre ſimple, & le multiplicateur, un nombre compoſé, on feroit du multiplicateur le multiplicande, & du multiplicande le multiplicateur, & on opéreroit comme ci-deſſus. En effet, il eſt indifférent de multiplier 4 par 3, ou 3 par 4; 2 par 15, ou 15 par 2; car le réſultat ſera toujours le même, puiſque $3 \times 4 = 12$, auſſi bien que $4 \times 3 = 12$.

*Troiſiéme Cas.*

40. Si le multiplicande & le multiplicateur ſont des nombres compoſés, il faudra multiplier tout le multiplicande par chaque chiffre du multiplicateur, ſavoir par les unités, par les dixaines, par les centaines, &c. du multiplicateur : or le multiplicande multiplié par les unités du multiplicateur, donnera un produit d'*unités*; multiplié par les dixaines du multiplicateur, donnera un produit de *dixaines*; multiplié par les centaines du multiplicateur, donnera un produit de *centaines*, & ainſi de ſuite : c'eſt pourquoi l'on aura différens produits d'*unités*, de *dixaines*, de *centaines*, &c. qu'il faudra écrire les uns ſous les autres, obſervant de garder les rangs propres à chaque ordre; la ſomme de ces

produits partiels donnera le produit total ; *par ex :*

| | | |
|---|---|---|
| | | 234 |
| | | 125 |
| Produit | des unités, | 1170 |
| | des dixaines, | 468 |
| | des centaines, | 234 |
| Produit total. | | 29250 |

Commencez par le premier chiffre du multiplicateur, & vous direz 5 fois 4 font 20, écrivez 0 ſous le 5, & retenez 2 ; 5 fois 3 font 15, & 2 de retenus font 17, écrivez 7, & retenez 1 ; 5 fois 2 font 10, & 1 de retenu font 11, & vous aurez 1170, qui ſera le produit des unités. Vous paſſerez au ſecond chiffre 2 du multiplicateur, & vous direz 2 fois 4 font 8, qu'il faut avancer d'un rang ſur la gauche, parce que le multiplicateur 2 étant au rang des dixaines, le produit 8 eſt un produit de dixaines. Continuez à multiplier les autres chiffres du multiplicande par ce chiffre 2 du multiplicateur, & vous aurez 468 pour produit des dixaines. Paſſez enſuite au troiſiéme chiffre 1 du multiplicateur, & dites 1 fois 4 font 4, que vous reculerez encore d'un rang vers la gauche pour le mettre au rang des centaines ; continuez à multiplier les autres chiffres du multiplicande, & vous aurez 234 pour produit des centaines. Ajoutez ces trois produits, & vous aurez le produit total.

*Corollaire.*

41. Pour multiplier tout d'un coup un nombre quelconque ; *par ex :* 24 par 10, il n'y a qu'à lui ajouter un zero ; ce qui fait $24 \times 10 = 240$ : pour le multiplier par 100, il n'y a qu'à lui ajouter deux zero, ce qui fait $24 \times 100 = 2400$. En un mot pour multiplier tout d'un coup par un nombre *dé-*

*cimal*, il n'y a qu'à ajouter au multiplicande autant de zero qu'il s'en trouve dans le nombre décimal : car ajoutant un zero, vous rendez le multiplicande dix fois plus grand, ou vous le multipliez par 10 : ajoutant deux zero, vous rendez le multiplicande cent fois plus grand, ou vous le multipliez par 100 : ce qui eſt fondé ſur la valeur des chiffres, laquelle augmente en proportion décuple d'un rang à un autre. Pareillement toutes les fois qu'il ſe trouve des zero à la fin, ſoit du multiplicande, ſoit du multiplicateur, ſoit de l'un & de l'autre en même temps, on peut abréger l'opération en multipliant les chiffres poſitifs du multiplicande & du multiplicateur les uns par les autres, & en écrivant à la fin du produit tous les zero qui ſe trouveront à la fin du multiplicande & du multiplicateur.

### PROBLÊME II.

42. *Faire la Multiplication, lorſque le Multiplicateur eſt égal à l'unité.*

SOLUTION. Il n'y a nulle difficulté : car le produit eſt alors toujours égal au multiplicande (36) : l'on a donc $24 \times 1 = 24$ ; $35 \times 1 = 35$, & ainſi du reſte.

### PROBLÊME III.

43. *Faire la Multiplication, lorſque le multiplicateur eſt plus petit que l'unité.*

SOLUTION. Lorſque le multiplicateur eſt plus petit que l'unité, le produit doit être autant de fois plus petit par rapport au multiplicande, que le multiplicateur eſt plus petit par rapport à l'unité (36) ; *par ex :* $12 \times \frac{1}{2} = 6$ : $12 \times \frac{1}{3} = 4$ ; $12 \times \frac{1}{4} = 3$.

### *Corollaire I.*

44. Dans les exemples ci-deſſus pour avoir le produit de 12 par $\frac{1}{2}$, par $\frac{1}{3}$, par $\frac{1}{4}$, on a pris la moi-

tié, le tiers, le quart du multiplicande, c'eſt-à-dire que l'on a réellement diviſé 12 par les nombres 2, 3, 4; on voit donc que lorſque le multiplicateur eſt une fraction qui a l'unité pour numérateur, on trouvera tout d'un coup le produit, en diviſant le multiplicande par le dénominateur de la fraction.

*Corollaire II.*

45. Sur ce principe eſt fondé l'art de la multiplication des nombres par les *parties aliquotes*, c'eſt-à-dire par les parties, ou *fractions* de l'unité qui eſt conſidérée dans le multiplicateur. Soit donné 12 à multiplier par 2 livres 10 ſols, après l'avoir multiplié par 2 livres, ce qui donne le produit 24 liv. il reſte encore à le multiplier par 10 ſols.

Or je remarque que 10 ſols eſt une *fraction* ou une *partie aliquote* de la livre, laquelle eſt l'unité que je conſidere dans le multiplicateur, (parce qu'elle eſt de l'eſpece de celles qui le compoſent:) par conſéquent 10 ſols étant la moitié, ou $\frac{1}{2}$ de la livre, je trouverai le produit de 12 par 10 ſols, en multipliant 12 par $\frac{1}{2}$, ou plutôt, en le diviſant par 2, ce qui donnera $12 \times 10$ ſols $= 12 \times \frac{1}{2} = \frac{12}{2} = 6$ livres.

Pareillement le produit de 12 par 5 ſols, qui eſt le quart ou $\frac{1}{4}$ de la livre, ſera $12 \times 5$ ſols $= 12 \times \frac{1}{4} = \frac{12}{4} = 3$ livres.

Le produit de 12 par 2 ſols, qui eſt la dixiéme partie ou $\frac{1}{10}$ de la livre, ſera $12 \times 2^{s.} = 12 \times \frac{1}{10} = \frac{12}{10} = 1$ livre 4 ſols.

Par la même raiſon le produit de 12 par 15 ſols qui ſont la même choſe que $10^{s.} + 5^{s.}$ ce qui fait la moitié & le quart, ou $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ de la livre, ſe trouvera en prenant la moitié de 12 qui eſt 6, & puis en prenant encore le quart de 12 qui eſt 3, ce qui donne $12 \times 15^{s.} = 12 \times \overline{10^{s.} + 5^{s.}} = 12 \times \overline{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \frac{12}{2} + \frac{12}{4} = 6 + 3 = 9$.

## *DÉFINITIONS.*

### I.

46. Si d'un nombre donné il falloit retrancher un même nombre plusieurs fois, *par ex :* si de 8 il falloit retrancher 2 autant de fois qu'il est possible de le faire, en faisant $8 - 2 = 6$; $6 - 2 = 4$; $4 - 2 = 2$; $2 - 2 = 0$ : on verroit que 2 peut être retranché de 8, ou que 2 est contenu dans 8 quatre fois, & cette opération seroit une *soustraction* répétée quatre fois. Or il est plus court de demander tout d'un coup en 8 combien de fois est contenu 2 ? On trouve qu'il y est contenu quatre fois, ce qui s'exprime d'une maniere plus abrégée de cette façon, $\frac{8}{2} = 4$, c'est-à-dire 8 *divisé par* 2 *égal à* 4, & cette opération abrégée s'appelle *Division ;* le premier nombre 8 s'appelle *Dividende ;* le second 2 s'appelle *Diviseur ;* & le résultat 4 se nomme *Quotient.*

### II.

47. La division est donc une opération dans laquelle on cherche combien de fois un nombre, qu'on appelle *Diviseur*, est contenu dans un autre qu'on nomme *Dividende*, & ce *combien de fois* est exprimé par un troisiéme nombre qui s'appelle *Quotient.*

*Corollaire I.*

48. Il suit de ce que nous venons de dire, que, comme la multiplication n'est qu'une addition plusieurs fois réitérée, de même la division n'est qu'une soustraction plusieurs fois répétée. Comme dans la multiplication on ajoute le multiplicande à lui-même autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur ; de même dans la division on retranche le diviseur du dividende autant de fois qu'il y a d'unités dans le quotient.

*Corollaire II.*

49. Comme le diviſeur eſt contenu dans le dividende autant de fois que l'unité eſt contenue dans le quotient, de même le quotient eſt contenu dans le dividende autant de fois que l'unité eſt contenu dans le diviſeur : c'eſt pourquoi ſi le diviſeur eſt plus grand que l'unité, le quotient ſera plus petit que le dividende : *par ex :* $\frac{12}{1} = 4$ ; ſi le diviſeur eſt égal à l'unité, le quotient ſera égal au dividende ; *par ex :* $\frac{12}{1} = 12$, ſi le diviſeur eſt plus petit que l'unité, le quotient ſera plus grand que le dividende, $\frac{\frac{12}{1}}{\frac{1}{2}} = 24$.

PROBLÊME I.

50. *Faire une Diviſion, c'eſt-à-dire, chercher le Quotient d'un nombre diviſé par un autre, lorſque le Diviſeur eſt plus grand que l'unité.*

SOLUTION. Ou le dividende & le diviſeur ſont tous les deux des nombres ſimples ; ou le dividende eſt un nombre compoſé, & le diviſeur un nombre ſimple, ou le dividende eſt un nombre ſimple, & le diviſeur un nombre compoſé, ou le dividende & le diviſeur ſont tous les deux des nombres compoſés.

*Premier Cas.*

51. Si le dividende & le diviſeur ſont des nombres ſimples, il n'y a nulle difficulté ; *par ex :* $\frac{8}{4} = 2$ ; $\frac{4}{2} = 2$, comme il eſt évident.

*Second Cas.*

52. Si le dividende eſt un nombre compoſé, & le diviſeur un nombre ſimple.

I°. Prenez le premier chiffre du dividende à gauche, ou les deux premiers chiffres du dividende, (ſi le diviſeur ne ſe trouve point contenu dans le premier,) & ce ſera un premier *membre* de diviſion que vous diviſerez par le diviſeur donné, ſous lequel écrivez le quotient.

IIº. Multipliez le chiffre trouvé au quotient par le diviſeur, & retranchez le produit du membre de diviſion, afin de voir ſi le diviſeur eſt contenu un certain nombre de fois dans le dividende ſans reſte, ou avec un reſte : s'il y a un reſte, il ſera ou plus grand que le diviſeur, ou égal au diviſeur, ou plus petit que le diviſeur : s'il eſt plus grand que le diviſeur, ou s'il eſt égal au diviſeur, c'eſt une marque que vous n'avez pas retranché le diviſeur du membre de diviſion autant de fois qu'il y étoit contenu, & par conſéquent que le chiffre écrit au quotient eſt trop petit, & qu'il faut l'augmenter : ſi le reſte eſt plus petit que le diviſeur, abaiſſez à côté de ce reſte le chiffre ſuivant du dividende, lequel augmenté de ce reſte, donnera le ſecond *membre* de diviſion, ſur lequel vous opérerez comme ſur le premier.

IIIº. Continuez de même l'opération, en diviſant ſucceſſivement chaque chiffre du dividende, & lorſque le chiffre à diviſer ſe trouvera plus petit que le diviſeur, mettez zero au quotient, afin de conſerver aux chiffres qui le compoſent, leur rang & leur valeur ; voici un exemple :

| | | | |
|---|---|---|---|
| Dividende, | 3748 | 4 | Diviſeur. |
| | 36 | 937 | Quotient. |
| | 14 | | |
| | 12 | | |
| | 28 | | |

Dites en 3 combien de fois 4 ; il n'y eſt pas contenu : mais en 37 combien de fois 4 ? il y eſt 9 fois ; écrivez 9 au quotient, & multipliez 9 par 4, ce qui donne le produit 36 que vous écrirez ſous 37 ; puis ôtez 36 de 37, reſte 1, à côté duquel abaiſſez le chiffre 4, qui augmenté de ce reſte fera 14, & dites en 14 combien de fois 4 ? 3 fois ; écrivez 3 au

quotient, & multipliez 3 par 4, ce qui fait 12, que vous écrirez ſous 14 : ôtez 12 de 14, reſte 2, & à côté de 2 abaiſſez le chiffre ſuivant 8, ce qui ſera 28, lequel diviſé par 4 donnera 7 juſte au quotient, qui ſera 937.

*Troiſiéme Cas.*

53. Si le dividende eſt un nombre ſimple & le diviſeur un nombre compoſé, la diviſion ne peut point s'effectuer ; on ne peut dans ce cas que l'indiquer, & cette diviſion indiquée donne alors une *fraction*, laquelle eſt ſoumiſe à des regles particulieres dont nous parlerons dans la ſuite.

*Quatriéme Cas.*

54. Si le dividende & le diviſeur ſont tous les deux des nombres compoſés, il faut faire la diviſion par par parties, comme il ſuit.

I°. Il faut prendre dans les premiers chiffres du dividende à gauche un nombre dans lequel ſoit contenu le diviſeur, & ce ſera le premier *membre* de diviſion.

II°. Il faut diviſer ce premier membre par le diviſeur, ou pour abréger, par le premier caractere ou chiffre du diviſeur, & l'on aura un quotient, lequel peut être ou trop grand, ou trop petit, ce que l'on connoîtra par l'opération ſuivante.

III°. Il faut multiplier le quotient trouvé par le diviſeur, comme dans le ſecond cas, & ſouſtraire le produit du premier membre de diviſion. Or ſi ce produit ne peut pas être ſouſtrait du membre de diviſion, c'eſt une marque que le quotient eſt trop grand, & par conſéquent il faut le diminuer d'une unité, & le diminuer toujours d'une unité, juſqu'à ce que cette ſouſtraction devienne poſſible. Si ce produit peut être ſouſtrait du membre de diviſion, & qu'il n'y ait point de reſte, alors le quotient trouvé eſt juſte, & il faut l'écrire ; s'il ſe trouve un reſte, & qu'il ſoit plus petit que le diviſeur, le

chiffre trouvé au quotient eſt encore bon, & il faut l'écrire : mais ſi le reſte étoit égal au diviſeur, ou plus grand que le diviſeur, ce ſeroit une marque, comme nous l'avons déja dit, que le diviſeur ſeroit encore contenu dans le dividende, & qu'il en pourroit être encore retranché, & par conſéquent que le chiffre trouvé pour le quotient ſeroit trop petit ; il faudroit donc l'augmenter d'une unité, & l'augmenter toujours d'une unité, juſqu'à ce que le reſte, s'il s'en trouve encore après la ſouſtraction, ſoit plus petit que le diviſeur.

IV°. Lorſqu'après la ſouſtraction il ſe trouve un reſte, il faut ajourer ce reſte au chiffre ſuivant du dividende ; ou plus commodément, il faut écrire le chiffre ſuivant du dividende à côté de ce reſte, & l'on aura un *ſecond membre* de diviſion, ſur lequel il faut opérer comme ſur le premier, & ainſi de ſuite.

V°. Il faut obſerver de mettre o au quotient toutes les fois que le diviſeur ne ſe trouve pas contenu dans le membre de diviſion, afin de conſerver l'ordre & le rang que doivent tenir les chiffres du quotient.

VI°. Lorſque le quotient n'eſt pas juſte, mais qu'il ſe trouve un reſte après la diviſion, il faut écrire ce reſte à côté du quotient, & le diviſeur au-deſſous de ce reſte, ce qui donne une fraction ou une diviſion indiquée.

*Exemple I.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| Dividende, | 8428 | 24 | Diviſeur. |
| Produit, | 72 | $351+\frac{4}{24}$ | Quotient. |
| Reſte, | 12 | | |
| Second memb. | 122 | | |
| Produit, | 120 | | |
| Reſte, | 2 | | |
| Troiſiéme memb. | 28 | | |
| Produit, | 24 | | |
| Reſte, | 4 | | |

*Exemple I I.*

Je veux diviſer 56034030 par 30, j'opere en ſuivant la méthode précédente.

| | 56034030 ⟌ 30 |
|---|---|
| Produit, | 30 ⟌ 1867801 |
| Reſte, | 26 |
| II. Memb. | 260 |
| Produit, | 240 |
| Reſte, | 20 |
| III. Memb. | 203 |
| Produit, | 180 |
| Reſte, | 23 |
| IV. Memb. | 234 |
| Produit, | 210 |
| Reſte, | 24 |
| V. Memb. | 240 |
| Produit, | 240 |
| Reſte, | 0 |
| VI. Memb. | 030 |
| Produit, | 30 |
| Reſte, | 0 |

Dans le premier exemple, le diviſeur 24 contenant deux chiffres, il faut prendre pour premier *membre* de diviſion 84, & dire, en 8 combien de fois 2 ? Il y eſt quatre fois ; mais le chiffre 4 multiplié par le diviſeur 24, donne le produit 96, qui ne peut être ſouſtrait de 84, & par conſéquent il eſt trop grand : il faut donc le diminuer d'une unité, & prendre 3, lequel multiplié par le diviſeur, donne le produit 72, qui peut être ſouſtrait de 84 ; c'eſt pourquoi j'écris 3 au quotient, & 72 ſous 84 : Je ſouſtrais 72 de 84, il reſte 12 que j'écris au-deſſous, & à côté de ce reſte j'abaiſſe le chiffre ſui-

vant 2 du dividende, ce qui donne 122 pour ſecond *membre* de diviſion. Je dis donc en 12 combien de fois 2? 6 fois. Mais pour la même raiſon que ci-deſſus, je trouve que 6 eſt trop grand, mais que 5 eſt bon: j'écris donc 5 au quotient, & je multiplie le diviſeur par ce chiffre 5, ce qui donne le produit 120, que j'écris au-deſſous, & que je ſouſtrais de 122; il reſte 2, à côté duquel ayant abaiſſé le dernier chiffre 8, j'ai 28 pour troiſiéme membre de diviſion, & continuant à opérer comme ci-deſſus, je trouve pour quotient le nombre 351, avec le reſte 4, qui ne pouvant être diviſé par 24, donne la fraction $\frac{4}{24}$.

Dans le ſecond exemple, ayant pris pour premier membre de diviſion les deux premiers chiffres du dividende, je dis, 3 en 5 ſe trouve une fois; j'écris 1 au quotient, & je multiplie 1 par 30, ce qui donne 30, lequel ſouſtrait de 56, laiſſe le reſte 26, à côté duquel j'abaiſſe 0, & j'ai 260 pour ſecond membre de diviſion. Je dis donc en 26 combien de fois 3? huit fois: je multiplie 8 par 30, & j'ai le produit 240, lequel retranché de 260, donne le reſte 20: à côté de 20 j'abaiſſe 3, & je dis en 20 combien de fois 3? Je trouve 6, qui multiplié par 30, donne 180: 180 retranché de 203, reſte 23, à côté duquel j'abaiſſe 4, & je dis 3 en 23 ſe trouve 7 fois, or 7 multiplié par 30 donne 210: je retranche 210 de 234 reſte 24, à côté duquel j'abaiſſe 0, & je dis 3 en 24 ſe trouve 8 fois, dont le produit par 30 eſt 240, qui ſouſtrait de 240, ne laiſſe rien. J'abaiſſe donc 3, & je dis 3 ne peut pas être diviſé par 30, je mets donc un 0 au quotient, & à côté de 3 j'abaiſſe 0, ce qui donne 30 pour dernier membre de diviſion, & je dis 3 ſe trouve une fois dans 3, & 1 multiplié par 30 donne 30, que je ſouſtrais de 30, il reſte 0, & l'opération eſt finie.

*Remarque I.*

55. Quand il ſe trouve trois chiffres au quotient, le produit du diviſeur par le premier chiffre trouvé au quotient eſt un produit de centaines ; & c'eſt pour cette raiſon que dans le premier exemple, le premier produit 72 doit être écrit ſous le membre 84, de façon que le dernier chiffre 2 de 72 ſe trouve au rang des centaines ; pareillemant le produit du diviſeur par le ſecond chiffre trouvé au quotient eſt un produit de dixaines ; & c'eſt pour cette raiſon que dans le ſecond produit 120 le dernier caractere 0 doit être au rang des dixaines, & ainſi du reſte. Il faut faire une remarque toute ſemblable, ſi le quotient étoit compoſé de 4, de 5, de 6, &c. chiffres.

*Remarque II.*

56. On ne peut jamais mettre plus de 9 au quotient pour chaque membre de diviſion : car ſi l'on pouvoit mettre 10 au quotient, il s'enſuivroit que le membre de diviſion ſeroit dix fois plus grand que le diviſeur : or le membre de diviſion ſur lequel on opere, ne peut jamais être dix fois plus grand que le diviſeur : s'il l'étoit, & ſi l'on avoit *par ex* : pour membre de diviſion 3250, lorſqu'on a pour diviſeur 325, retranchez le zero du membre de diviſion, afin de le rendre dix fois plus petit ; donc en ce cas vous le rendez préciſément égal au diviſeur, & vous pourrez par conſéquent le diviſer par ce diviſeur 325 : donc vous ne pouvez prendre 3250 pour membre de diviſion, qu'après avoir retranché le zero ; donc le membre de diviſion ne peut jamais être dix fois plus grand que le diviſeur, ou ce qui revient au même, vous ne pouvez jamais écrire 10 au quotient.

*Corollaire I.*

57. Il y a toujours autant de caracteres ou chiffres au quotient, qu'il y a de membres de diviſion; car chaque membre donne au quotient un chiffre ou un o.

*Corollaire II.*

58. Le diviſeur multiplié par le quotient eſt égal au dividende: car on a retranché le diviſeur du dividende autant de fois qu'il y a d'unités dans le quotient; donc ſi l'on prend le diviſeur autant de fois qu'il y a d'unités dans le quotient, c'eſt-à-dire, ſi l'on multiplie le diviſeur par le quotient, on aura un produit égal au dividende.

C'eſt poutquoi la multiplication & la diviſion ſe ſervent réciproquement de preuve: car ſi l'on veut faire voir que $\frac{8}{4}=2$, il n'y a qu'à faire voir que $4\times 2=8$: car de ce que le diviſeur a été retranché du dividende autant de fois qu'il y a d'unités dans le quotient, il s'enſuit que le diviſeur pris autant de fois qu'il y a d'unités dans le quotient, doit donner le dividende.

*Corollaire III.*

59. Pour diviſer tout d'un coup par un nombre décimal, il n'y a qu'à retrancher dans le dividende ſur la fin autant de caracteres ou chiffres qu'il y a de zero dans le diviſeur décimal; *par ex*: $\frac{240}{10}=24$; $\frac{2400}{100}=24$; & $\frac{343}{10}=34+\frac{3}{10}$; & ainſi du reſte. Car lorſque vous retranchez un chiffre, vous rendez le nombre dix fois plus petit, ou vous le diviſez par 10; lorſque vous retranchez deux chiffres, vous le rendez cent fois plus petit, ou vous le diviſez par 100; ce qui eſt toujours fondé ſur la valeur des chiffres, laquelle croît en proportion décuple.

Remarquez que lorſque les chiffres retranchés ſont poſitifs, la diviſion n'eſt pas juſte, mais que l'on

l'on a un reſte exprimé par les chiffres poſitifs retranchés ; *par ex :* $\frac{2473}{100} = 24$, avec le reſte 73 que l'on ne peut point diviſer par 100, mais dont on doit faire une fraction, comme nous l'allons dire ci-après.

## Problême II.

60. *Faire la Diviſion, lorſque le Diviſeur eſt l'unité.*

Solution. Il n'y a nulle difficulté ; le quotient dans ce cas eſt égal au dividende ; car l'unité qui multiplie ou qui diviſe une quantité, ne l'augmente, ni ne la diminue point : $\frac{3}{1} = 3$, $\frac{45}{1} = 45$, & ainſi du reſte.

## Problême III.

61. *Faire la Diviſion, lorſque le Diviſeur eſt plus petit que l'unité.*

Solution. Le quotient doit être dans ce cas autant de fois plus grand par rapport au dividende, que le diviſeur eſt plus petit par rapport à l'unité, ſuivant le principe énoncé ci-deſſus (49). Ainſi 24 diviſé par $\frac{1}{2}$ donne 48 ; diviſé par $\frac{1}{3}$ donne 72 ; diviſé par $\frac{1}{4}$ donne 96.

### *Corollaire.*

62. Dans les exemples ci-deſſus, pour avoir le quotient, l'on a pris le double, le triple, le quadruple du dividende ; c'eſt-à-dire, que l'on a réellement multiplié 24 par 2, par 3, par 4. On voit donc que lorſque le diviſeur eſt une fraction dont le numérateur eſt l'unité, on trouvera tout d'un coup le quotient, en multipliant le dividende par le dénominateur de la fraction ; de même que dans la multiplication, lorſque le multiplicateur eſt une fraction, on trouve tout d'un coup le produit, en diviſant le multiplicande par le dénominateur de la fraction.

*Propoſition I.*

63. La diviſion n'eſt pas toujours juſte, mais ſouvent elle laiſſe un reſte que l'on ne peut plus diviſer par le diviſeur, ce qui arrive toutes les fois que le dividende n'eſt pas un produit exact du diviſeur par un nombre entier, *par ex :* ſi l'on avoit à diviſer 19 par 3, le quotient ſeroit 6 avec le reſte 1, qui ne peut plus être diviſé par 3. Dans ce cas on doit écrire à côté du quotient ce reſte, & en indiquer la diviſion par le diviſeur, ce qui donnera une fraction jointe à un entier, comme il eſt aiſé de le voir $\frac{19}{3} = 6 + \frac{1}{3}$.

*Propoſition II.*

64. Mais lorſque la diviſion eſt juſte, ou qu'elle ne laiſſe pas de reſte, le dividende doit être regardé comme un produit exact réſultant de la multiplication du diviſeur par le quotient ; ſous ce point de vue le dividende eſt appellé *Multiple*, & le diviſeur, ainſi que le quotient, ſont appellés *Parties aliquotes* de ce multiple, *Facteurs*, *Sous-Multiples.*

C'eſt pourquoi la multiplication eſt une compoſition de quantités, & la diviſion en eſt la décompoſition. Il eſt facile de compoſer une quantité, parce que la compoſition ſe fait par la multiplication de facteurs donnés, dont les produits ſont toujours des réſultats juſtes & exacts : mais la décompoſition des quantités n'eſt pas toujours facile, ni même poſſible, quand on veut les décompoſer en nombres entiers ; parce qu'elle ſe fait par voie de diviſion, laquelle donne rarement des quotiens ſans reſte.

Quand on veut décompoſer un multiple quelconque, il faut ſçavoir trouver toutes les quantités dont ce multiple eſt le produit exact, c'eſt-à-dire, qu'il faut ſçavoir trouver tous les diviſeurs qui peu-

vent diviſer exactement & ſans reſte une grandeur donnée.

*Propoſition III.*

65. Tout produit ou multiple eſt compoſé de deux facteurs au moins, comme il eſt évident : or

I°. Tout produit ou multiple diviſé par un de ſes facteurs donne au quotient l'autre facteur, s'il n'eſt compoſé que de deux facteurs ; ou le produit des autres facteurs, s'il eſt compoſé de pluſieurs.

II°. Deux produits peuvent avoir des facteurs ou des diviſeurs communs ; *par ex :* 12 & 8 ont 4 pour diviſeur commun ; car l'un & l'autre nombre peuvent être diviſés exactement & ſans reſte par 4.

III°. Parmi les diviſeurs communs de deux produits ou multiples, il en eſt toujours un que l'on appelle *le plus grand commun diviſeur*, & c'eſt le plus grand des nombres qui peuvent diviſer ſans reſte les deux produits donnés.

PROBLÊME I.

66. *Trouver tous les Facteurs, ou Diviſeurs d'un Produit numerique.*

SOLUTION. Il faut diviſer le produit par 2, ou par 3, ou par 5, ou par 7, &c. juſqu'à ce que l'on trouve un quotient juſte : il faut enſuite diviſer ce premier quotient encore par 2, ou par 3, ou par 5, &c. juſqu'à ce que l'on trouve un ſecond quotient juſte : il faut encore diviſer ce ſecond quotient par 2, ou par 3, &c. juſqu'à ce qu'enfin l'on trouve pour quotient l'unité. De plus on multipliera tous les diviſeurs qui auront donné des quotiens juſtes, les uns par les autres, deux à deux, puis trois à trois, puis quatre à quatre, &c. & les produits de ces diviſeurs, ainſi que les diviſeurs eux-mêmes, ſeront tous des diviſeurs du nombre propoſé.

*Corollaire.*

67. Tout nombre auquel on ne trouve pas d'autre diviſeur que l'unité, ou que lui-même, s'appelle nombre *premier ;* tels ſont les nombres 1. 2. 3. 5. 7. 11. 13. 17. 19. 23. 29. 31. 37, &c. Or lorſqu'on veut trouver tous les diviſeurs d'un nombre quelconque, il faut tenter les diviſions du nombre donné par la ſuite des nombres premiers, & ils feront trouver les diviſeurs cherchés.

PROBLÊME II.

68. *Trouver tous les Diviſeurs communs de deux Nombres donnés.*

SOLUTION. Cherchez tous les diviſeurs de chacun des nombres donnés, & en comparant les diviſeurs d'une part avec les diviſeurs de l'autre, vous trouverez ceux qui ſont communs à l'un & à l'autre nombre donné, *par ex :* les diviſeurs communs de 60 & de 20. ſont 1, 2, 4, 5, 10.

PROBLÊME III.

69. *Trouver le plus grand commun Diviſeur de deux Nombres donnés.*

SOLUTION. I°. On appelle le plus grand commun diviſeur de deux grandeurs, la plus grande quantité qui puiſſe diviſer ſans reſte les deux grandeurs données.

II°. On trouve le plus grand commun diviſeur de deux nombres donnés, en diviſant le plus grand par le plus petit ; & ſi la diviſion eſt juſte, le plus petit des deux nombres ſera le plus grand commun diviſeur cherché. Mais s'il ſe trouve un reſte, on doit (négligeant le quotient) diviſer le plus petit nombre par ce reſte ; & ſi la diviſion eſt juſte, ce reſte ſera le plus grand commun diviſeur. S'il ſe trouve un ſecond reſte, il faut diviſer le premier

reſte par le ſecond, & continuer toujours de diviſer (en négligeant les quotiens) le reſte précédent par le reſte ſuivant; & celui qui diviſera exactement le reſte précédent, ſera le plus grand commun diviſeur cherché. Ainſi l'on trouve que le plus grand diviſeur commun des nombres 25 & 20 eſt 5; de 96 & 44, eſt 4. Mais s'il arrive que le dernier reſte ſoit 1, c'eſt une marque que les deux nombres n'ont pas d'autres diviſeurs communs que l'unité, & dès-lors ce ſont, comme nous l'avons dit, des nombres *premiers*.

DÉMONSTRATION. La raiſon eſt, que les deux quantités dont on cherche le plus grand commun diviſeur, ſont toujours des produits exacts (ou des multiples) du dernier reſte; parce que celui-ci répété un certain nombre de fois égale chacune de deux quantités données. On en verra une démonſtration plus rigoureuſe dans l'analyſe.

## PARAGRAPHE III.

### *De l'Exaltation & de l'Extraction.*

### *DÉFINITIONS.*

I.

70. Lorſque dans la multiplication le multiplicande & le multiplicateur ſont un même nombre, ou, ce qui eſt le même, lorſqu'un nombre doit être multiplié par lui-même; alors l'opération s'appelle *Exaltation*; le produit ſe nomme *Puiſſance*; & le nombre qui multiplié par lui-même a donné cette puiſſance, s'appelle *Racine*.

II.

71. Le produit d'un nombre multiplié par l'unité, s'appelle premiere Puiſſance & premiere Ra-

cine ; *par ex :* 3 × 1 = 3, eſt la premiere puiſſance & la premiere racine du nombre 3.

III.

72. Le produit d'un nombre multiplié une fois par lui-même s'appelle ſeconde Puiſſance, ou *Quarré*, & ſa racine ſe nomme Racine ſeconde, ou *quarrée* ; *par ex :* 3 × 3 = 9, donne 9 pour la ſeconde puiſſance, ou *Quarré*, & 3 pour la racine ſeconde, ou *quarrée*.

IV.

73. Le produit d'un nombre multiplié deux fois par lui-même, s'appelle troiſiéme Puiſſance, ou *Cube*, & ſa racine s'appelle Racine troiſiéme, ou *cubique* ; *par ex :* 3 × 3 × 3 = 27. donne 27 pour la troiſiéme puiſſance, ou le *Cube*, & 3 pour la racine troiſiéme, ou *cubique*.

V.

74. Le produit d'un nombre multiplié trois fois par lui-même s'appelle quatriéme Puiſſance, ou *Quarré-quarré* ; la racine de cette puiſſance s'appelle Racine quatrieme, ou *quarrée-quarrée* ; *par ex :* 3 × 3 × 3 × 3 = 81 donne 81 pour la quatriéme puiſſance, ou le *Quarré-quarré*, & 3 pour la racine quatriéme, ou *quarrée-quarrée :* il en de même pour les autres puiſſances, 5^e^ ; 6^e^, 7^e^, &c.

VI.

75. On appelle *Expoſant* de la puiſſance, ou de la racine, le nombre qui exprime le degré de la puiſſance ou de la racine. L'expoſant de la premiere puiſſance & de la premiere racine eſt 1 ; celui de la ſeconde puiſſance & de la ſeconde racine eſt 2 ; celui de la troiſiéme puiſſance & de la troiſiéme racine eſt 3 ; & ainſi du reſte.

VII.

76. Lorſque dans la diviſion le dividende & le

diviſeur ſont tels, que le quotient qui réſulte eſt le même nombre que le diviſeur, comme il arrive, *par ex :* en diviſant 9 par 3 : ou même lorſqu'après avoir diviſé le dividende, on continue à diviſer le premier, le ſecond, le troiſiéme, &c. quotient par le même diviſeur, & que le dernier quotient qui réſulte eſt le même nombre que le diviſeur, comme il arrive ; *par ex :* en diviſant 64 par 4, ou 125 par 5, alors l'opération s'appelle *Extraction ;* le dividende s'appelle *Puiſſance ;* & le diviſeur, ainſi que le quotient, ſe nomment *Racines.*

L'extraction eſt donc une opération par laquelle on cherche un nombre qui, multiplié un certain nombre de fois par lui-même, donne la puiſſance propoſée.

*Corollaire I.*

77. Nous venons de voir que pour élever un nombre quelconque à la ſeconde puiſſance, il n'y a qu'à le multiplier une fois par lui-même ; que pour l'élever à la troiſiéme puiſſance, il faut le multiplier deux fois par lui-même ; que pour l'élever à la quatrieme puiſſance, on doit le multiplier trois fois par lui-même, & ainſi du reſte : d'où par conſéquent il ſuit en général que, pour élever un nombre à une puiſſance quelconque, il n'y aura qu'à le multiplier par lui-même autant de fois moins une, qu'il y a d'unités dans l'expoſant de la puiſſance propoſée ; pour élever le nombre 3 à la troiſieme puiſſance, il n'y a qu'à le multiplier trois fois moins une, ou deux fois par lui-même, & l'on aura $3 \times 3 \times 3 = 27$.

*Corollaire II.*

78. Puiſqu'une puiſſance quelconque, *par ex :* la troiſiéme puiſſance 27 eſt le produit d'un multiplicande 3 multiplié deux fois par un multiplicateur 3 ; il s'enſuit que la racine troiſiéme de la puiſſance

27 doit être un quotient 3 du dividende 27 diviſé deux fois par un diviſeur 3.

*Corollaire III.*

79. Quand on propoſe une puiſſance, *par ex:* 27, pour en chercher la racine, cette racine n'eſt pas aiſée à trouver tout d'un coup; elle réſulte d'une diviſion dans laquelle on connoît, il eſt vrai, le dividende qui eſt la puiſſance propoſée; mais on ne connoît pas le diviſeur, parce que ce diviſeur eſt le même nombre que le quotient que l'on cherche, & qui eſt inconnu.

C'eſt pourquoi la regle générale pour extraire la racine quelconque d'une puiſſance donnée, eſt de chercher un nombre tel, qu'étant multiplié par lui-même autant de fois, moins une, qu'il y a d'unités dans l'expoſant de la puiſſance propoſée, ou de la racine cherchée, il devienne égal à cette puiſſance, ou du moins en approche le plus près qu'il ſoit poſſible.

Nous donnerons dans la ſuite des regles & des méthodes pour trouver les puiſſances, & extraire les racines des nombres & des quantités quelconques.

*Corollaire IV.*

80. Il s'enſuit que l'exaltation & l'extraction ſont des opérations oppoſées, & qui ſe ſervent mutuellement de preuve; car ſi l'on veut s'aſſurer, *par ex:* que 3 eſt la racine quarrée de 9, il n'y a qu'à faire voir que 9 eſt le quarré de 3; car, puiſque $3 \times 3 = 9$, il ſuit que $\frac{9}{3} = 3$.

## ARTICLE II.

*Des opérations ſur les Fractions.*

1°. L'*Unité* eſt un tout diviſible en pluſieurs parties, mais regardé comme ſimple & non encore di-

viſé. Le *nombre entier* eſt un aſſemblage de pluſieurs unités de même eſpece ; la *fraction* eſt ou une partie de l'unité, comme $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, &c. ou un aſſemblage de parties d'une même unité, comme $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, &c. En effet, ſi l'on ſuppoſe l'unité diviſée en trois parties égales, la fraction $\frac{2}{3}$ eſt un aſſemblage de deux de ces parties ; ſi l'on ſuppoſe l'unité diviſée en quatre parties égales, la fraction $\frac{3}{4}$ ſera l'aſſemblage de trois de ces parties.

II°. Les fractions peuvent être conſidérées ou en général, ou dans leurs différentes eſpéces ; on appelle fraction en général toute quantité qui eſt partie de l'unité & eſt repréſentée ſous l'expreſſion de *fraction* ; c'eſt-à-dire, par un nombre compoſé d'un numérateur & d'un dénominateur. Les différentes eſpéces de fractions ſont les parties de différentes unités, comme du cercle, de la toiſe, de l'heure, &c. ſoit qu'elles ſoient repréſentées ſous l'expreſſion de *fractions*, ou ſous celle d'*entiers*.

## PARAGRAPHE I.

### *Des Fractions conſidérées en général.*

I°. La *fraction* & la *diviſion* ſont deux points de vue différens qui appartiennent à une même quantité. La *diviſion* eſt une opération que l'on peut effectuer ; la *fraction* eſt une diviſion ſeulement indiquée : ce que l'on appelle *dividende* & *diviſeur* dans une diviſion, s'appelle *numérateur* & *dénominateur* dans la fraction.

II°. Comme la diviſion donne un réſultat que l'on appelle *quotient*, de même la fraction donne un réſultat que l'on appelle *valeur* ou *expoſant* de la fraction. Dans la diviſion on trouve le *quotient* en diviſant le dividende par le diviſeur, ce qui eſt toujours poſſible, parce que le dividende eſt plus grand que le diviſeur ; de même dans la fraction on trouve

la *valeur* en diviſant le numérateur par le dénominateur, lorſque la diviſion eſt poſſible; mais lorſque la diviſion n'eſt pas poſſible, comme il arrive dans toute fraction proprement dite, où le numérateur eſt toujours plus petit que le dénominateur, on trouve alors la *valeur*, ou l'expoſant de la fraction, en réduiſant la fraction à ſes plus ſimples termes, comme nous le dirons ci-après.

III°. Les fractions conſidérées en général ſont ſuſceptibles de toutes les opérations que l'on fait ſur les nombres entiers. Mais pour pouvoir être aſſujetties au calcul, elles ont quelquefois beſoin d'être préparées par des opérations qui leur ſont propres, & que l'on appelle par cette raiſon préliminaires.

*Des opérations préliminaires ſur les Fractions.*

Les opérations préliminaires ſur les fractions ſont différens changemens qu'on leur fait ſubir, ſans en changer la valeur, pour en rendre le calcul & la comparaiſon plus facile & plus commode; ces opérations s'appellent *tranſformations*.

PRINCIPE I.

81. La valeur d'une fraction ne change pas, ſoit qu'on multiplie, ſoit qu'on diviſe ſes deux termes par une même troiſiéme quantité: ſi vous multipliez, *par ex.*: les deux termes de la fraction $\frac{1}{2}$ par 3, vous aurez la fraction $\frac{3}{6}$, qui eſt la même choſe que $\frac{1}{2}$: pareillement, ſi vous diviſez les deux termes de la fraction $\frac{3}{6}$ par 3, vous aurez la fraction $\frac{1}{2}$, qui eſt la même choſe que $\frac{3}{6}$.

PRINCIPE II.

82. Une fraction eſt d'autant plus grande ou plus petite, qu'elle approche plus ou moins de l'unité, ou qu'elle contient plus ou moins de parties de l'unité dont elle eſt fraction.

*Corollaire.*

83. D'où il ſuit que, lorſque deux fractions ont le même dénominateur, la plus grande eſt celle dont le numérateur eſt plus grand, parce qu'elle contient plus de parties de l'unité, *par ex* : $\frac{3}{5} > \frac{2}{5}$; & lorſqu'elles ont le même numérateur, la plus grande eſt celle dont le dénominateur eſt plus petit; *par ex* : $\frac{4}{5} > \frac{4}{7}$; en effet plus le dénominateur eſt petit, le numérateur reſtant le même, plus il eſt contenu ou approche d'être contenu dans le numérateur, & par conſéquent la fraction approche plus d'être égale à l'unité.

*REGLE I.*

La premiere eſpéce de transformation ſe fait par le changement, ou d'une fraction en une autre fraction, ou d'un entier en fraction, ou d'une fraction en entier.

84. *Premier Cas.* On peut transformer une fraction en une autre fraction.

I°. En multipliant par une même quantité le numérateur & le dénominateur de la fraction; *par ex* : au lieu de la fraction $\frac{1}{2}$, on peut avoir, en ſe ſervant du multiplicateur 2, les fractions $\frac{2}{4}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{8}{16}$, $\frac{16}{32}$, &c. leſquelles ont différentes expreſſions; mais conſervent la même valeur (81).

II°. En diviſant par une même quantité le numérateur & le dénominateur de la fraction, lorſque cette diviſion ſe peut faire ſans reſte, *par ex* : au lieu de la fraction $\frac{16}{32}$, on peut avoir, en ſe ſervant du diviſeur 2, les fractions $\frac{8}{16}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{1}{2}$. Cette opération réduit la fraction à une expreſſion plus ſimple, & par cette raiſon s'appelle *réduction* des fractions *à de plus ſimples termes*.

85. *Second Cas.* On transforme un entier en fraction en multipliant & diviſant l'entier par le déno-

minateur que l'on veut donner à la fraction ; *par ex* : on aura $2 = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \frac{16}{8}$, &c. Or l'entier ſous ces différentes expreſſions conſerve toujours la même valeur ; parce qu'étant multiplié & diviſé par une même quantité, la diviſion détruit ce qu'avoit fait la multiplication, & réciproquement.

86. *Troiſiéme Cas.* On transforme une fraction en entier, en diviſant le numérateur par le dénominateur, lorſque la diviſion eſt poſſible ; $\frac{8}{4} = 2$.

*Corollaire.*

87. On peut réduire tout d'un coup une fraction à ſes plus *ſimples termes*, ou à la plus ſimple expreſſion qu'il ſoit poſſible, en diviſant le numérateur & le dénominateur de la fraction par leur plus grand commun diviſeur ; *par ex* : diviſant les deux termes de la fraction $\frac{4}{8}$ par leur plus grand commun diviſeur qui eſt 4, elle deviendra $\frac{1}{2}$. Or une fraction ainſi réduite eſt la *valeur* ou l'*expoſant* de la fraction qui étoit à réduire. Si le numérateur & le dénominateur n'avoient pas de plus grand commun diviſeur que l'unité, dans ce cas la fraction n'auroit pas de valeur diſtinguée d'elle-même, & alors ces ſortes de fractions s'appellent fractions *premieres*, ou *irréductibles*, & elles ſont dans l'ordre des fractions, ce que les nombres *premiers* ſont dans l'ordre des *nombres entiers*.

*Regle II.*

La ſeconde eſpéce de transformation ſe fait en réduiſant les fractions, ſoit à un dénominateur commun, ſoit à un dénominateur quelconque.

88. *Premier Cas.* La réduction des fractions à un dénominateur commun ſe fait, en multipliant les termes de chaque fraction par le dénominateur de l'autre fraction, s'il n'y a que deux fractions ; ou par le produit des dénominateurs des autres frac-

tions, s'il y en a pluſieurs ; *par ex*: les fractions $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$ ſe réduiſent à $\frac{1\times4}{3\times4} = \frac{4}{12}$, & $\frac{1\times3}{4\times3} = \frac{3}{12}$.

Le but & l'uſage de cette réduction eſt de transformer les fractions en des quantités homogênes ou de même eſpece, pour les rendre ſuſceptibles de comparaiſon & de calcul. Car lorſque des fractions ont un même dénominateur elles ſont entr'elles comme leurs numérateurs ; & l'on peut ainſi ſupprimer leur dénominateur commun, en le ſous-entendant, & opérer ſur ces fractions de la même maniere que ſur les entiers.

89. *Second Cas.* On réduit une fraction ; *par ex* : $\frac{1}{2}$, à un dénominateur quelconque, tel que 4 ; 1°. en multipliant les termes de la fraction par le dénominateur donné 4, ce qui donne $\frac{4}{8}$ ; 2°. en diviſant enſuite les deux termes de la fraction nouvelle par le dénominateur 2 de la premiere fraction, ce qui donnera la fraction réduite $\frac{2}{4}$, dont le dénominateur eſt devenu 4 ; parce qu'ayant multiplié 2 par 4, & diviſé le produit 8 par 2, il doit néceſſairement réſulter 4 ; car un produit diviſé par un des deux facteurs qui le compoſent, doit néceſſairement donner l'autre facteur au quotient.

Cette réduction s'appelle *évaluation*, & ſert à évaluer les fractions en parties connues ; *par ex*: les fractions ou parties de livres en ſols, ou en parties *vingtiémes*, qui ſont des parties connues ; car le ſol eſt la $\frac{1}{20}$ partie de la livre. C'eſt pourquoi étant donné ; *par ex*: les $\frac{3}{4}$ d'une livre, ſi je veux ſçavoir combien cette fraction vaut de ſols, ou de parties vingtiémes de la livre, je n'ai qu'à réduire la fraction $\frac{3}{4}$ au dénominateur 20 ſuivant la regle preſcrite ci-deſſus, & j'aurai la fraction réduite $\frac{15}{20}$ qui ſignifie quinze vingtiémes parties de la livre, ou quinze ſols.

*Corollaire.*

90. De deux fractions dans leſquelles la différence

du numérateur au dénominateur eſt la même ; la plus grande eſt celle qui eſt exprimée par de plus grands nombres ; *par ex* : l'on a $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$. Car réduiſant au même dénominateur, on aura $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$, & $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$ ; or $\frac{8}{12} < \frac{9}{12}$.

*Du Calcul des Fractions.*

Le calcul des fractions conſiſte dans les opérations ordinaires d'addition & de ſouſtraction, de multiplication & de diviſion ; d'exaltation, &c.

*Regle I.*

91. L'addition & la ſouſtraction des fractions ne ſouffrent aucune difficulté, lorſqu'elles ont le même dénominateur ; il eſt évident que $\frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3+2}{7} = \frac{5}{7}$ ; que $\frac{5}{8} - \frac{2}{8} = \frac{5-2}{8} = \frac{3}{8}$ ; c'eſt-à-dire, que l'on trouve la ſomme ou la différence des fractions qui ſont de même dénomination, en prenant la ſomme ou la différence des numérateurs.

Mais lorſque les fractions ſont de différente dénomination ; 1°. on doit les réduire à un même dénominateur ; 2°. il faut prendre la ſomme ou la différence des numérateurs des fractions réduites : *par ex* : $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{10}{15} + \frac{12}{15} = \frac{10+12}{15} = \frac{22}{15}$.

*Regle II.*

92. La multiplication des fractions conſiſte à multiplier ou une fraction par une fraction, ou une fraction par un entier, ou un entier par une fraction.

I°. La multiplication d'une fraction par une autre fraction ſe fait *en multipliant les numérateurs par les numérateurs, & les dénominateurs par les dénominateurs ; par ex* : $\frac{9}{3} \times \frac{4}{2} = \frac{9\times4}{3\times2} = \frac{36}{6} = 6$, car $\frac{9}{3} = 3$ & $\frac{4}{2} = 2$ ; or $3 \times 2 = 6$ : pareillement on aura $\frac{1}{9} \times \frac{2}{4} = \frac{1\times2}{9\times4} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ ; car $\frac{1}{9} = \frac{1}{3}$, & $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ; or $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ par la raiſon contraire à ce que $3 \times 2 = 6$.

II°. Lorſqu'on multiplie une fraction par un en-

tier ; *par ex* : $\frac{2}{7}$ par 3 , l'entier peut être regardé comme une fraction qui a pour dénominateur l'unité (85) ; ainſi l'on aura , en ſuivant le principe ci-deſſus , $\frac{2}{7} \times 3 = \frac{2}{7} \times \frac{3}{1} = \frac{2 \times 3}{7 \times 1} = \frac{6}{7}$ : c'eſt-à-dire , que pour avoir le produit d'une fraction par un entier , il n'y a qu'à *multiplier le numérateur de la fraction par l'entier donné.*

III°. Si l'on multiplie un entier par une fraction , *par ex* : 3 par $\frac{2}{7}$, il eſt évident par ce qui vient d'être dit, que l'on aura $3 \times \frac{2}{7} = \frac{3}{1} \times \frac{2}{7} = \frac{3 \times 2}{1 \times 7} = \frac{6}{7}$ : c'eſt-à-dire , qu'il faut *multiplier l'entier par le numérateur de la fraction , & conſerver le même dénominateur.*

### *Corollaire I.*

93. Lorſqu'on multiplie deux fractions l'une par l'autre, la fraction qui réſulte du produit donne l'évaluation de ce que l'on appelle *fraction* de *fraction.* On appelle *fraction de fraction*, une fraction qui eſt partie d'une autre fraction , ainſi que la fraction eſt elle-même partie de l'unité ; tel eſt le $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{3}$ ou la moitié d'un tiers. Or quand on multiplie une fraction par une autre fraction ; *par ex* : $\frac{1}{2}$ par un $\frac{1}{3}$, on cherche réellement ce que vaut une fraction de fraction , ou ce que vaut dans cet exemple la moitié d'un tiers ; de même que lorſqu'on multiplie 2 par 3 , on cherche le double de trois : l'on trouvera donc que la moitié d'un tiers eſt $\frac{1}{6}$, en prenant le produit des deux fractions $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, tout comme le double de 3 ſe trouve être 6, en faiſant $2 \times 3 = 6$.

Il ſuit donc évidemment que pour évaluer une *fraction de fraction*, il n'y a qu'à les multiplier l'une par l'autre : ainſi le $\frac{1}{5}$ de $\frac{1}{3}$ ſera $\frac{1}{15}$. Si l'on avoit une ſuite de fractions de fractions , *par ex* : le $\frac{1}{3}$ du $\frac{2}{4}$ de $\frac{1}{5}$, pour évaluer , il faudroit les multiplier toutes les unes par les autres, ce qui donneroit $\frac{1}{60}$.

*Corollaire II.*

94. Si le numérateur d'une fraction eſt plus grand que l'unité, la fraction pourra toujours être décompoſée en deux facteurs, dont l'un ſera un nombre entier, & l'autre une fraction; *par ex*: $\frac{2}{3}$, ou $\frac{2\times1}{3}$ ſera la même choſe que $\frac{1}{3}\times 2$, ou $\frac{1}{3}\times 2$; comme on le voit évidemment après ce qui a été dit (92). D'où il ſuit que ce ſera la même choſe de prendre les deux tiers d'un tout ſimple, ou le tiers d'un tout double; *par ex*: les deux tiers d'un écu, ou le tiers de deux écus, de même que pour avoir le produit $2\times 3 = 6$, c'eſt la même choſe de prendre le double de 3, ou le triple de 2.

*REGLE III.*

95. La diviſion des fractions conſiſte à diviſer ou une fraction par une fraction, ou une fraction par un entier, ou un entier par une fraction.

I°. La diviſion d'une fraction par une autre fraction ſe fait *en multipliant le numérateur de la premiere fraction par le dénominateur de la ſeconde, & le dénominateur de la premiere par le numérateur de la ſeconde*; & on l'indique par cette marque X, que l'on interpoſe entre la fraction dividende & la fraction qui ſert de diviſeur, (ce qui s'appelle multiplier en *croix*, ou en *ſautoir*) *par ex*: $\frac{12}{2}$ diviſé par $\frac{6}{3}$, ou $\frac{12}{2}$ X $\frac{6}{3}$ donnera pour quotient $\frac{12\times3}{2\times6} = \frac{36}{12} = 3$. car $\frac{12}{2} = 6$, & $\frac{6}{3} = 2$: or $\frac{6}{2} = 3$. Pareillement $\frac{2}{12}$ diviſé par $\frac{3}{6}$, ou $\frac{2}{12}$ X $\frac{3}{6}$ donnera pour quotient $\frac{2\times6}{12\times3} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$. car $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$, & $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; or $\frac{1}{6}$ X $\frac{1}{2} = \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$, par la raiſon contraire à ce que $\frac{6}{2} = 3$.

II°. Si l'on veut diviſer une fraction par un entier, l'entier peut être regardé comme une fraction qui a pour dénominateur l'unité (85); ainſi en ſuivant le principe ci-deſſus, $\frac{4}{7}$ diviſé par 3 ſera $\frac{4}{7}$ X $\frac{3}{1} = \frac{4}{7}\times\frac{1}{3} = \frac{4\times1}{7\times3} = \frac{4}{21}$; c'eſt-à-dire, que pour diviſer une

une fraction par un entier, il n'y a qu'à *multiplier le dénominateur de la fraction par l'entier.*

III°. Si l'on diviſe un entier par une fraction, il eſt évident par ce qui vient d'être dit, que, *par ex :* 4 diviſé par $\frac{1}{3}$ ſera $\frac{4}{1} \times \frac{3}{1} = \frac{4}{1} \times \frac{1}{3} = \frac{4 \times 3}{1 \times 3} = \frac{12}{3}$ ; c'eſt-à-dire, qu'on doit *multiplier l'entier par le dénominateur de la fraction, & le diviſer par le numérateur.*

## *Regle IV.*

96. L'exaltation d'une fraction à une puiſſance quelconque ſe fait, en élevant le numérateur & le dénominateur, chacun à la puiſſance propoſée ; *par ex :* le quarré de $\frac{2}{3}$ eſt $\frac{4}{9}$ ; car le quarré de $\frac{2}{3}$ eſt $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2 \times 2}{3 \times 3} = \frac{4}{9}$ (92) : pareillement le cube de $\frac{2}{3}$ eſt $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$.

L'extraction des fractions ſe fait, en prenant la racine, tant du numérateur que du dénominateur ; *par ex :* $\frac{2}{3}$ eſt la racine quarrée de $\frac{4}{9}$, & la racine cubique de $\frac{8}{27}$.

### *Corollaire.*

97. Les fractions décroiſſent dans l'exaltation, & croiſſent dans l'extraction ; c'eſt-à-dire, que dans les fractions la racine eſt plus grande que la puiſſance, au lieu que dans les nombres entiers la puiſſance eſt plus grande que la racine ; *par ex :* la fraction $\frac{1}{2}$ eſt plus grande que ſon quarré $\frac{1}{4}$, que ſon cube $\frac{1}{8}$, &c. comme il eſt évident.

D'où l'on conclud qu'un nombre entier ne peut avoir pour racine une fraction : car une fraction racine eſt toujours plus grande que ſa puiſſance ; or dans les nombres entiers la puiſſance au contraire eſt toujours plus grande que la racine.

## Nombre II.

### *Des Fractions conſidérées dans leurs eſpeces.*

98. On eſt obligé d'employer dans l'uſage ordinaire différentes ſortes de meſures qui ſe diviſent

& ſe ſoudiviſent, chacune en parties de différens noms, d'où réſultent des fractions de différente eſpece; telles ſont, *par ex :*

Le cercle qui ſe diviſe en 360 parties égales, qu'on appelle *degrés ;* le degré ſe diviſe en 60 *minutes ;* chaque minute en 60 *ſecondes ;* chaque ſeconde en, &c.

Le tems qui ſe diviſe en *jours ;* chaque jour ſe diviſe en 24 parties égales, qu'on appelle *heures ;* chaque heure en 60 *minutes ;* chaque minute en 60 *ſecondes*, &c.

La diſtance qui ſe meſure par des *toiſes ;* la toiſe contient 6 *pieds ;* le pied ſe diviſe en 12 *pouces ;* le pouce en douze *lignes*, &c.

La monnoie qui ſe diviſe en *livres ;* la livre contient 20 *ſols ;* le ſol 12 *deniers.*

Le poids qui s'exprime par des *livres ;* la livre contient 16 *onces ;* l'once 8 *gros ;* le gros 72 *grains.* Il en eſt de même de toutes les autres meſures. Or

I°. Les parties de ces meſures ſont autant d'eſpéces de fractions, qui ſe rencontrent ſouvent dans le calcul : car le cercle, *par ex :* étant diviſé en 360 *degrés*, un degré, deux degrés, trois degrés, &c. ſont $\frac{1}{360}$, $\frac{2}{360}$, $\frac{3}{360}$, &c. parties, où ſont des fractions d'un cercle : le degré étant diviſé en 60 *minutes*, une minute, deux minutes, &c. ſont $\frac{1}{60}$, $\frac{2}{60}$ parties, où ſont des fractions d'un degré : la monnoie étant diviſée en *livres*, la livre en 20 *ſols*, le ſol en 12 *deniers ;* un ſol, deux ſols, trois ſols, &c. ſont $\frac{1}{20}$, $\frac{2}{20}$, &c. parties, où ſont des fractions de la livre ; & un denier, quatre deniers, &c. ſont, $\frac{1}{12}$, $\frac{4}{12}$ parties, où ſont des fractions d'un ſol ; & ainſi du reſte.

II°. D'où il ſuit que les parties d'une meſure quelconque, qui auront un même nom, ou ſeront de même dénomination, ſeront des fractions qui auront un même dénominateur : or ce dénominateur

étant commun, peut par conſéquent être ſous-entendu dans la pratique. C'eſt pourquoi on exprime ces parties ou fractions par des nombres entiers ; ainſi au lieu de dire $\frac{1}{20}$, $\frac{2}{20}$ de livres, on dir 1 *ſol*, 2 *ſols* ; au lieu de dire $\frac{1}{12}$, $\frac{5}{12}$, de ſols, on dit 2 *deniers*, 5 *deniers* ; & ainſi du reſte.

III°. Or ces fractions s'exprimant de la même maniere que les nombres entiers dans la pratique ; leur calcul ſouffre par cette raiſon quelque difficulté, lorſqu'on combine des fractions de différente dénomination ſoit entr'elles, ſoit avec des entiers ; & ce ſont ces fractions de différente dénomination qui étant exprimées de la même maniere que les entiers donnent les nombres que l'on appelle *complexes*.

## PROBLÊME I.

99. *Ajouter enſemble des nombres complexes ; c'eſt-à-dire, des Fractions de différente dénomination*, par ex : *des Livres, des Sols & des Deniers.*

SOLUTION. 1°. Il faut diſpoſer ces fractions en colonne, chacune ſelon leur dénomination ; c'eſt-à-dire, les deniers ſous les deniers, les ſols ſous les ſols, les livres ſous les livres. 2°. Il faut prendre la ſomme de chaque colonne, allant de droite à gauche, & diviſer cette ſomme par le dénominateur commun. 3°. S'il y a un reſte, il faut écrire ce reſte ſous la colonne, & garder le quotient pour l'ajouter à la colonne ſuivante.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 325 | liv. | 17 | ſols | 4 | den. |
| | 15 | | 11 | | 6 | |
| | 25 | | 15 | | 9 | |
| Somme, | 367 | | 4 | | 7 | |

## PROBLÊME II.°

100. *Faire la Souſtraction des Quantités ou Nombres complexes.*

SOLUTION. I°. Il faut écrire la quantité que l'on veut ſouſtraire au-deſſous de celle dont on veut ſouſtraire, de façon que les parties de même dénomination ſe trouvent les unes ſous les autres ; les deniers ſous les deniers, les ſols ſous les ſols, &c.

II°. A chaque colonne il faut ſouſtraire le nombre inférieur du nombre ſupérieur à l'ordinaire, & écrire le reſte ou la différence ſous la colonne.

III°. Lorſque le nombre inférieur eſt plus grand que le nombre ſupérieur, il faut emprunter unité de la colonne précédente pour l'ajouter à ce nombre ſupérieur trop petit, (laquelle unité eſt toujours égale au dénominateur de ce nombre ſupérieur) *par ex:* ſi de 8 deniers il faut retrancher 9 deniers, il faudra emprunter ſur la colonne des ſols une unité, c'eſt-à-dire, un ſol que l'on évalue à 12, qui eſt le dénominateur commun des deniers, & qui doit être ajoûté à 8 deniers, ce qui fait 20, dont retranchant 9, il reſte 11 deniers, que l'on écrit ſous la colonne des deniers.

IV°. Il faudra diminuer d'une unité le nombre dont on aura emprunté, ou bien augmenter le nombre qui lui eſt inférieur, de cette unité.

| | 655 liv. | 3 ſols | 4 den. |
|---|---|---|---|
| | 30 | 4 | 6 |
| Reſte, | 624 | 18 | 10 |

## PROBLÊME III.

101. *Faire la Multiplication des Nombres complexes.*

SOLUTION. I°. Le principe d'où dépend cette opération, eſt que le produit contient toujours le

multiplicande autant de fois que le multiplicateur contient l'unité. Or cette unité doit être bien conſidérée & déterminée dans l'opération.

II°. Qu'on propoſe cet exemple, ſçavoir, combien doit couter un ouvrage de 4 toiſes, 5 pieds, 8 pouces, à 3 livres, 2 ſols, 4 deniers la toiſe. Pour réſoudre la queſtion, il faut multiplier 4 toiſes 5 pieds 8 pouces, par 3 liv. 2 ſols 4 den. Or il eſt clair que l'unité que l'on doit conſidérer dans le multiplicande, eſt la toiſe; car c'eſt la toiſe, & non le pied, ou le pouce, qui eſt ſuppoſée couter 3 livres 2 ſols 4 deniers. Maintenant pour faire cette opération, il faut réduire les termes, tant du multiplicande que du multiplicateur, à leurs plus petites eſpéces; c'eſt-à-dire, il faut tout réduire en deniers, s'il s'agit de livres, ſols & deniers; il faut tout réduire en pouces, s'il s'agit de toiſes, pieds & pouces: on aura donc dans l'exemple précédent pour multiplicande & pour multiplicateur.

356 pouces,
748 deniers.

III°. Il faut multiplier l'un par l'autre, le multiplicande & le multiplicateur ainſi réduits: & l'on aura un produit exprimé en la plus petite eſpéce du multiplicateur, ſçavoir, en deniers; ce produit ſera 266288 deniers.

IV°. Il faudra diviſer le produit trouvé par le nombre de fois que la plus petite eſpéce du multiplicande eſt contenue dans la plus grande; c'eſt-à-dire, dans l'exemple précédent par le nombre 72, qui exprime combien de fois le pouce eſt contenu dans la toiſe, & l'on aura le quotient 3698, avec le reſte $\frac{32}{72}$, que l'on peut négliger, parce qu'il ne vaut pas un denier.

V°. Comme le produit ainſi diviſé eſt exprimé en deniers, il faut le réduire en ſols, puis en livres, ce qui ſe fait en diviſant la ſomme des deniers par

le nombre de fois que le denier eſt contenu dans le ſol, & la ſomme des ſols par le nombre de fois que le ſol eſt contenu dans la livre.

Démonstration. La raiſon de toutes ces opérations eſt claire ; il ne peut y avoir de difficulté que pour le quatriéme article, & dont voici la raiſon. Puiſque l'unité que l'on conſidere dans le multiplicande eſt la toiſe, il s'enſuit que le nombre 356, qui exprime des pouces, n'exprime que des parties ou fractions de l'unité, ſçavoir, de la toiſe : donc le multiplicande 356, ſelon ſon expreſſion naturelle, doit être $\frac{356}{72}$ : or $\frac{356}{72} \times 748 = \frac{266288}{72} = 3698$ ; donc, &c.

## Problême IV.

102. *Faire la diviſion des Nombres complexes.*

Solution. I°. Le principe de cette opération eſt que le quotient eſt toujours contenu dans le dividende, autant de fois que l'unité eſt contenue dans le diviſeur (49) ; d'où il ſuit que lorſque le diviſeur eſt plus grand, ou égal, ou plus petit que l'unité, alors le quotient eſt plus petit, ou égal, ou plus grand que le dividende.

II°. Qu'on propoſe cet exemple, 7 marcs & 2 onces d'argent ayant couté 346 livres 18 ſols 6 deniers, à combien revient le marc ? Pour réſoudre la queſtion, il faut diviſer 346 livres 18 ſols 6 den. par 7 marcs & 2 onces. Or il eſt évident que l'unité que l'on doit conſidérer dans le diviſeur, eſt le marc ; car c'eſt le prix du marc & non de l'once, ou de &c. que l'on cherche. Cela poſé, il faut réduire le diviſeur à la plus petite eſpece qu'il contient, c'eſt-à-dire, en onces ; & commençant la diviſion par les plus grandes eſpéces du dividende, on aura le quotient 5 livres, 19 ſols, 7 deniers.

| liv. | sols | den. | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 346 | 18 | 6 | } | 58 onces. | | |
| | | | | liv. | sols | den. |
| | | | | 5 | 19 | 7 |

avec le reste $\frac{12}{58}$, que l'on peut négliger, parce qu'il ne vaut pas un denier.

III°. Il faut multiplier le quotient par le nombre qui exprime combien de fois la plus petite espéce du diviseur est contenue dans la plus grande, & le produit qui en résultera, sera le véritable quotient.

Démonstration. La raison de ces opérations ne peut souffrir aucune difficulté, si ce n'est par rapport au troisiéme article, & dont voici la raison : si j'ai à diviser, *par ex :* 3 livres 12 sols par un marc & 4 onces ; ou, (réduisant le dividende & le diviseur à leurs plus petites espéces) si j'ai à diviser 72 sols par 12 onces ; il est clair que le quotient 6 qui en résulte, doit être multiplié par 8, (lequel nombre exprime combien de fois l'once est contenue dans le marc) pour avoir le résultat 48 sols, lequel exprimera le prix du marc. Car puisque l'unité que l'on considere dans le diviseur est le marc ; il s'ensuit que le diviseur 12 n'exprime que des parties ou fractions de cette unité : donc le diviseur, selon son expression naturelle, doit être $\frac{12}{8}$ ; or (95) 72 divisé par $\frac{12}{8} = \frac{72 \times 8}{12} = \frac{576}{12} = 48$ : donc, &c.

*Corollaire.*

103. Il suit de ce que nous avons dit, qu'autre chose est le résultat de deux mesures simples multipliées ou divisées l'une par l'autre ; autre chose est le résultat des parties de ces mêmes mesures multipliées ou divisées les unes par les autres. Car, *par ex :* 1 sol multiplié par 1 sol ne donne au produit que 1 sol, $1 \times 1 = 1$ ; mais 12 deniers qui valent 1 sol, étant multipliés par 12 deniers donnent

un plus grand produit ; car 12 × 12 = 144 deniers, qui valent plus d'un ſol.

La raiſon eſt que dans le premier cas l'unité que l'on conſidere, eſt le *ſol*, & qu'elle eſt dans le ſecond cas le *denier* : mais ſi dans le ſecond cas on veut prendre pour unité *le ſol* ; alors les 12 *deniers* multipliés par les 12 *deniers*, ſeront des fractions multipliées par des fractions, & donneront $\frac{12}{12} \times \frac{12}{12} = \frac{144}{144} = 1$, & alors les deux cas retombent dans le même, & ce ſera une même choſe de multiplier 1 *ſol* par 1 *ſol*, ou de multiplier 12 *deniers* par 12 *deniers*.

### *REMARQUE.*

104. Lorſqu'après avoir diviſé une eſpéce du dividende, il ſe trouve un reſte ; il faut réduire ce reſte aux petites eſpéces que contient immédiatement le dividende, & diviſer ce reſte ainſi réduit par le diviſeur. Dans l'exemple ci-deſſus après avoir diviſé 346 livres par 58 onces, on trouve le reſte 56 livres, lequel ne pouvant être diviſé par 58, doit être réduit en *ſols*, auxquels ajoutant les 18 *ſols* du dividende, il vient 1138 *ſols*, qu'il faut diviſer par le diviſeur ; & ainſi du reſte.

## CHAPITRE II.

### *Du Calcul des Lettres, ou d'Algébre.*

### *HYPOTHESE.*

105. SI je voulois combiner les grandeurs 3 & 4 pour en avoir la ſomme 3 + 4 = 7, il eſt clair,

1°. Qu'il m'eſt permis de repréſenter les grandeurs 3, 4, 7, par tels autres ſignes, ou caracteres

qu'il me plaira, différens des chiffres *par ex* : par les lettres $a$, $b$, $c$, & qu'en ce cas la ſomme $3+4=7$ ſera repréſentée ſous un autre expreſſion, ſçavoir, $a+b=c$.

II°. Que les lettres $a$, $b$, $c$, pourroient auſſi bien repréſenter les quantités 5, 7, 12, que les quantités 3, 4, 7, & par conſéquent que l'expreſſion $a+b=c$ peut indifféremment repréſenter, ſoit la ſomme $3+4=7$, ſoit la ſomme $5+7=12$; ſoit telle autre ſomme que l'on voudra.

Il eſt évident que ces ſuppoſitions ſont poſſibles, & qu'elles ſont fondées ſur ce que les lettres $a$, $b$, $c$, $d$, &c. n'ayant aucune valeur, & ne ſignifiant rien par elles-mêmes, je puis leur donner telle valeur, & telle ſignification que je voudrai.

## *DÉFINITIONS.*

### I.

106. Les grandeurs qui ſont repréſentées par les lettres de l'alphabet, ou par tel autre ſigne de cette nature, s'appellent *Grandeurs indéterminées* : les lettres de l'alphabet qui repréſentent ces grandeurs, & qui en ſont comme le ſymbole & l'expreſſion, s'appellent *Quantités algébriques* ; & le calcul qui opere ſur les grandeurs ainſi exprimées, s'appelle *Algébre*, ou *Calcul Algébrique.*

### II.

107. L'Algébre eſt donc un calcul qui a pour objet les grandeurs indéterminées. Pour repréſenter les grandeurs indéterminées, il étoit libre de ſe ſervir de tels ſignes que l'on eût voulu : mais on a trouvé qu'il étoit plus commode de ſe ſervir des lettres de l'alphabet, $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$, &c. Lorſque les grandeurs ſur leſquelles on opere, ſont connues, on les

repréſente par les premieres lettres $a$, $b$, $c$, $d$, &c. Lorſqu'elles ſont inconnues, on les repréſente par les dernieres lettres $x$, $y$, $z$.

## III.

108. Les lettres de l'alphabet combinées les unes avec les autres par le moyen des ſignes $+$ & $-$, & d'autres dont nous allons parler, donnent en Algébre des *Termes*, des *Sommes*, des *Différences*, des *Produits*, des *Quotiens*, de même que les nombres en Arithmétique.

## IV.

109. On appelle Terme algébrique une lettre, ou même pluſieurs lettres jointes enſemble, mais ſans interpoſition des ſignes $+$ ou $-$; *par ex* : $a$, $b$, $ab$, $abc$, &c. ſont des termes algébriques. On appelle Termes *poſitifs* ceux qui ſont précédés du ſigne $+$, & Termes *négatifs* ceux qui ſont précédés du ſigne $-$. Dans la quantité $a+ab-abc-bc+acd$, il y a trois termes poſitifs, & deux termes négatifs.

Lorſqu'un terme n'eſt précédé d'aucun ſigne, alors il eſt cenſé avoir le ſigne $+$.

## V.

110. On appelle Quantités ſimples ou incomplexes celles qui n'ont qu'un terme, & Quantités complexes, celles qui ont pluſieurs termes, comme $ab-bc$; $a-b+abc$; &c. La quantité ſimple s'appelle autrement *Monôme*, la quantité complexe s'appelle ou *Binôme*, ou *Trinôme*, ou *Quadrinôme*, &c. ſuivant qu'elle eſt compoſée ou de deux, ou de trois, ou de quatre termes, &c. En général on appelle *Polynôme* une quantité compoſée de pluſieurs termes.

## VI.

111. On appelle Termes *ſemblables*, ceux dans leſquels toutes les lettres de l'un ſe trouvent préciſément dans l'autre, ou dans les autres, & écrites chacune un même nombre de fois; *par ex*: dans la quantité $ab - ab + 3ab + abcd + 2bc$, les trois premiers termes ſont ſemblables.

### *Remarque I.*

112. Obſervez que les termes négatifs ſont appellés tels, non parce que ce ſeroient de pures négations, ou des zero; mais parce qu'ils ont des fonctions oppoſées à celle des termes poſitifs: la fonction de ceux-ci conſiſtant à être ajoutés, celle de ceux-là à être retranchés, ce qui eſt repréſenté par les ſignes contraires + & —.

En effet *par ex*: ſi l'on imprime à un même corps 12 degrés de viteſſe vers l'orient, & 8 degrés vers l'occident, la viteſſe vers l'orient étant exprimée par + 12, la viteſſe vers l'occident, étant en ſens oppoſé, ſera par conſéquent — 8, ce qui donnera + 12 — 8 = + 4 degrés de viteſſe vers l'orient; ſi la premiere étant + 12, la ſeconde eût été — 12, on auroit eu + 12 — 12 = 0, c'eſt-à-dire, que la viteſſe eût été nulle, ou que le corps ſeroit reſté en repos: ſi la viteſſe vers l'orient étant + 12, la viteſſe vers l'occident étoit — 18, on auroit + 12 — 18 = — 6 degrés de viteſſe vers l'occident: où il faut remarquer que la quantité négative détruit toujours dans la poſitive une portion égale à elle-même, & réciproquement; d'où il réſulte que le contraſte des quantités poſitives & négatives rend la grandeur quelquefois plus grande, quelquefois égale, quelquefois plus petite que 0, ſelon que les quantités poſitives ſont ou plus grandes, ou égales, ou plus petites que les négatives.

Or les quantités négatives ſervant, comme on le voit, à diminuer les quantités poſitives, ſont par conſéquent des quantités réelles & non des zero : car zero ajouté ou retranché n'augmente ni ne diminue la grandeur, puiſque $3+0=3$, & $3-0=3$ : les ſignes $+$ & $-$ qui affectent les quantités algébriques ne déſignent donc pas des grandeurs de différente nature, mais ſeulement des fonctions oppoſées de ces grandeurs; ainſi le mouvement vers l'occident étant exprimé dans le troiſiéme cas par $-6$ ſera une quantité négative par rapport au mouvement vers l'orient, non parce qu'il n'eſt pas mouvement réel, mais parce qu'il eſt mouvement en ſens oppoſé.

*Remarque II.*

113. Les lettres ne pouvant ſe combiner les unes avec les autres, comme les chiffres; on eſt obligé, pour abréger le diſcours, de ſe ſervir de quelques ſignes, qui ſont :

Le ſigne $+$, ou d'addition, qui ſignifie *plus*, *par ex:* $a+b$, ſignifie *a plus b*, ou que la quantité $b$ eſt ajoutée à la quantité $a$.

Le ſigne $-$, ou de ſouſtraction, qui ſignifie *moins*, *par ex* : $a-b$, ſignifie *a moins b*, ou que $b$ eſt retranché de la quantité $a$.

Le ſigne $\times$, ou de multiplication, qui ſignifie *multipliant*, *par ex* : $a \times b$, ſignifie *a multipliant b*, ou que $b$ eſt multiplié par $a$.

Le ſigne : , ou de diviſion, lequel ſignifie *diviſé par*, $a : b$, ſignifie que $a$ eſt diviſé par $b$ : au lieu de $a : b$, on met auſſi $\frac{a}{b}$.

Le ſigne $=$, ou d'égalité, qui ſignifie *égal à*, *par ex*: $a=b$, ſignifie que $a$ eſt égal à $b$.

Le ſigne $\prec$, qui ſignifie *moindre que*, *par ex* : $a \prec b$, ſignifie que $a$ eſt moindre que $b$.

Le ſigne $\succ$, qui ſignifie *plus grand que*, ainſi $a \succ b$, ſignifie que $a$ eſt plus grand que $b$.

Le ſigne $\infty$, qui ſignifie *infini*, *par ex*: $\infty a$, ſignifie que la quantité $a$ eſt infinie.

Le ſigne radical $\surd$ qui ſignifie la *racine de*, *par ex*: $\surd a$ ſignifie la racine de $a$.

Les lettres de l'alphabet n'ayant par elles-mêmes aucune valeur, il eſt libre de faire ſignifier à ces lettres telles grandeurs ou quantités que l'on voudra; mais il faut obſerver que lorſqu'on a une fois donné à une lettre une valeur ou une ſignification dans une opération, il faut toujours la lui conſerver dans la ſuite de cette opération.

Les quantités algébriques ſont ſuſceptibles des mêmes opérations que les quantités numériques: nous en allons parler.

## ARTICLE I.

### *De l'Addition & de la Souſtraction algébriques.*

#### *REGLE I.*

114. Les Géométres ajoutent les quantités algébriques, en les écrivant à côté les unes des autres, ſans rien changer aux ſignes dont elles ſont affectées. Pour ajouter $+a$ & $+b$, on écrit ſimplement $a+b$; pour ajouter $abc$, $+ab$, $-acd$, on écrit $abc+ab-acd$, & ainſi du reſte.

#### *Corollaire.*

115. Dans l'addition il ſe fait quelquefois une véritable ſouſtraction; *par ex*: quand on ajoute enſemble la quantité poſitive $+ab$, & la négative $-bc$, pour avoir la ſomme $ab-bc$, on ſouſtrait réellement la quantité $bc$ de la quantité $ab$; d'où il ſuit qu'en Algébre c'eſt une même choſe d'*ajouter une quantité négative*, ou *de retrancher une quantité poſitive*.

## *Regle II.*

116. La ſouſtraction algébrique ſe fait en écrivant les quantités algébriques à côté l'une l'autre, & en changeant les ſignes de la quantité que l'on ſouſtrait, les + en —, & les — en +; *par ex*: pour ſouſtraire $+a$ de $+b$, on écrit $b-a$; pour ſouſtraire $-b$ de $+c$, on écrit $c+b$; pour ſouſtraire $ab-cd$ de la quantité $bc+cd$, on écrit $bc+cd-ab+cd$: la raiſon en eſt, que

I°. Lorſqu'on ſouſtrait une quantité poſitive $+b$, d'une grandeur quelconque $+a$, celle-ci eſt diminuée de toute la quantité $b$ que l'on ſouſtrait; on doit donc écrire $a-b$.

II°. Celui qui ſouſtrait une quantité négative $-b$ d'une grandeur quelconque $+a$, augmente cette derniere de toute la quantité $b$; on doit donc écrire $a+b$.

### *Corollaire.*

117. La ſouſtraction algébrique eſt quelquefois une véritable addition; car lorſque la quantité que l'on ſouſtrait eſt négarive, on ajoute réellement une quantité poſitive; *par ex*: ſi de $ab$ on ſouſtrait $-bc$, pour avoir la différence $ab+bc$, on ajoute réellement la quantité $bc$ à la quantité $ab$: d'où il ſuit qu'en algébre c'eſt une même choſe *de ſouſtraire une quantité négative, ou d'ajouter une quantité poſitive.*

### *Corollaire II.*

118. En général c'eſt une même choſe en Algébre de ſouſtraire +, ou de donner —; de ſouſtraire —, ou de donner +.

## *Regle III.*

119. Pour abréger l'expreſſion algébrique, au lieu de $a+a$, on écrit $2a$: car comme dans les

nombres, $4+4$ eſt la même choſe que deux fois 4, ou $2\times 4=8$; de même pour les lettres, $a+a$ eſt la même choſe que deux fois $a$, ou $2\times a=2a$. Par la même raiſon, au lieu de $a+a+a$, on écrit plus briévement $3a$; on aura de même $3a+a=4a$; on a auſſi $4a+3a=7a$; $b+b+b-ac=3b-2ac$, & ainſi des autres.

Ce chiffre qui précéde un terme algébrique, s'appelle *Coefficient*, & ſert à exprimer combien de fois le même terme doit être écrit, ſoit avec le ſigne +, ſoit avec le ſigne —; ou plutôt combien de fois il doit être, ou ajouté, ou retranché. Cette méthode d'abréger les expreſſions algébriques s'appelle *Réduction*, & elle a lieu toutes les fois que les termes ſont ſemblables. De-là :

I°. Il ſuit que $2a+4a$ ſe réduiſent à $6a$; pareillement que $-a-2a-5a$ ſe réduiſent à la quantité $-8a$: c'eſt pourquoi, *lorſque les ſignes des termes ſemblables ſont les mêmes, la réduction ſe fait en ajoutant les coefficiens.*

II°. Mais les termes $+a-a$ ſe détruiſent & deviennent zero, parce qu'une grandeur retranchée d'elle-même, devient nulle; d'où il ſuit que $5a-2a$ ſe réduiſent à $3a$; que $9ab-5ab$ ſe reduiſent à $4ab$; que $-5ac+ac$ deviennent $-4ac$; c'eſt pourquoi, *lorſque les ſignes des termes ſemblables ſont differens, la réduction ſe fait en retranchant le plus petit coefficient du plus grand.*

Remarquez que tout terme qui n'a point de coefficient, eſt toujours cenſé avoir l'unité pour coefficient.

*Corollaire.*

120. La réduction des termes eſt toujours poſſible dans les nombres; *par ex*: $2+3$ ſe réduiſent au ſeul terme 5; $12-8$ ſe réduiſent au ſeul terme 4: mais en Algébre la réduction ne peut avoir lieu que lorſ-

que les termes ſont ſemblables ; $a+b$ ne peuvent pas ſe réduire à un ſeul terme ; pareillement on ne peut pas réduire $a-b$.

D'où il arrive que dans les nombres l'addition & la ſouſtraction peuvent toujours non-ſeulement s'indiquer, mais auſſi s'effectuer ; mais qu'elles ne s'effectuent réellement en Algébre que lorſque les termes ſont ſemblables, comme dans ces exemples $2a+a=3a$; $3b-b=2b$.

*Remarque.*

121. Il eſt à obſerver qu'après l'addition & la ſouſtraction, & généralement après toute opération algébrique, il faut réduire les termes ſemblables, s'il s'en trouve, afin d'abréger l'expreſſion.

## ARTICLE II.

*De la Multiplication & de la Diviſion algébriques.*

### *Regle I.*

122. La multiplication algébrique ſe fait en joignant le multiplicande & le multiplicateur par le ſigne de multiplication : pour multiplier $a$ par $b$, on écrit $a \times b$, ou plus ſimplement $ab$ ; car en Algébre $a \times b$ eſt la même choſe que $ab$ ; parce qu'en Algébre on eſt convenu que, lorſque deux ou pluſieurs lettres ſe trouveroient écrites à côté les unes des autres ſans interpoſition de ſignes, elles ſeroient cenſées multipliées les unes par les autres : pareillement $ab \times ab = aabb$ ; obſervant pour l'ordre & la clarté de ranger les lettres ſuivant l'ordre alphabétique. Or

I°. Si le multiplicande & le multiplicateur ſont des quantités incomplexes ; il n'y a nulle difficulté, comme nous venons de le voir.

II°. Si le multiplicande eſt une quantité complexe,

plexe, & le multiplicateur une quantité incomplexe, il faudra multiplier chaque terme du multiplicande par le multiplicateur; *par ex:* $a+b$ multiplié par $c$ donne le produit $ac+bc$, laquelle opération s'indique & s'effectue de cette maniere, $\overline{a+b} \times c = ac+bc$.

La ligne qui eſt au-deſſus de la quantité $a+b$ ſignifie que tous les termes qui ſont joints par cette ligne, ſont ſoumis à la même opération; c'eſt-à-dire, que dans cet exemple ils doivent être multipliés tous deux par le terme $c$.

III°. Si le multiplicande & le multiplicateur ſont des qualités complexes, on opere comme dans les nombres; c'eſt-à-dire, on multiplie tout le multiplicande par chaque terme du multiplicateur: *par ex:* $a+b$ multiplié par $a+b$ donne le produit $aa+ab+ab+bb$; ce qui s'exprime en ſtyle algébrique de cette maniere $\overline{a+b} \times \overline{a+b} = aa+ab+ab+bb = aa+2ab+bb$; dans laquelle expreſſion on doit remarquer que le premier membre eſt l'opération indiquée, le ſecond eſt l'opération effectuée, & le troiſiéme eſt l'opération réduite.

## *Regle II.*

123. Si les termes que l'on multiplie ſont affectés de coefficiens, on multiplie les coefficiens les uns par les autres; *par ex:* $3a$ multiplié par $2b$, donne $6ab$, ou, ce qui eſt le même, $3a \times 2b = 6ab$; la raiſon en eſt que $3a = a+a+a$, comme on l'a dit (119), pareillement $2b = b+b$; or, $\overline{a+a+a} \times \overline{b+b}$ donne $ab+ab+ab+ab+ab+ab = 6ab$, (119) donc, &c.

### *Corollaire.*

124. Si on multiplie une quantité par elle-même, *par ex:* $a$ par $a$, on aura $a \times a = aa$, & pour abréger, au lieu de $aa$ on écrit $a^2$. Ce chiffre 2 que l'on met au-deſſus de la lettre à droite, s'appelle *Ex-*

*posant*, & sert à marquer combien de fois la même lettre doit être écrite à côté d'elle-même ; pareillement au lieu de *aaa* on écrit $a^3$ ; on aura par la même raison $bb = b^2$ ; $aabbbcc = a^2\ b^3\ c^2$, & ainsi du reste.

Remarquez qu'il y a de la différence entre le *coefficient* & l'*exposant ; par ex :* entre $4a$ & $a^4$ ; car $4a = a + a + a + a$ (119) ce qui donne une somme, au lieu que $a^4 = aaaa$ ce qui donne un produit (122). Le coefficient dénote une addition ; & l'exposant une multiplication ou une exaltation.

Remarquez aussi que dans les quantités algébriques toute lettre qui n'a point d'exposant, est censée avoir l'unité pour exposant.

## *Regle III.*

125. Si les quantités que l'on multiplie, sont exprimées par les mêmes lettres affectées d'exposans, on abrege l'opération, en ajoutant les exposans ; *par ex :* $a^3 \times a^2$ donne $a^5$ ; la raison est que $a^3 = aaa$ & $a^2 = aa$, or $aaa \times aa = aaaaa = a^5$.

## *Regle IV.*

126. Lorsque les signes du multiplicande & du multiplicateur sont les mêmes, le produit doit avoir le signe +, & lorsqu'ils sont différens, le produit doit avoir le signe —; en effet.

I°. Si le multiplicande & le multiplicateur ont tous les deux le signe +, le produit doit avoir le signe +, *par ex :* $+a \times +b = +ab$ ; car une quantité positive multipliée par une quantité positive doit donner un produit positif, comme il est évident, ou $+ \times + = +$.

II°. Si le multiplicande a le signe +, & le multiplicateur le signe —, le produit doit avoir le signe —, *par ex :* $+a \times -b = -ab$ : la raison en est sensible dans les nombres ; car, *par ex :* $5 - 3 \times 6 =$

30—18, ce qui donne 12, & non pas = 30 + 18, ce qui donneroit 48; car le multiplicande $\overline{5-3} = 2$ or $2 \times 6 = 12$. En effet la multiplication étant une addition réitérée, multiplier c'eſt prendre ou ajouter le multiplicande autant de fois qu'il eſt marqué par le multiplicateur, ainſi ſi je veux multiplier $+a$ par $-3$, je dois prendre ou ajouter $+a$ moins trois fois : or ajouter $+a$ moins trois fois, c'eſt la même choſe que ſouſtraire $+a$ trois fois (118); mais pour ſouſtraire $+a$ trois fois, il faut (116) écrire $-a-a-a$, ce qui donne $-3a$; donc le produit de $+a$ par $-3$ doit être $-3a$ : donc lorſque le multiplicande a le ſigne +, & le multiplicateur le ſigne —, le produit doit avoir le ſigne —.

Ce ſeroit la même choſe ſi le multiplicande avoit le ſigne — & le multiplicateur le ſigne +; car dans la multiplication l'une ou l'autre des quantités que l'on multiplie peut être indifféremment priſe, ſoit pour multiplicande, ſoit pour multiplicateur; c'eſt pourquoi $- \times +$, ou $+ \times - = -$.

III°. Si le multiplicande & le multiplicateur ont tous les deux le ſigne —, le produit doit avoir le ſigne +; *par ex :* $-a \times -b = +ab$ : la raiſon eſt ſenſible dans les nombres; car $\overline{6-2} \times \overline{4-2} = 24 - 8 - 12 + 4$, ce qui donne 8, où l'on voit que le produit de —2 par —2 donne +4, & non pas —4; en effet le multiplicande $6-2=4$, de même le multiplicateur $4-2=2$ : or $4 \times 2 = 8$. La raiſon ultérieure eſt que, lorſqu'on multiplie une quantité négative par une autre quantité négative, *par ex :* $-a$ par $-3$, il faut prendre ou ajouter la quantité $-a$ moins trois fois; or ajouter $-a$ moins trois fois, c'eſt la même choſe (118) que ſouſtraire $-a$ trois fois : mais pour ſouſtraire $-a$ trois fois, l'on doit (116) écrire $+a+a+a$, ce qui donne $+3a$; donc le produit de $-a$ par $-3$ doit être $+3a$ : donc lorſque le multiplicande & le multiplicateur ont

tous les deux le ſigne —, le produit doit avoir le ſigne +; c'eſt-à-dire, que $- \times - = +$.

## *Regle V.*

127. La diviſion eſt une opération inverſe de la multiplication; c'eſt pourquoi, ſi le dividende & le diviſeur ſont des quantités incomplexes.

I°. Comme dans la multiplication, pour avoir le produit de deux quantités incomplexes, on écrit les lettres du multiplicateur à côté de celles du multiplicande : au contraire dans la diviſion, il faut effacer dans le dividende les lettres qui lui ſont communes avec le diviſeur, & celles qui y reſtent donneront le quotient; *par ex :* l'on a dans la multiplication $a \times b = ab$, & l'on aura dans la diviſion $\frac{ab}{a} = b$; en effet multipliez & diviſez $b$ par une même quantité $a$, ce qui n'en change pas la valeur (17), vous aurez $b = \frac{ab}{a}$, & par conſéquent $\frac{ab}{a} = b$; donc pour effectuer la diviſion d'une quantité algébrique incomplexe par une autre, il ne s'agit que d'effacer les lettres communes au dividende & au diviſeur.

II°. Si le dividende & le diviſeur ſont affectés de coefficiens, il faut diviſer les coefficiens pour une raiſon contraire à celle pour laquelle on les multiplie dans la multiplication; *par ex :* $\frac{6ab}{2a} = 3b$.

III°. Si le dividende & le diviſeur ſont exprimés par les mêmes lettres affectées d'expoſans, il faut ſouſtraire les expoſans par une raiſon contraire à celle pour laquelle on les ajoute dans la multiplication; c'eſt pourquoi $\frac{a^6}{a^2} = a^{6-2} = a^4$. En effet le dividende $a^6 = aaaaaa$, & le diviſeur $a^2 = aa$; or effaçant les lettres communes au dividende & au diviſeur, il reſtera pour le quotient $aaaa = a^4 = a^{6-2}$,

ce qui ſe voit d'un ſeul coup d'œil dans les expreſſions ſuivantes $\frac{a^6}{a^2} = \frac{aaaaaa}{aa} = aaaa = a^4 = a^{6-2}$.

IV°. Si le dividende & le diviſeur ſont affectés des mêmes ſignes, le quotient doit avoir le ſigne +; s'ils ont différens ſignes, le quotient doit avoir le ſigne —; comme il eſt aiſé de le voir par ce ſeul exemple : $\frac{+ba}{-a} = -b$, & non pas $+b$; car le quotient doit être tel, qu'étant multiplié par le diviſeur, il donne le dividende juſte : or pour cela il faut que le quotient ſoit $-b$.

*Remarque.*

128. Lorſque le dividende & le diviſeur n'ont point de lettres communes, on ne peut point effectuer la diviſion, mais ſeulement l'indiquer ; *par ex :* on ne peut point effectuer la diviſion de $a$ par $b$, mais on l'indique ſeulement, en écrivant $\frac{a}{b}$.

Ces diviſions indiquées ſont autant de fractions algébriques, leſquelles de même que les fractions numériques, prennent leur origine dans la diviſion, comme il eſt aiſé de le voir. Or on fait ſur ces fractions algébriques les mêmes opérations & de la même maniere que ſur les fractions numériques ; on peut les transformer, les ajouter, les ſouſtraire, &c. en obſervant préciſément les mêmes regles qui ont été données ci-devant, en parlant des fractions.

*Corollaire I.*

129. Si le dividende & le diviſeur ſont des quantités incomplexes, & ſont les mêmes lettres affectées d'expoſans, il peut arriver,

I°. Que l'expoſant du dividende ſoit plus grand que l'expoſant du diviſeur, & alors l'expoſant du

quotient ſera poſitif ; *par ex :* $\frac{a^5}{a^2} = a^3$ , parce que $\frac{a^5}{a^2} = a^{5-2} = a^3$.

II°. Que l'expoſant du dividende & celui du diviſeur ſoient égaux, & dans ce cas l'expoſant du quotient ſera zero ; *par ex :* $\frac{a^3}{a^3} = a^0$ , parce que $\frac{a^3}{a^3} = a^{3-3} = a^0$.

III°. Que l'expoſant du dividende ſoit plus petit que celui du diviſeur, & alors l'expoſant du quotient ſera négatif ; *par ex :* $\frac{a^2}{a^5} = a^{-3}$ , car $\frac{a^2}{a^5} = a^{2-5} = a^{-3}$.

*Corollaire I I.*

130. Il s'enſuit que ſi dans une fraction algébrique le numérateur & le dénominateur ſont tous les deux une même lettre affectée de différens expoſans, la fraction pourra toujours être transformée ou réduite en un entier, dont l'expoſant ſera la différence des expoſans du numérateur & du dénominateur, & lequel ſera par conſéquent ou poſitif, ou zero, ou négatif, ſelon que l'expoſant du numérateur ſera ou plus grand, ou égal, ou plus petit par rapport à l'expoſant du dénominateur.

*Corollaire I I I.*

131. Dans une fraction algébrique, il ſera toujours permis de faire paſſer une quantité, ou une lettre du dénominateur au numérateur, & réciproquement ; pourvu que l'on change l'expoſant de cette lettre, en le rendant *négatif*, s'il eſt *poſitif* ; ou *poſitif*, s'il eſt *négatif*, & dans ce cas l'on ne change point la valeur de la fraction, *par ex :* au lieu de $\frac{ab}{cd}$, je puis écrire $\frac{aba^{-1}}{c}$ : en effet il eſt clair

que $\frac{ab}{cd}$ eſt la même choſe que $\frac{ab}{c} \times \frac{1}{d}$ ; or $\frac{1}{d}$ eſt la même choſe que $\frac{d^0}{d} = d^{-1}$, donc on aura $\frac{ab}{cd} = \frac{abd^{-1}}{c}$, & réciproquement $\frac{abd^{-1}}{c} = \frac{ab}{cd}$ : pareillement au lieu de $\frac{c}{ba^2}$ on peut écrire $\frac{ca^{-2}}{b}$ : au lieu de $\frac{1}{ab}$ on peut mettre $\frac{a^{-1}}{b}$ : au lieu de $\frac{1}{a}$ on peut avoir $a^{-1}$ : & ainſi du reſte.

## *Regle VI.*

132. Si le dividende eſt une quantité complexe, & le diviſeur une quantité incomplexe, il faut diviſer chaque terme du dividende par la quantité incomplexe, & chaque fois écrire le quotient, lequel doit être multiplié auſſi chaque fois par le diviſeur pour en retrancher le produit du dividende, comme dans la diviſion numérique, afin de connoître le reſte, s'il y en a un ; *par ex :* ſi j'ai la quantité $8abbc - 12abcc + 4bbcf$ à diviſer par $4bc$.

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\circ}{8}abbc - 12\overset{\circ}{a}bcc + \overset{\circ}{4}bbcf \\ \hline -\overset{\circ}{8}abbc + 12\overset{\circ}{a}bcc - \overset{\circ}{4}bbcf \end{array}\right\} \begin{array}{l} 4bc \\ \hline 2ab - 3ac + bf \end{array}$$

I°. Je diviſe le premier terme $8abbc$ par le diviſeur $4bc$, & effaçant les lettres communes à l'un & à l'autre, j'ai pour quotient $2ab$. Je multiplie le quotient trouvé par le diviſeur, & j'ai le produit $+ 8abbc$, que je ſouſtrais du dividende, en changeant ſon ſigne de $+$ en $-$ ; puis faiſant la réduction, j'efface les deux termes $8abbc$ & $- 8abbc$, qui ſe détruiſent, ce que je déſigne en écrivant o au-deſſus de ces termes.

IIº. Je diviſe le ſecond terme — 12*abcc* par le diviſeur 4*bc*, & faiſant les mêmes opérations que ci-deſſus, j'ai pour quotient — 3*ac*, & après la réduction des termes ſemblables, il ne reſte plus que — 4*bbcf*.

IIIº. Diviſant ce terme + 4*bbcf* par le diviſeur, j'ai pour quotient + *bf*, & après la réduction il ne reſte rien, & l'opération eſt finie.

## *Regle VII.*

133. Si le dividende & le diviſeur ſont tous les deux des quantités complexes, on opere comme dans la diviſion numérique, obſervant ſeulement de plus qu'il faut employer la réduction des termes ſemblables chaque fois que l'on a opéré ſur un membre de diviſion; *par ex :* ſi l'on veut diviſer 6*abb* — 2*bbc* — 3*aab* + *abc* par 2*b* — *a*, après avoir diſpoſé les quantités comme il ſuit;

$$\begin{array}{l|l} \overset{\circ}{6}abb - \overset{\circ}{2}bbc - \overset{\circ}{3}aab + \overset{\circ}{a}bc & 2b - a \\ \hline \mp \overset{\circ}{6}abb \pm \overset{\circ}{3}aab \pm \overset{\circ}{2}bbc \mp \overset{\circ}{a}bc & 3ab - bc \end{array}$$

Il faut :

Iº. Diviſer le premier terme du dividende par le premier terme du diviſeur, & on aura le quotient 3*ab*, qu'il faut écrire ſous le diviſeur.

IIº. Multiplier le quotient trouvé 3*ab* par le diviſeur 2*b* — *a*, ce qui donne le produit 6*abb* — 3*aab*, qu'il faut écrire ſous le dividende.

IIIº. Souſtraire du dividende le produit que l'on vient d'écrire, en changeant les ſignes, ce qui donne — 6*abb* + 3*aab*.

IVº. Faire la réduction des termes qui ſe trouvent ſemblables dans le dividende & dans le produit ſouſtrait, & effacer les termes qui ſe détruiſent, ou mettre un point ou un zero deſſus.

V°. Cela fait, il reſte dans cet exemple les termes $-2bbc+abc$ au dividende, qui font le ſecond membre de diviſion, ſur lequel on doit opérer comme ſur le premier; & comme après la réduction des termes ſemblables il ne reſte plus rien, la diviſion eſt achevée.

## ARTICLE III.

### *De l'Exaltation & de l'Extraction algébriques.*

L'exaltation algébrique, de même que la numérique, eſt une opération, dans laquelle on éleve une quantité à une puiſſance quelconque. L'extraction algébrique eſt une opération, dans laquelle on cherche la racine d'une puiſſance algébrique propoſée. Nous parlerons 1°. de l'exaltation & de l'extraction pour les quantités incomplexes: 2°. de l'exaltation & de l'extraction pour les quantités complexes.

## PARAGRAPHE I.

### *De l'Exaltation & de l'Extraction des Quantités incomplexes.*

#### *REGLE I.*

134. Pour élever une quantité algébrique incomplexe à une puiſſance quelconque, il faut la multiplier (77) par elle-même autant de fois, moins une, qu'il y a d'unités dans l'expoſant de la puiſſance; *par ex :* pour avoir la ſeconde, la troiſiéme, la quatriéme, &c. puiſſance de $a$, il faut multiplier $a$ par lui-même une fois, deux fois, trois fois, &c. & l'on aura la ſeconde puiſſance $aa$, ou $a^2$; la troiſiéme $aaa$, ou $a^3$; la quatriéme $aaaa$, ou $a^4$.

#### *Corollaire.*

135. D'où il ſuit évidemment;

I°. Que l'on peut élever tout d'un coup une quantité algébrique incomplexe qui n'a point d'expoſant

écrit, à une puiſſance quelconque, en l'affectant d'un expoſant qui exprime le degré de la puiſſance, *par ex :* la ſixiéme puiſſance de $a$ eſt $a^6$; de $ab$ eſt $a^6 b^6$; de $cd$ eſt $c^6 d^6$.

II°. Que pour élever à une puiſſance quelconque une quantité affectée d'un expoſant, il n'y a qu'à multiplier l'expoſant de la quantité par l'expoſant de la puiſſance; *par ex :* pour élever $a^2$, à la troiſiéme puiſſance, l'on écrit $a^{2\times 3} = a^6$; la raiſon en eſt que la troiſiéme puiſſance de $a^2$ eſt, comme nous venons de le dire, $a^2 \times a^2 \times a^2 = a^{2+2+2}$ (125) $= a^6$.

III°. Qu'en général pour élever à une puiſſance quelconque une quantité incomplexe, affectée ou non, d'un expoſant, la regle ſera toujours de multiplier l'expoſant de la quantité par l'expoſant de la puiſſance : car une quantité telle que $a$ qui n'a point d'expoſant écrit, a cependant l'unité pour expoſant, & eſt $a^1$; c'eſt pourquoi, lorſque pour l'élever à la deuxiéme, troiſiéme, &c. puiſſance, vous écrivez $a^2$, $a^3$, &c, c'eſt la même choſe que ſi vous écriviez $a^{1\times 2}$, $a^{1\times 3}$, &c. ce qui donne $a^2$, $a^3$, &c.

## *REGLE II.*

136. L'extraction des racines eſt une opération inverſe de l'exaltation : c'eſt pourquoi, puiſque pour élever une quantité à une puiſſance, il n'y a qu'à multiplier ſon expoſant par l'expoſant de la puiſſance; pour extraire une racine quelconque, il n'y aura au contraire qu'à diviſer l'expoſant de la puiſſance donnée par l'expoſant de la racine que l'on cherche; *par ex :* la troiſiéme puiſſance de $a$, ou $a^1$, eſt $a^{1\times 3} = a^3$; & au contraire la racine troiſiéme de $a^3$, ſera $\frac{3}{a^3} = a^1 = a$; pareillement la racine ſeconde de $a^3$ ſera $a^{\frac{3}{2}}$, & ainſi du reſte.

*Corollaire I.*

137. Il ſuit de ce que nous venons de dire, que, comme les puiſſances ſont indiquées ou repréſentées par des expoſans qui ſont des nombres entiers, de même les racines peuvent être indiquées ou repréſentées par des expoſans fractionnaires; *par ex :* les racines premiére, ſeconde, troiſiéme, &c. de $a$, ou $a^1$, ſeront $a^{\frac{1}{1}}$, $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{1}{4}}$, $a^{\frac{1}{5}}$, $a^{\frac{1}{6}}$, &c.

On peut auſſi indiquer ou repréſenter les racines, en ſe ſervant ſimplement du ſigne radical $\sqrt{}$, & en affectant ce ſigne de l'expoſant de la racine; *par ex :* les racines premiere, ſeconde, troiſiéme, &c. de la quantité $a$, ou $a^1$, peuvent ſe repréſenter par

$\sqrt[1]{a}$, $\sqrt[2]{a}$, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[4]{a}$, $\sqrt[5]{a}$, $\sqrt[6]{a}$, $\sqrt[7]{a}$, &c.

Remarquez 1°. que, lorſque le ſigne radical n'eſt affecté d'aucun expoſant, il indique alors toujours la ſeconde puiſſance.

Remarquez 2°. que la premiere méthode d'exprimer les racines eſt plus commode, parce qu'elle les aſſujettit au calcul, de même que les quantités ordinaires.

*Corollaire II.*

138. Comme l'expreſſion $\frac{1}{a^2}$ eſt la même choſe que $\sqrt[2]{a}$, ou que l'on a $\sqrt[2]{a} = \frac{1}{a^2}$; de même l'expreſſion $a^{\frac{1}{2}}$ ſera la même que $\sqrt{a}$, & l'on aura $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$. C'eſt pourquoi, comme il eſt permis de repréſenter une racine de deux manieres; ſçavoir, ou en donnant à la quantité un expoſant fractionnaire, ou en lui donnant le ſigne radical avec un expoſant qui ſoit un nombre entier; de même on pourra auſſi repréſenter une puiſſance de deux manieres; ſçavoir, ou en lui don-

nant un exposant qui soit un nombre entier, ou en lui donnant le signe radical affecté d'un exposant fractionnaire : ainsi l'on peut exprimer la suite de toutes les puissances consécutives de $a$, ou $a^1$, en commençant par la puissance zero, dans cet ordre.

$$a^0, a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, a^8, \text{ \&c.}$$

ou bien,

$$\sqrt[1]{a}, \sqrt[1]{a}, \sqrt[2]{a}, \sqrt[3]{a}, \sqrt[4]{a}, \sqrt[5]{a}, \sqrt[6]{a}, \sqrt[7]{a}, \sqrt[8]{a}, \text{ \&c.}$$

*Corollaire III.*

139. Les puissances algébriques peuvent quelquefois être affectées d'exposans négatifs ; c'est-à-dire, que les quantités $a^{-1}$, $a^{-2}$, $a^{-3}$, &c. sont des quantités possibles en Algébre, aussi bien que les quantités $a^1$, $a^2$, $a^3$, &c.

En effet, si l'on prend les puissances consécutives de $a$ en descendant ; sçavoir :

$$a^6, a^5, a^4, a^3, a^2, a^1, a^0, \text{ \&c.}$$

& si l'on divise chacun de ces termes par $a$, ce qui donnera

$$\frac{a^6}{a}, \frac{a^5}{a}, \frac{a^4}{a}, \frac{a^3}{a}, \frac{a^2}{a}, \frac{a^1}{a}, \frac{a^0}{a},$$

il est évident qu'en effectuant la division, il en résultera la suite des quotiens

$$a^5, a^4, a^3, a^2, a^1, a^0, a^{-1}.$$

Car nous avons fait voir que $\frac{a^6}{a} = a^5$ ; que $\frac{a^5}{a} = a^4$ & ainsi de suite : en suivant le principe, nous verrons de même que $\frac{a^1}{a}$, est la même chose que $\frac{a^1}{a^1}$, ou que $a^{1-1} = a^0$ : pareillement que la quantité $\frac{a^0}{a}$ est la même chose que $\frac{a^0}{a^1}$, ou que $a^{0-1} = a^{-1}$ ; de

même que la quantité $\frac{a^{-1}}{a}$ ſera la même choſe que $\frac{a^{-1}}{a^1}$, ou que $a^{-1-1}=a^{-2}$, & ainſi du reſte, ce qui donnera la ſuite :

$a^1, a^0, a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, a^{-4}, a^{-5}$, &c.

## *DÉFINITIONS.*

### I.

140. Les quantités qui ſont affectées du ſigne radical $\surd$, s'appellent Quantités *radicales*, ou ſimplement *Radicaux*. Les quantités qui ſuivent le ſigne $\surd$, s'appellent Grandeurs *ſous le ſigne*, & celles qui précédent le ſigne $\surd$, s'appellent *Coefficiens* du radical.

### II.

141. Les *Radicaux* ſont par rapport à l'extraction, ce que *les fractions* ſont par rapport à la diviſion; c'eſt-à-dire, que les radicaux ſont à proprement parler des reſtes après l'extraction, de même que les fractions ſont des reſtes après la diviſion.

### III.

142. Le nombre qui eſt au-deſſus du ſigne $\surd$, s'appelle *Expoſant* du radical; ſi ce nombre eſt entier, la quantité affectée du ſigne $\surd$ eſt une racine, ſi ce nombre eſt fractionnaire, la quantité eſt une puiſſance.

Comme nous avons vu qu'une même grandeur peut, ſans changer de valeur, être repréſentée ſous l'expreſſion ou ſans l'expreſſion du ſigne radical (137); de même une grandeur affectée du ſigne radical peut encore, en conſervant toujours ce ſigne $\surd$, changer d'expreſſion ſans changer de valeur, & l'on peut ainſi faire ſubir aux *radicaux* différens changemens pour les ſimplifier, les préparer & les aſſujettir au calcul : en voici les regles.

*Regle I.*

143. On peut, ſans changer la valeur d'un radical, faire paſſer devant le ſigne une quantité qui eſt ſous le ſigne; ſçavoir, lorſque la grandeur ſous le ſigne eſt un produit dont un des produiſans eſt une puiſſance de même degré que l'expoſant du ſigne, *on peut effacer cette puiſſance ſous le ſigne, en mettant ſa racine devant le ſigne*; au lieu de $\sqrt{bbc}$, on peut écrire $b\sqrt{c}$. Car $\sqrt{bbc} = \sqrt{bb} \times \sqrt{c}$: or $\sqrt{bb} = b$, donc $\sqrt{bb} \times \sqrt{c} = b\sqrt{c}$; pareillement au lieu de $3\sqrt{aab+aac}$, on peut mettre $3a\sqrt{b+c}$.

*Regle II.*

144. Réciproquement on pourra faire paſſer ſous le ſigne une quantité qui eſt devant le ſigne, en *multipliant la grandeur ſous le ſigne par cette quantité élevée à la puiſſance de même degré que l'expoſant du ſigne*; au lieu de $b\sqrt{c}$, on pourra écrire $\sqrt{bbc}$. Car $b\sqrt{c} = b \times \sqrt{c} = \sqrt{bb} \times \sqrt{c} = \sqrt{bbc}$; de même au lieu de $a\sqrt{b+c}$, on pourra mettre $\sqrt{aab+aac}$.

*Corollaire.*

145. Lorſque le radical eſt affecté d'un coefficient, on pourra toujours par cette méthode le faire évanouir, en le faiſant paſſer ſous le ſigne.

*Regle III.*

146. On peut changer l'expoſant d'un radical, en le multipliant par une quantité quelconque, *pourvu que l'on multiplie par la même quantité l'expoſant de la grandeur ſous le ſigne*; ainſi au lieu de $\sqrt[3]{a}$ on peut mettre $\sqrt[3\times 2]{a^2}$, ou $\sqrt[6]{a^2}$. car $\sqrt[3]{a} = \frac{1}{a^3}$, & $\sqrt[6]{a^2} = \frac{2}{a^6}$, (137); or $\frac{2}{a^6} = \frac{1}{a^3}$, puiſque $\frac{2}{6}$ eſt la même choſe que $\frac{1}{3}$, donc $\sqrt[3]{a} = \sqrt[6]{a^2}$.

*Corollaire.*

147. Par cette méthode il ſera toujours facile de

réduire au même expoſant deux radicaux, *en multipliant dans chacun l'expoſant du ſigne & l'expoſant de la grandeur ſous le ſigne par l'expoſant de l'autre ſigne ; par ex :* $\sqrt[2]{a}$ & $\sqrt[3]{a}$ ſe réduiſent à $\sqrt[6]{a^3}$, & $\sqrt[6]{a^2}$.

## *Regle IV.*

148. On peut faire entrer dans l'expreſſion d'un radical, ſans en changer la valeur, une quantité quelconque *a*, ce qui ſe fait *en diviſant le coefficient du radical par* a, & *en multipliant la grandeur ſous le ſigne par la puiſſance de* a *indiquée par l'expoſant du ſigne*, ou bien en multipliant le coefficient du radical par *a*, & en diviſant la grandeur ſous le ſigne par la puiſſance de *a* indiquée par l'expoſant du ſigne. La quantité $c\sqrt{b}$ ſera la même choſe que $\frac{c}{a}\sqrt{aab}$, ou que $ac\sqrt{\frac{b}{aa}}$ ; de même $c\sqrt[3]{b}$ peut ſe changer en $\frac{c}{a}\sqrt[3]{a^3 b}$, ou $ac\sqrt[3]{\frac{b}{a^3}}$ : en effet dans ce cas on ne fait que multiplier & diviſer une quantité par une même grandeur, ce qui ne change pas la valeur de la quantité (17).

*Remarque.*

149. Ces changemens d'expreſſion que l'on fait ſubir à un même radical, ſans en changer la valeur, s'appellent *Transformations*. Le but de ces transformations eſt de préparer les radicaux, de ſimplifier leur expreſſion, & de la rendre plus aiſée, lorſqu'on veut les comparer & les ſoumettre aux opérations de l'Arithmétique ; car les radicaux ſimplifiés, modifiés, transformés, (quand le cas l'exige) ſuivant les régles ci-deſſus, ſont ſuſceptibles d'addition, de ſouſtraction, de multiplication, &c. de même que les quantités ordinaires.

## *Regle V.*

150. On applique aux radicaux toutes les opérations de l'Arithmétique de la maniere qui ſuit.

I°. L'addition des radicaux ſe fait en les écrivant à la ſuite l'un de l'autre avec leurs ſignes ; mais lorſqu'ils ont un même expoſant & une même quantité ſous le ſigne, alors on les ajoute en prenant la ſomme des coefficiens, *par exemple ;* ſi l'on veut ajouter $a\sqrt[3]{b^2}$ & $c\sqrt[3]{b^2}$, la ſomme ſera $\overline{a+c}\sqrt[3]{b^2}$.

II°. Pour ſouſtraire deux radicaux, on change le ſigne du coefficient de celui que l'on veut ſouſtraire ; mais s'ils ont le même expoſant & la même quantité ſous le ſigne, alors on doit prendre la différence des coefficiens ; *par ex :* $a\sqrt[3]{bc} - c\sqrt[3]{bc} = a - c\sqrt[3]{bc.}$

III°. Pour multiplier deux radicaux, 1°. s'ils ont le même expoſant, il faut multiplier les coefficiens l'un par l'autre, & les quantités ſous le ſigne l'une par l'autre ; *par ex :* $2\sqrt{4} \times 3\sqrt{.9} = 6\sqrt{36} = 36$, ce qui eſt évident : 2°. s'ils ont différent expoſant, on doit alors les réduire à un même expoſant (147), & puis faire le reſte comme dans le cas précédent, *par ex :* $a\sqrt[2]{b} \times b\sqrt[3]{c} = a\sqrt[6]{b^3} \times b\sqrt[6]{c^2} = ab\sqrt[6]{b^3 c^2}$.

IV°. Pour diviſer deux radicaux, 1°. s'ils ont le même expoſant, il n'y a qu'à diviſer les coefficiens l'un par l'autre, & les quantités ſous le ſigne l'une par l'autre, *par ex :* $6\sqrt{36}$ diviſé par $2\sqrt{4}$, donnera $\frac{6\sqrt{36}}{2\sqrt{4}} = 3\sqrt{9} = 3 \times 3 = 9$, comme il eſt évident : 2°. s'ils ont différent expoſant, on doit les réduire à un même expoſant, & faire le reſte comme dans le cas précédent ; *par ex :*

$a\sqrt[2]{b}$

$$\frac{a\sqrt[2]{b}}{3\sqrt[3]{c}} = \frac{a\sqrt[6]{b^3}}{3\sqrt[6]{c^2}} = \frac{a}{3}\sqrt[6]{\frac{b^3}{c^2}}.$$

V°. Pour élever un radical à une puiſſance quelconque, il ne s'agit que de multiplier ce radical par lui-même autant de fois moins une, qu'il eſt marqué par l'expoſant de la puiſſance; ainſi le tout ſe réduit, 1°. à élever le coefficient du radical à la puiſſance propoſée; 2°. à diviſer l'expoſant du ſigne par l'expoſant de la puiſſance, ce qui éleve la grandeur ſous le ſigne au degré propoſé; *par ex*: la ſeconde puiſſance de $a\sqrt[2]{b}$ ſera $a^2\sqrt[\frac{2}{2}]{b} = a^2b$; la troiſiéme puiſſance de $a\sqrt[2]{bc}$ ſera $a^3\sqrt[\frac{2}{3}]{bc}$.

VI°. Pour extraire une racine quelconque d'un radical; 1°. extrayez la racine propoſée du coefficient, ſi l'extraction eſt poſſible; & ſi elle ne l'eſt pas, faites évanouir le coefficient (145); 2°. multipliez l'expoſant du ſigne par l'expoſant de la racine, & vous aurez la racine propoſée; *par ex*: la racine ſeconde de $a\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a^3b}$ ſera $\sqrt[6]{a^3b}$; la racine troiſiéme de $a^3\sqrt[4]{bc}$ ſera $a\sqrt[12]{bc}$.

## PARAGRAPHE II.

### *De l'Exaltation & de l'Extraction des Quantités complexes.*

Nous allons parler, 1°. De la formation des puiſſances des quantités complexes; 2°. De l'extraction de leurs racines.

### NOMBRE I.

### *De la Formation des Puiſſances des Quantités complexes.*

I°. Si l'on veut ſeulement indiquer la puiſſance

d'une quantité complexe, *par ex*: $a+b$, on écrit ſimplement $\overline{a+b}^2$ pour la ſeconde puiſſance, $\overline{a+b}^3$ pour la troiſiéme puiſſance, & ainſi du reſte.

II°. Si l'on veut atteindre à la puiſſance réelle de la quantité, il faudra multiplier cette quantité par elle même autant de fois, moins une, qu'il y a d'unités dans l'expoſant de la puiſſance, comme le preſcrit (134) la regle générale.

C'eſt pourquoi la premiere puiſſance de $a+b$ eſt $a+b$, ou $\overline{a+b}\times 1 = a+b$.

La ſeconde puiſſance de $a+b$ eſt $\overline{a+b}\times\overline{a+b} = a^2+2ab+b^2$.

La troiſiéme puiſſance de $a+b$ eſt $\overline{a+b}\times\overline{a+b}\times\overline{a+b} = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, & ainſi du reſte.

III°. Mais, ſans avoir recours à ces multiplications réitérées, on peut former immédiatement, & trouver tout d'un coup les différentes puiſſances d'une quantité complexe; & pour cela il ne s'agit que de connoître les parties & les circonſtances qui concourent à la formation de la puiſſance, leſquelles ſont le nombre des termes, les ſignes, les expoſans, & les coefficiens. Or les propoſitions & les regles ſuivantes nous en donneront la méthode, que nous allons appliquer à un *binôme* quelconque $a+b$.

IV°. On pourra raiſonner des autres quantités complexes, *trinômes*, *quatrinômes*, &c. comme du *binôme* $a+b$; car toute quantité complexe, telle que le *trinôme* $a+b+c$, peut être regardée comme un *binôme*, ou comme n'étant compoſée que de deux termes, dont le premier ſeroit $\overline{a+b}$, & le ſecond $+c$.

## *Regle I.*

151. Toute puiſſance contient autant de termes, & un de plus, qu'il y a d'unités dans l'expoſant de la puiſſance; la ſeconde puiſſance $a^2+2ab+b^2$ de $a+b$, contient trois termes; ſa troiſiéme puiſſance

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ en contient quatre ; la quatriéme puiſſance $a^4 + 4a^3b$, &c. en contient cinq, & ainſi du reſte.

La raiſon en eſt que dans toute puiſſance conſidérée comme *produit*, le nombre des termes eſt égal au produit du nombre des *facteurs* multiplians, par le nombre des facteurs multipliés ; c'eſt-à-dire, que la ſeconde puiſſance $\overline{a+b} \times \overline{a+b} = aa + ab + ab + bb$, qui eſt le réſultat de deux facteurs multipliés par deux facteurs, contient quatre termes ; pareillement que la troiſiéme puiſſance $\overline{a+b} \times \overline{a+b} \times \overline{a+b} = a^3 + a^2b + a^2b + a^2b + ab^2 + ab^2 + ab^2 + b^3$, qui eſt le réſultat de deux facteurs multipliés par deux facteurs, & encore par deux facteurs, renferme huit termes : mais dans la puiſſance conſidérée comme *quantité algébrique*, la réduction des termes ſemblables diminue le nombre des termes, & réduit dans la ſeconde puiſſance les quatre termes à trois, ſçavoir, $a^2 + 2ab + b^2$ ; dans la troiſiéme puiſſance, les huit termes à quatre $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ; dans la quatriéme puiſſance, &c.

*Corollaire I.*

152. Dans toute puiſſance, ſi l'on ordonne les termes par rapport à une lettre, *par ex :* à la lettre $a$, le nombre des termes ſera déterminé par les puiſſances conſécutives de cette lettre $a$ ; comme on le voit évidemment,

dans le quarré, $a^2 + 2ab + a^0 b^2$

dans le cube, $a^3 + 3a^2b + ab^2 + a^0 b^3$ ;

& de même dans toutes les autres puiſſances du binôme $a + b$.

*Corollaire II.*

153. Par conſéquent, lorſqu'on a la puiſſance d'une quantité complexe quelconque, ſoit *binôme*, ſoit *trinôme*, ſoit, &c. on peut, en ordonnant les termes par rapport à une même lettre $a$, écrire les

uns ſous les autres tous les termes dans leſquels la lettre $a$ ſe trouvera élevée à une même puiſſance, *par ex*: la puiſſance $a^2 + 2ab + bb + 2ac + 2bc + cc$ s'écrira de cette maniere :

$$a^2 + 2ab + bb$$
$$+ 2ac + cc$$
$$+ 2bc.$$

Car les termes où la lettre $a$ ſe trouve élevé à une même puiſſance, ne ſont cenſés former qu'un ſeul & même terme $a$, ou $a^2$, ou $a^3$, ou &c. lequel eſt multiplié par une quantité complexe, qui s'appelle le coefficient de ce terme $a$, ou $a^2$, ou $a^3$, ou, &c. Dans l'exemple ci-deſſus la quantité $2ab + 2ac$ n'eſt autre choſe que le terme $a$ multiplié par le coefficient $2b + 2c$. Il faut dire la même choſe de tous les autres termes, leſquels ſe déterminent tous par les degrés conſécutifs de la lettre par rapport à laquelle on a ordonné les termes de la puiſſance.

## *Regle II.*

154. Lorſque les termes du binôme racine ſont tous les deux affectés du ſigne +, ou que l'on a, *par ex*: $a + b$, tous les termes de la puiſſance ſont affectés du ſigne +; car $+ \times + \times + \times +$, &c. $= +$.

Lorſqu'ils ſont affectés, l'un du ſigne +, & l'autre du ſigne —, ou que l'on a, *par ex*: $a - b$; alors les termes de la puiſſance ſont alternativement affectés des ſignes + & —; car les puiſſances de la lettres $b$ étant alternativement paires & impaires; tous les termes où ces puiſſances ſeront paires, auront le ſigne +; car $- \times - = +$: & tous les termes où ces puiſſances ſeront impaires, auront le ſigne —; car $- \times - \times - = -$.

Lorſqu'ils ſont tous les deux affectés du ſigne —; alors les puiſſances paires de la racine auront à tous leurs termes le ſigne +, & les puiſſances impaires à tous leurs termes le ſigne —.

## *Regle III.*

155. On voit évidemment que la premiere puiſſance de $a+b$ eſt $\overline{a+b}\times 1 = a+b$; or cette premiere puiſſance peut être repréſentée par $a^1+b^1$; car toute lettre qui n'a point d'expoſant, eſt cenſée avoir l'unité pour expoſant; elle peut auſſi être repréſentée par $a^1 b^0 + a^0 b^1$.

La ſeconde puiſſance, ou le quarré de $a+b$ eſt $a^2+2ab+b^2$; cette ſeconde puiſſance par la même raiſon peut être repréſentée par $a^2b^0+2a^1b^1+a^0b^2$.

La troiſiéme puiſſance de $a+b$, qui eſt $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, peut par le même principe être repréſentée par $a^3b^0+3a^2b^1+3a^1b^2+a^0b^1$, & ainſi du reſte : d'où il ſuit ;

I°. Que l'on trouvera aiſément les expoſans de tous les termes d'une puiſſance quelconque d'un binôme, parce que ces expoſans croiſſent & décroiſſent réguliérement ; *par ex.* : la ſixiéme puiſſance de $a+b$ ſera

$a^6b^0+a^5b^1+a^4b^2+a^3b^3+a^2b^4+a^1b^5+a^0b^6$,

où il eſt à remarquer que dans chaque terme la ſomme des expoſans des deux lettres eſt toujours égale au degré de puiſſance.

II°. Que pour trouver les expoſans des termes d'une puiſſance quelconque, il n'y a qu'à diminuer toujours d'une unité l'expoſant de la lettre $a$, lequel dans le premier terme eſt égal au degré de la puiſſance, juſqu'à ce qu'il devienne nul, ou $= 0$, & augmenter celui de $b$, qui eſt nul, ou $= 0$, dans le premier terme, juſqu'à ce qu'il devienne égal au degré de la puiſſance.

### *Corollaire.*

156. Si l'expoſant de la puiſſance eſt repréſenté par l'indéterminée $n$, on aura une formule générale pour repréſenter la ſuite des expoſans d'une puiſſance quelconque ; ſçavoir,

$a^n b^0 + a^{n-1}b^1 + a^{n-2}b^2 + a^{n-3}b^3 \ldots\ldots + a^{n-m}b^m$ ; laquelle formule a été trouvée par Newton.

## *Regle IV.*

157. La premiere puiſſance $a+b$ ſe peut repréſenter par $1a+1b$, parce que toute quantité qui n'a pas de coefficient, eſt cenſée avoir pour coefficient l'unité; par conſéquent les coefficiens des termes de la premiere puiſſance ſont $1+1$; la ſeconde puiſſance $a^2+2ab+b^2$ a pour coefficiens $1+2+1$, la troiſiéme puiſſance $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ a pour coefficiens $1+3+3+1$, & ainſi du reſte.

158. Or ſi l'on ordonne les termes des puiſſances par rapport à une lettre, *par ex* : $a$, & ſi l'on écrit les puiſſances conſécutives les unes ſous les autres de cette maniere,

I. Puiſſ. $1a^1+1a^0$

II. $1a^2+2a^1+1a^0$

III. $1a^3+3a^2+3a^1+1a^0$

IV. $1a^4+6a^3+4a^2+4a^1+1a^0$

V. $1a^5+5a^4+10a^3+10a^2+5a^1+1a^0$

& ainſi de ſuite; il eſt aiſé de remarquer que ſi l'on multiplie le coefficient d'un terme quelconque par le quotient de ſon expoſant diviſé par le nombre qui déſigne le rang de ce terme dans la puiſſance, l'on aura le coefficient du terme ſuivant, *par ex* : dans la cinquiéme puiſſance, ſi je multiplie le coefficient 5 du ſecond terme par le quotient 2 de l'expoſant 4 diviſé par 2, qui déſigne le rang du ſecond terme, j'aurai $5\times\frac{4}{2}=10$, qui ſera le coefficient du troiſiéme terme; & l'on trouvera par cette méthode les coefficiens de tous les autres termes.

159. D'où il ſuit que ſi l'expoſant eſt reptéſenté par l'indéterminée $n$, le coefficient du premier terme étant 1, le coefficient du ſecond ſera $\frac{n}{1}$; or le ſecond terme a pour expoſant $n-1$, lequel étant diviſé par 2 qui déſigne le rang du ſecond terme,

sera $\frac{n-1}{2}$ : donc multipliant $\frac{n}{1}$ par $\frac{n-1}{2}$ j'aurai $\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2}$ pour coefficient du troisiéme terme ; par la même raison le coefficient du quatriéme sera $\frac{n}{1} + \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3}$, & ainsi du reste ; d'où l'on déduit cette formule générale, dont Newton est encore l'auteur, laquelle peut servir à trouver tout d'un coup les coefficiens de tous les termes d'une puissance quelconque ;

$a^n b^0 + \frac{n}{1} a^{n-1} b^1 + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} a^{n-2} b^2 + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} a^{n-3} b^3 + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4} a^{n-4} b^4$, &c.

## NOMBRE II.

### *De l'extraction des Racines complexes.*

Nous allons parler de l'extraction des racines complexes, 1°. pour les quantités algébriques, 2°. pour les quantités numériques.

### *De l'extraction des Racines complexes algébriques.*

### *DÉFINITIONS.*

#### I.

160. On appelle puissance *parfaite*, celle dont on peut extraire la racine juste, exacte & sans reste : la puissance est dite *imparfaite*, lorsqu'on ne peut point en extraire la racine juste & exacte, mais qu'il se trouve un reste après l'extraction. Nous parlerons surtout des puissances parfaites.

#### II.

161. Toute puissance est en même-tems un *Produit* & une *Somme*. Elle est *produit* en tant qu'elle résulte de la multiplication de racines égales, ou d'une racine multipliée par elle-même un certain nombre de fois. Elle est *somme*, parce que les racines en se multipliant, ont formé un tout composé de parties assemblées, *par ex* : le quarré $a^2 + 2ab + b^2$ est le produit des racines $a+b$ & $a+b$, & est la somme des quantités $a^2$, $2ab$, $b^2$.

## III.

162. Extraire la racine d'une puiſſance, c'eſt décompoſer une puiſſance, ou chercher les parties dont elle eſt compoſée comme *produit*, & pour les trouver, il faut connoître les parties dont elle eſt compoſée comme *ſomme*.

## IV.

163. Les parties dont une puiſſance eſt compoſée en tant que ſomme, ſont les termes qui combinés avec les ſignes + & —, donnent la puiſſance : or

I°. La ſeconde puiſſance, ou le quarré d'un binôme quelconque $a+b$, ſçavoir, $a^2+2ab+b^2$ renferme trois choſes ; $a^2$, quarré du premier terme de la racine ; $b^2$ quarré du ſecond terme ; & $2ab$ double produit du premier terme de la racine par le ſecond.

II°. La troiſiéme puiſſance, ou le cube d'un binôme $a+b$, qui eſt $a^3+3a^2b+3a^2+b^3$, renferme quatre parties ; ſçavoir $a^3$ cube du premier terme de la racine, $b^3$ cube du ſecond terme ; $3a^2b$ triple produit du ſecond terme par le quarré du premier ; & $3ab^2$ triple produit du premier terme par le quarré du ſecond.

III°. On peut faire une remarque toute ſemblable pour les autres puiſſances, en élevant un binôme quelconque $a+b$ à ſes différentes puiſſances conſécutives.

IV°. Ce que nous venons de dire d'un binôme, peut être appliqué à un polynôme quelconque $a+b+c$, pourvu qu'il ſoit conſidéré comme étant un binôme $\overline{a+b}+c$ : c'eſt-à-dire que ſon quarré ; *par ex* : renfermera 1°. le quarré du premier terme $\overline{a+b}$, lequel eſt $a^2+2ab+b^2$ ; 2°. le quarré du ſecond terme, ſavoir, $c^2$ ; 3°. le produit du premier terme $\overline{a+b}$ par le ſecond $c$, lequel eſt $2ac+2bc$.

## PROBLÊME.

164. *Extraire la Racine quelconque d'une Puiſſance algébrique.*

SOLUTION. Après avoir ordonné les termes de la puiſſance par rapport à une des lettres, il faudra élever un binôme quelconque, *par ex* : $a+b$, à une puiſſance de même degré que celle dont on veut extraire la racine : les puiſſances de ce binôme $a+b$, leſquelles ſont

Seconde . . . $a^2+2ab+b^2$

Troiſiéme . . $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

Quatriéme . . $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$,

& ainſi de ſuite, ſerviront de formules, & indiqueront les diviſeurs dont il faudra ſe ſervir pour trouver chacun des termes de la racine : c'eſt de l'attention faite à ces formules (dont on connoît les racines) que tout dépend, & nous en allons déduire les regles ſuivantes.

I°. Pour trouver le premier terme de la racine, il faudra extraire du premier terme de la puiſſance donnée (qui eſt ici le dividende) la racine propoſée : la racine quarrée, s'il s'agit de trouver la racine quarrée; la racine cubique, s'il s'agit de trouver la racine cubique; la racine quatriéme, s'il s'agit, &c. & l'écrire au quotient. Si le premier terme du dividende n'étoit pas une puiſſance parfaite, il faudroit prendre la plus grande puiſſance parfaite contenue dans ce terme, & en extraire la racine, pour l'écrire au quotient.

II°. Pour trouver les autres termes de la racine, il faudra, 1°. élever le quotient déjà trouvé au degré de la puiſſance donnée, & le retrancher du dividende pour avoir le reſte, s'il y en a un, & ajouter ce reſte au terme ſuivant de la puiſſance pour en faire un ſecond membre de diviſion. 2°. On diviſera ce ſecond membre, ou le ſecond terme de

la puiſſance, (lequel ſecond terme ſera quelquefois une quantité incomplexe, comme dans les exemples ci-deſſus, & quelquefois une quantité complexe, comme dans l'exemple (n° 153) on le diviſera, dis-je, par l'expoſant de la puiſſance; & encore par la puiſſance du terme déjà trouvé au quotient, moindre d'un degré que la puiſſance propoſée; c'eſt-à-dire, que l'on diviſera le ſecond membre par l'expoſant 2, ſi on cherche la racine quarrée; par l'expoſant 3, ſi on cherche la racine cubique; par l'expoſant 4, ſi on cherche, &c. & de plus on le diviſera encore, ou par la premiere, ou par la ſeconde, ou par la troiſiéme, &c. puiſſance du terme déjà trouvé pour la racine, ſi l'on opere ſur une ſeconde, ſur une troiſiéme, ſur une quatriéme, &c. puiſſance; & le quotient qui réſultera de cette diviſion, donnera le terme, ou les termes qui reſtoient à trouver pour la racine.

III°. C'eſt pourquoi ſi l'on veut diviſer le ſecond membre tout d'un coup & par une ſeule opération; le diviſeur dont on doit ſe ſervir, ſera le produit fait de l'expoſant de la puiſſance propoſée, par la puiſſance du terme déjà trouvé, moindre d'un degré que la puiſſance propoſée; & ce diviſeur eſt repréſenté dans la ſeconde puiſſance par $2a$; dans la troiſiéme par $3a^2$; dans la quatriéme par $4a^3$, &c. comme il eſt aiſé de le voir dans les formules ci-deſſus.

IV°. Il faudra élever au degré de la puiſſance donnée toute la quantité trouvée à la racine, pour la ſouſtraire du dividende; & ſi après la ſouſtraction il ne reſte rien, c'eſt une marque que la puiſſance donnée étoit parfaite, & que la racine trouvée eſt juſte & exacte.

*Exemple.*

La puiſſance donnée pour en extraire la racine ſoit le cube

$$\left.\begin{array}{l} 8a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3 \\ \quad + 12a^2c + 6ac^2 + c^3 \\ \quad + 12abc + 3bcc \\ \quad + 3bbc \end{array}\right\} \begin{array}{l} a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ \hline 2a + b + c \end{array}$$

dont il faille extraire la racine troiſiéme ou cubique. Après avoir ordonné les termes par rapport à la lettre $a$, comme on voit ci-deſſus, j'éleve le binôme $a+b$ à la troiſiéme puiſſance, & je l'écris à côté du dividende, ou de la puiſſance donnée, pour qu'elle me dirige & me ſerve de formule : or

I°. Si je voulois extraire la racine cubique de la formule, je trouverois la premiere racine $a$, en prenant immédiatement la racine cubique du premier terme $a^3$ ; ce qui m'avertit d'extraire immédiatement la racine cubique du premier terme $8a^3$, laquelle eſt $2a$, que j'écris au quotient ou à la racine.

II°. J'éleve au cube le terme déjà trouvé pour la racine, & je le ſouſtrais de la puiſſance donnée, pour avoir le reſte, s'il y en a, & l'ajouter au terme ſuivant. Il ne s'en trouve point dans cet exemple. Mainrenant ſi je voulois trouver l'autre terme $b$ de la racine dans la formule, il eſt évident que je n'ai qu'à diviſer le ſecond terme $3a^2b$ par 3, qui eſt le degré de la puiſſance, & encore par $a^2$ qui eſt la puiſſance du terme déjà trouvé à la racine, mais moindre d'un degré que la puiſſance donnée, ou tout d'un coup par $3a^2$ ; ce qui m'indique que je dois diviſer le ſecond terme de la puiſſance donnée & par 3, qui eſt le degré de la puiſſance, & par $4a^2$, qui eſt la ſeconde puiſſance du terme déjà trouvé à la racine, ou la puiſſance moindre d'un degré que celle ſur laquelle on opere ; c'eſt-à-dire, que je dois diviſer par $3 \times 4a^2$, ou $12a^2$ : or le ſecond terme de la puiſſance donnée eſt (152 & 153) la quantité complexe $12a^2b + 12a^2c$, laquelle diviſée par $12a^2$ donnera au quotient $b+c$, que j'écris à la racine,

& ce ſont les termes qui me reſtoient encore à trouver.

III°. Ayant élevé à la troiſiéme puiſſance la quantité $2a + b + c$ trouvée a la racine, & l'ayant ſouſtraite du dividende, ou de la puiſſance donnée, il ne reſte rien ; ce qui dénote que l'opération eſt finie, & que le quotient trouvé eſt la racine juſte & exacte de la puiſſance donnée.

*Démonſtration.*

Il eſt évident que pour trouver la premiere racine $2a$, on doit extraire immédiatement la racine cubique du premier terme $8a^3$ ; il n'y a nulle difficulté. Après avoir trouvé la premiere racine $2a$, il eſt aiſé d'appercevoir qu'on trouvera les autres racines $b + c$, en diviſant le ſecond terme $12^2ab + 12a^2c$ de la puiſſance par 3, qui eſt le degré de la puiſſance, & par $4a^2$, qui eſt la premiere racine élevée à un degré moindre que la puiſſance propoſée, ou en diviſant tout d'un coup par $12a^2$ ; la raiſon en eſt que dans une troiſiéme puiſſance, *par ex :* le premier terme eſt toujours le cube de la racine par rapport à laquelle on a ordonné les termes de la puiſſance ; le ſecond terme eſt la ſomme des autres racines multipliées tant par le degré de la puiſſance, que par le quarré de la premiere racine : car dans l'exemple précédent le ſecond terme eſt $12a^2b + 12a^2c$ (153), lequel, comme on le voit, eſt la même choſe que $12a^2 \times \overline{b + c}$ : donc je dois trouver tous les termes qui compoſent la racine propoſée, 1°. en extrayant immédiatement la racine du premier terme de la puiſſance : 2°. en diviſant le ſecond terme de la puiſſance, tant par le degré de la puiſſance, que par le terme déjà trouvé à la racine, mais élevé à un degré moindre d'une unité que la puiſſance donnée.

Il eſt facile d'appliquer les regles & la démonſtration que nous venons d'en donner à toute autre

puiſſance quelconque donnée, parce qu'elles ſont générales & fondées ſur la nature & la formation des puiſſances.

*Corollaire.*

165. Une puiſſance quelconque étant donnée pour en extraire la racine, il ſera aiſé de connoître tout d'un coup de combien de termes doit être compoſée la racine que l'on cherche; car cette racine doit avoir autant de termes & un de plus qu'il y a de parties qui compoſent le ſecond terme de la puiſſance. En effet le ſecond terme de toute puiſſance quelconque eſt toujours celle des racines qui a ordonné les termes de la puiſſance, ou un degré de cette racine multiplié par la ſomme de toutes les autres racines. Ce ſecond terme n'a donc qu'une ſeule partie, lorſqu'il y a deux racines; il contient deux parties, lorſqu'il y a trois racines, & ainſi de ſuite.

*De l'extraction des Racines complexes numériques.*

Les principes & les regles que nous venons de donner pour l'extraction des racines des puiſſances algébriques, s'appliquent auſſi à l'extraction des racines des puiſſances numériques. Avant d'en faire l'application, il eſt à propos de connoître les quarrés & les cubes des dix premiers nombres; ſçavoir:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Racines*, | 1, | 2, | 3, | 4, | 5, | 6, | 7, | 8, | 9, | 10. |
| *Quarrés*, | 1, | 4, | 9, | 16, | 25, | 36, | 49, | 64, | 81, | 100. |
| *Cubes*, | 1, | 8, | 27, | 64, | 125, | 216, | 343, | 512, | 729, | 1000. |

On peut continuer cette table tant que l'on voudra.

*Propoſition I.*

166. De la table précédente il eſt aiſé de déduire les propriétés ſuivantes: ſçavoir,

1°. Un nombre quelconque peut avoir à ſon quarré le double du nombre des chiffres de la racine, comme on le voit dans 81, quarré de 9; il

peut en avoir moins que le double, ce qui arrive dans 625, quarré de 25 : mais il ne peut jamais avoir à ſon quarré plus que le double du nombre des chiffres de la racine ; car ſi parmi les nombres compoſés de deux chiffres, *par ex :* l'on prend le plus grand nombre poſſible, ſçavoir 99, ſon quarré 9801 ne contiendra que le double préciſément du nombre des chiffres de la racine.

II°. Un nombre quelconque peut avoir à ſon cube le triple du nombre de ſes chiffres, comme on le voit dans 729, cube de 9 ; il peut en avoir moins que le triple, comme il arrive dans 64, cube de 4 : mais il ne peut jamais avoir à ſon cube plus que le triple du nombre des chiffres de la racine ; car entre les nombres compoſés de deux chiffres, *par ex :* prenant le plus grand nombre poſſible, ſçavoir 99, ſon cube 970299 ne contiendra préciſément que le triple du nombre des chiffres de la racine.

III°. On doit raiſonner de la même maniere des autres puiſſances ; c'eſt-à-dire, qu'une quantité compoſée d'un certain nombre de chiffres ne pourra jamais avoir à ſa quatriéme puiſſance, plus que le quadruple ; à ſa cinquiéme puiſſance plus que le quintuple du nombre de ſes chiffres ; & en général que le nombre des chiffres qui compoſent une puiſſance quelconque, ne peut jamais être plus grand que le produit de l'expoſant de la puiſſance par le nombre des chiffres de la racine : de ſorte qu'appellant $z$ le nombre des chiffres de la puiſſance, $n$ celui des chiffres de la racine, & $p$ l'expoſant de la puiſſance, on aura quelquefois $z < np$ ; & $z = np$ ; mais jamais $z > np$.

*Corollaire.*

167. Donc ſi l'on partage une puiſſance donnée en tranches allant de droite à gauche, de façon que chaque tranche contienne autant de chiffres

qu'il eſt marqué par l'expoſant de la puiſſance, ſçavoir, deux chiffres pour la ſeconde puiſſance, trois chiffres pour la troiſiéme puiſſance, & ainſi du reſte, (excepté la premiere tranche à gauche, qui peut en contenir moins; ſçavoir, lorſque $z < np$) la racine aura toujours autant de caracteres ou chiffres, qu'il y aura de tranches dans la puiſſance.

On pourra donc toujours connoître de combien de caracteres ou chiffres doit être compoſée la racine d'une puiſſance numérique quelconque donnée.

*Propoſition II.*

168. Le quarré d'un nombre renferme les mêmes parties que celui d'une quantité algébrique; ſçavoir,

I°. Le quarré d'un nombre compoſé de deux chiffres contient le quarré du premier chiffre, plus le double produit du premier chiffre par le ſecond, & le quarré du ſecond; *par ex:* dans 625, quarré de 25, on trouve 400, quarré du chiffre 2, ou plutôt 20, (car 2 eſt dans le rang des dixaines); 200, double produit du premier terme 20 par le ſecond 5; & 25, quarré du ſecond chiffre 5. En effet, on a $400 + 200 + 25 = 625$; & c'eſt ce qui eſt repréſenté par la formule $a^2 + 2ab + b^2$, quarré du binôme $a + b$.

II°. Si le nombre eſt compoſé de trois chiffres, tel que 125, on peut conſidérer les deux premiers chiffres, (ou, ſi l'on veut, les deux derniers chiffres) comme ne faiſant qu'un ſeul terme, & alors le quarré du nombre 125 contiendra le quarré du premier terme 12, (lequel terme 12 étant compoſé de deux chiffres, contiendra lui-même toutes les parties dont nous venons de parler ci-deſſus) plus il contiendra le double produit du premier terme 12 par le ſecond 5, & le quarré du ſecond terme 5; c'eſt ce qui eſt encore repréſenté par la formule $a^2 + 2ab + b^2$.

III°. Ce ſera la même choſe, ſi la racine eſt compoſée de 4, de 5, de 6, &c. caracteres ou chiffres.

IV°. De ſorte qu'en général le quarré d'une quantité compoſée d'un nombre quelconque de chiffres, contiendra toujours le quarré du premier chiffre, plus le double produit du premier chiffre par le ſecond, avec le quarré du ſecond : plus le double produit des deux premiers chiffres par le troiſiéme, avec le quarré du troiſiéme : plus le double produit des trois premiers chiffres par le quatriéme, avec le quarré du quatriéme ; & ainſi du reſte.

*Propoſition III.*

169. Le cube d'un nombre quelconque renferme toutes les mêmes parties que celui d'une quantité algébrique ; ſçavoir,

I°. Le cube d'un nombre compoſé de deux chiffres contient le cube du premier chiffre, plus le triple produit du quarré du premier chiffre par le ſecond, plus le triple produit du premier chiffre par le quarré du ſecond, & le cube du ſecond chiffre ; c'eſt ce qui eſt repréſenté par la formule $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

II°. Si le nombre eſt compoſé de trois chiffres, tel que 435, on peut conſidérer les deux premiers chiffres, (ou, ſi l'on veut, les deux derniers) comme ne faiſant qu'un ſeul terme ; & en conſéquence l'on doit faire ici une remarque toute ſemblable à celle que nous avons faite pour le quarré.

III°. On doit dire la même choſe, ſi la racine eſt compoſée de 4, de 5, de 6, &c. caracteres ou chiffres.

IV°. De ſorte qu'en général le cube d'une quantité compoſée d'un nombre quelconque de chiffres renfermera, 1°. le cube du premier chiffre, plus le triple produit du quarré du premier chiffre par le ſecond, plus le triple produit du premier chiffre par le quarré du ſecond, avec le cube de ce ſecond chiffre. 2°. Il contiendra le triple produit du quarré des

des deux premiers chiffres par le troiſiéme, plus le triple produit des deux premiers chiffres par le quarré du troiſiéme, avec le cube de ce troiſiéme chiffre. 3°. Il renferme auſſi le triple produit du quarré des trois premiers chiffres par le quatriéme, plus le triple produit des trois premiers chiffres par le quarré du quatriéme, avec, &c.

*Propoſition IV.*

170. On peut déterminer d'une maniere toute ſemblable les parties qui compoſent la quatriéme, la cinquiéme, la ſixiéme, en un mot la puiſſance quelconque d'une racine compoſée de deux, de trois, de quatre, ou en général d'un nombre quelconque de chiffres. Mais nous nous arrêtons ici principalement aux ſecondes & troiſiémes puiſſances.

*Corollaire I.*

171. Si l'on partage en tranches un quarré dont la racine eſt compoſée de pluſieurs chiffres; la premiere tranche à gauche renferme le quarré du premier chiffre: le reſte de la premiere tranche, (s'il y en a un, après en avoir ôté le quarré du premier chiffre) joint à la ſeconde tranche, renferme le double produit du premier chiffre par le ſecond, avec le quarré du ſecond: le reſte de la ſeconde tranche, (s'il y en a un, après avoir ſouſtrait des deux premieres tranches le quarré des deux premiers chiffres) joint à la troiſiéme tranche, contient le double produit des deux premiers chiffres par le troiſiéme, avec le quarré du troiſiéme.

*Corollaire II.*

172. Pareillement, ſi l'on partage en tranches un cube dont la racine contienne pluſieurs chiffres; la premiere tranche à gauche renfermera le cube du premier chiffre: le reſte de la premiere tranche, (s'il y en a un, après en avoir ôté le cube du premier chiffre) joint à la ſeconde tranche, contien-

dra le triple produit du quarré du premier chiffre par le ſecond, plus le triple produit du premier chiffre par le quarré du ſecond, avec le cube du ſecond chiffre: le reſte de la ſeconde tranche, (s'il y en a un, après avoir ſouſtrait des deux premieres tranches le cube des deux premiers chiffres) joint à la troiſiéme tranche, renfermera le triple produit du quarré des deux premiers chiffres par le ſecond, plus, &c.

*Remarque.*

173. Toutes ces parties qui compoſent une puiſſance, ſont diſtinguées en Algébre par l'interpoſition des ſignes + & —; mais on les diſtingue dans les nombres par le rang que tiennent les chiffres dans la puiſſance; *par ex :* dans le quarré d'un nombre compoſé de trois chiffres, & qui aura par conſéquent trois tranches, le quarré du premier chiffre ſera dans la premiere tranche à gauche: le double produit du premier chiffre par le ſecond ſera au premier rang de la ſeconde tranche, & le quarré du ſecond chiffre au ſecond rang de la même tranche: le double produit des deux premiers chiffres par le troiſiéme ſera au premier rang de la troiſiéme tranche, & le quarré du troiſiéme chiffre au ſecond rang de la même tranche. C'eſt ce que l'on peut voir dans le quarré 294849 du nombre 543, dans lequel vous trouverez tous les produits ci-deſſus dénommés, de façon qu'ils avancent tous les uns ſur les autres d'un rang ſur la droite :

| | | | |
|---|---|---|---|
| Quarré de 5 . . . . . | 25 . . . . | I. | tranches. |
| Doub. prod. de 5 × 4. | 40 . . . | I. & II. | |
| Quarré de 4 . . . . . | 16 . . | II. | |
| Doub. prod. de 5 4 × 3 | 324 . | II. & III. | |
| Quarré de 3 . . . . . | 9 | III. | |
| | 294849 quarré de 543 | | |

*Corollaire III.*

174. Il ſuit donc qu'une puiſſance quelconque compoſée de pluſieurs tranches étant donnée, on pourra toujours trouver dans la ſuite de ces tranches les différentes parties qui compoſent la puiſſance donnée.

*REGLES.*

175. De tout ce que nous avons dit on peut déduire les regles ſuivantes:

I°. Pour trouver le premier chiffre de la racine d'une puiſſance donnée, il n'y a qu'à extraire immédiatement de la premiere tranche la racine propoſée.

II°. On trouvera le ſecond chiffre de la racine, en diviſant le reſte de la premiere tranche, (s'il y en a un, après en avoir ſouſtrait le quarré du premier chiffre déjà trouvé) joint au premier chiffre de la ſeconde tranche, par l'expoſant de la puiſſance, & puis en le diviſant encore par le chiffre déjà trouvé à la racine, mais élevé à un degré moindre d'une unité que celui de la puiſſance; ou tout d'un coup, par le produit fait de l'expoſant de la puiſſance propoſée, par la puiſſance du terme déjà trouvé, moindre d'un degré que la puiſſance propoſée.

III°. Pour trouver le troiſiéme chiffre de la racine, on doit diviſer le reſte des deux premieres tranches, (s'il y en a un, après en avoir ſouſtrait le quarré des deux chiffres déjà trouvés) joint au premier chiffre de la troiſiéme tranche, & par l'expoſant de la puiſſance, & par les deux chiffres déjà trouvés & élevés à une puiſſance moindre d'un degré que la puiſſance donnée.

IV°. On trouvera le quatriéme, le cinquiéme, & tous les termes ſuivans par la même méthode.

*Remarque I.*

176. Lorſqu'on ne peut pas ſouſtraire des tran-

ches ſur leſquelles on a opéré, la puiſſance requiſe du chiffre ou des chiffres trouvés à la racine, c'eſt une marque que le dernier chiffre écrit à la racine eſt trop grand : en ce cas il faut le diminuer d'une unité, & le diminuer toujours d'une unité, juſqu'à ce que cette ſouſtraction devienne poſſible.

*Remarque II.*

177. Dans l'extraction des racines, ſi le membre de diviſion ſur lequel on opere ne peut pas être diviſé par le diviſeur dont on ſe ſert, il faut écrire zero à la racine, comme on l'écrit au quotient dans la diviſion afin de faire garder aux chiffres le rang qu'ils doivent avoir.

PROBLÊME I.

178. *Extraire la Racine quarrée d'un Nombre donné* 214369.

SOLUTION. Partagez le nombre donné en tranches de deux chiffres chacune ; vous aurez trois tranches : il y aura donc trois chiffres à la racine.

$$\begin{array}{l|l} 21'\ 43'\ 69 & a^2+2ab+b^2 \\ \hline 16 & \int 463 \\ \hline 5'\ 4 & \\ 21\ 16 & \\ \hline 27'\ 6 & \\ 214369 & \\ \hline 000000 & \end{array}$$

I°. Cherchez le plus grand quarré contenu dans la premiere tranche 21, lequel eſt 16 dont la racine eſt 4 ; écrivez 4 au quotient, & retranchez le quarré 16 de 21 pour avoir le reſte 5.

II°. A côté du reſte 5 abaiſſez le premier chiffre 4 de la tranche ſuivante, & vous aurez pour membre de diviſion 54 : diviſez 54 par l'expoſant 2 de la puiſſance & par la premiere puiſſance du chiffre 4 déjà trouvé à la racine ; ou plutôt, diviſez 54

par $2 \times 4 = 8$; & le quotient eſt 6. Or pour s'aſſurer que le chiffre 6 trouvé pour la racine eſt bon, il ne ſuffit pas de l'éprouver ſelon la méthode propre à la diviſion; c'eſt-à-dire, qu'il ne ſuffit pas que le produit du quotient 6 par le diviſeur 8 puiſſe être ſouſtrait du membre de diviſion 54; mais il faut l'éprouver ſuivant la méthode propre à l'extraction des racines, qui conſiſte à élever au quarré les deux chiffres 46 déjà trouvés pour la racine, & à retrancher leur quarré 2116 des deux premieres tranches; la ſouſtraction eſt ici poſſible: écrivez donc 6 à la racine, & le reſte 27 ſous le quarré 2116.

III°. A côté du reſte 27 abaiſſez le premier chiffre 6 de la troiſiéme tranche, & diviſez 276 par l'expoſant 2 de la puiſſance, & encore par la premiere puiſſance du nombre 46 déjà trouvé à la racine; ou plutôt, diviſez par $2 \times 46 = 92$, en diſant, en 27 combien de fois 9? trois fois: écrivez 3 au quotient; enſuite élevez le nombre trouvé 463 au quarré pour le ſouſtraire des trois tranches; après la ſouſtraction il ne reſte rien: ce qui dénote que le chiffre 3 eſt bon, & que la racine trouvée eſt la véritable.

*Remarque.*

179. La ſolution précédente eſt une application de la méthode générale que nous avons donnée ci-deſſus. On peut la ſimplifier pour l'extraction des racines quarrées de cette maniere :

$$\begin{array}{l|l} 21'\ 43'\ 69 & a^2 + 2ab + b^2 \\ \hline 16 & 463 \\ \hline 5'\ 43 & \\ \quad 86 & \\ \hline 5'\ 16' & \\ \quad 27'\ 69 & \\ \quad 9\ 23 & \\ \hline \quad 2769 & \\ \hline \quad 0000 & \end{array}$$

Après avoir trouvé 4 à la racine & ſouſtrait le quarré 16 de la premiere tranche, ce qui donne le reſte 5 :

I°. A côté du reſte 5 abaiſſez la ſeconde tranche toute entiere, & vous aurez pour membre de diviſion 543, qu'il faut diviſer par $2 \times 4 = 8$, comme nous venons de le dire ; écrivez le diviſeur 8 ſous le premier chiffre de la tranche abaiſſée, & dites : en 54 combien de fois 8 ? ſix fois ; écrivez 6 à la racine, & à côté du diviſeur 8 ; puis multipliez 86 par 6, & vous aurez 516 ; ( ce produit 516 renferme, comme il eſt aiſé de le voir, le double produit du premier chiffre 4 par le ſecond 6, plus le quarré de 6 plus avancé d'un rang vers la droite ; c'eſt-à-dire, que $86 \times 6 = 480 + 36 = 516$ ) retranchez ce produit du membre de diviſion, & il reſtera 27.

II°. A côté du reſte 27 abaiſſez la troiſiéme tranche, & prenez pour diviſeur $2 \times 46 = 92$, c'eſt-à-dire, le double du nombre 46 déjà trouvé à la racine ; écrivez le diviſeur 92 ſous le membre à diviſer, de façon que le dernier chiffre 2 du diviſeur réponde au premier chiffre 6 de la tranche abaiſſée, & dites : en 27 combien de fois 9 ? trois fois ; écrivez 3 au quotient, & à côté du diviſeur, & faites le reſte comme ci-deſſus.

Pour l'extraction des autres racines, la méthode générale que nous avons donnée eſt plus ſimple & plus intelligible que les autres méthodes dont on pourroit ſe ſervir.

## PROBLÊME II.

180. *Extraire la Racine cubique d'un nombre donné* 47437928.

SOLUTION. Je partage le nombre donné en tranche qui contiennent chacune trois chiffres ( excepté la premiere à gauche, qui peut en contenir moins ) il y a trois tranches, il y aura donc trois chiffres à la racine.

$$\begin{array}{r|l} 47'\ 437'\ 928 & a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\ \hline 27 & 362 \\ \hline 20'\ 4 & \\ 46'\ 656 & \\ 781,9 & \\ 47437928 & \\ \hline 000000000 & \end{array}$$

I°. Je cherche le plus grand cube contenu dans 47, c'eſt 27, dont la racine cubique eſt 3; je l'écris au quotient, & je ſouſtrais 27 de 47; reſte 20, à côté duquel j'abaiſſe le premier chiffre de la ſeconde tranche; ce qui me donne le nouveau membre de diviſion 204.

II°. Je diviſe ce membre & par l'expoſant 3 de la puiſſance, & par la ſeconde puiſſance 9 de la racine 3 déjà trouvée, (laquelle puiſſance eſt moindre d'un degré que la propoſée) ou, ce qui revient au même, je diviſe par $3\times 9=27$, diſant en 204 combien de fois 27, ou en 20 combien de fois 2? il y eſt 9 fois: mais le 9 n'eſt pas bon ſuivant la diviſion; car le produit $27\times 9=243$ ne peut pas être ſouſtrait du dividende 204. Le 8 n'eſt pas bon pour la même raiſon. Le 7 eſt bon ſuivant la diviſion; car le produit $27\times 7=189$ peut être ſouſtrait du dividende 204; mais il n'eſt pas bon ſelon l'extraction des racines: car le cube des deux chiffres 37 qui ſe trouveroient à la racine ne pourroit pas être ſouſtrait des deux premieres tranches. Mais je trouve que le 6 eſt bon; je l'écris donc à la racine, & j'éleve au cube le quotient 36 déjà trouvé, & je ſouſtrais ce cube (qui eſt 46656) des deux premieres tranches; le reſte eſt 781, à côté duquel j'abaiſſe le premier chiffre 9 de la troiſiéme tranche; ce qui me donne 7819 pour membre de diviſion.

III°. Je diviſe ce nouveau membre & par l'ex-

poſant 3 de la troiſiéme puiſſance donnée, & par la ſeconde puiſſance 1296 des deux chiffres 36 déjà trouvés à la racine; ou plutôt, par le triple du quarré de 36, ou par $3 \times 1296 = 3888$, diſant en 7819 combien de fois 3888, ou en 7 combien de fois 3? deux fois. J'écris à la racine le chiffre 2, lequel eſt bon, & ſelon la diviſion; car le produit $2 \times 3888$ peut être ſouſtrait du dividende: & ſelon l'extraction des racines; car élevant au cube tout le quotient trouvé pour la racine, & retranchant ce cube de la puiſſance donnée, il ne reſte rien: ce qui dénote que la racine trouvée eſt juſte, & que l'opération eſt finie.

La démonſtration de toutes ces regles eſt aiſée à appercevoir, après ce que nous avons dit ci-deſſus de l'extraction des racines, laquelle eſt une *déco*m*poſition* des puiſſances, & dont les regles ſe déduiſent de la nature & de la *compoſition* même des puiſſances.

## SECTION II.

### *Du Calcul des Rapports des Quantités, ou de l'Analogie & des Proportions.*

I°. DANS la ſouſtraction, ſi l'on compare la quantité dont on veut ſouſtraire, avec celle que l'on veut ſouſtraire, la maniere d'être d'une de ces quantités par rapport à l'autre, s'appelle *Raiſon* ou *Rapport*, & ce rapport eſt exprimé par la *Différence*. Pareillement dans la diviſion, ſi l'on compare le *dividende* avec le *diviſeur*, ces deux quantités ont auſſi une maniere d'être, ou un *rapport*, qui eſt exprimé par le *quotient*.

II°. On appelle donc *rapport* ou *raiſon*, la maniere d'être d'une grandeur par rapport à une autre grandeur, laquelle ſe connoît ou par la *différence*, ou par le *quotient* que l'on trouve en comparant les deux grandeurs.

III°. Les rapports des grandeurs ou quantités peuvent être ſoumis au calcul, auſſi bien que les grandeurs elles-mêmes ; parce que ces rapports étant ſuſceptibles de plus & de moins, peuvent admettre les mêmes combinaiſons que les quantités elles-mêmes.

IV°. Les rapports ſont ou de termes connus avec des termes connus, ou de termes connus avec des termes inconnus : dans le premier cas, le calcul conſiſte dans la comparaiſon des quantités connues, & s'appelle *Calcul des Rapports*, ou *Analogie* : dans le ſecond cas il conſiſte à découvrir des quantités inconnues par le moyen de celles qui ſont connues, & on l'appelle *Calcul analytique*, ou *Analyſe*. Nous allons parler de l'un & de l'autre.

## CHAPITRE I.

### *De l'Analogie, & des Proportions.*

SI l'on compare enſemble deux quantités pour connoître combien de fois l'une eſt contenue dans l'autre, ou de combien l'une ſurpaſſe l'autre, ou aura un *rapport*, ou une *raiſon* : ſi deux raiſons ſont égales, cette égalité s'appelle *Analogie* ou *Proportion* : ſi on a une ſuite de raiſons égales, cette ſuite s'appelle *Progreſſion* : ſi la progreſſion eſt continuée à l'infinie, elle s'appelle *Suite*, *Serie*, ou *Progreſſion infinie*. Nous allons parler, 1°. des raiſons ;

2°. des proportions ; 3°. des progreſſions ; 4°. des ſéries ou progreſſions infinies.

## ARTICLE I.

### *Des Raiſons.*

Une raiſon eſt, comme nous l'avons déjà dit, la maniere d'être de deux grandeurs ou quantités que l'on compare entr'elles, pour en connoître, ſoit la différence, ſoit le quotient. Toutes les quantités homogênes ont entr'elles un rapport, ou une raiſon, parce qu'elles ont toujours ou une différence, ou un quotient ; 6 & 8 ont une différence qui eſt 2 ; 12 & 4 ont un quotient qui eſt 3 : cette différence ou ce quotient s'appelle *Valeur* ou *Expoſant* de la raiſon. Il eſt à remarquer,

I°. Que toute raiſon eſt compoſée de deux termes : car il ne peut y avoir de comparaiſon qu'entre deux termes ; le premier s'appelle *Antécédent*, le ſecond s'appellent *Conſéquent*.

II°. Que toute raiſon eſt ou *Arithmétique* ou *Géométrique*. La raiſon arithmétique eſt celle où l'on cherche la différence, ou l'excès dont l'antécédent ſurpaſſe le conſéquent, & on l'exprime ainſi ; 5. 2, 7. 3, *a. b*, *c. f.* &c. La raiſon géométrique eſt celle où l'on cherche combien de fois, ou comment le conſéquent eſt contenu dans l'antécédent, & on l'exprime ainſi ; 2 : 3, 3 : 4, 5 : 9, *a* : *b*, &c. ou bien de cette maniere, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{a}{b}$, &c. La valeur de la raiſon arithmétique eſt la différence du conſéquent ſouſtrait de l'antécédent ; & la valeur de la raiſon géométrique eſt le quotient de l'antécédent diviſé par le conſéquent. Nous parlerons ici ſur-tout des raiſons géométriques.

III°. Que deux raiſons qui ont une même valeur, ſont toujours égales, *par ex :* les raiſons géométri-

ques 8 : 4 & 6 : 3 ſont égales, car 8 : 4, ou $\frac{8}{4} = 2$; pareillement 6 : 3, ou $\frac{6}{3} = 2$.

IV°. Que les raiſons prennent différens noms, ſuivant le rapport de l'antécédent au conſéquent. La raiſon 2 : 1, s'appelle raiſon *double*; celle de 3 : 1, s'appelle raiſon *triple*; celle de 4 : 1, raiſon *quadruple*, &c. Celle de 1 : 2, s'appelle raiſon *ſous-double*; celle de 1 : 3, raiſon *ſous-triple*, &c. Celle de 3 : 2, raiſon *ſeſqui-altere*. En un mot les Géométres ont donné des noms à chaque eſpéce de raiſons pour les diſtinguer. De plus la raiſon géométrique s'appelle raiſon d'*Égalité*, lorſque l'ancécédent & le conſéquent ſont égaux; *par ex :* 2 : 2, 3 : 3, *a : a*, *b : b*, &c. Elle s'appelle raiſon d'*Inégalité*, lorſque l'antécédent & le conſéquent ſont inégaux; *par ex :* 3 : 4, *a : b*, &c.

*Propoſition I.*

181. *Toute raiſon géométrique eſt, ou ſimple, ou compoſée.*

Démonstration. On appelle raiſon *ſimple* le rapport qui ſe trouve entre deux quantités ſimplement : on appelle raiſon *compoſée* le produit de deux raiſons ſimples multipliées l'une par l'autre, antécédent par antécédent, & conſéquent par conſéquent; *par ex :* la raiſon $\frac{2}{5}$ eſt ſimple; mais ſi j'ai *par ex :* les deux raiſons ſimples $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{5}$ & ſi je les multiplie l'une par l'autre, antécédent par antécédent, conſéquent par conſéquent, pour avoir $\frac{2}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{2\times3}{4\times5} = \frac{6}{20}$; la raiſon $\frac{6}{20}$ eſt dite être *compoſée* des deux raiſons ſimples $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{5}$ : pareillement la raiſon $\frac{abd}{cef}$ eſt compoſée de trois raiſons ſimples $\frac{a}{c}, \frac{b}{e}, \frac{d}{f}$.

*Propoſition II.*

182. *Toute Raiſon ſimple eſt, ou* directe, *ou* réciproque.

Démonstration. La raiſon géométrique s'appelle *directe*, lorſque deux quantités telles que *a* & *b* ſont entr'elles comme deux autres quantités, *par ex : 6* & *3*, priſes dans le même ordre, c'eſt-à-dire, lorſque *a* eſt double de *b*, de même que *6* eſt double de *3*. Au contraire la raiſon eſt dite être *réciproque*, ou *indirecte*, ou *renverſée*, lorſque les deux quantités *a* & *b* ſont entr'elles comme deux autres *6* & *3*, mais priſes dans un ordre renverſé; c'eſt-à-dire, lorſque *a* & *b* ſont entr'eux, non comme *6* & *3*; mais comme *3* & *6*, ou que *a* n'eſt que la moitié de *b*, de même que *3* n'eſt que la moitié de *6*.

*Propoſition III.*

183. Toute raiſon compoſée de raiſons ſimples & inégales, s'appelle ſimplement raiſon *compoſée*, ou raiſon *multiple*; telle eſt la raiſon $\frac{6}{20}$, laquelle eſt compoſée de deux raiſons, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{5}$, inégales entr'elles : mais une raiſon compoſée de raiſons égales s'appelle autrement; ſçavoir, une raiſon compoſée de deux raiſons égales s'appelle *doublée; par ex :* la raiſon $\frac{4}{9}$ eſt doublée des raiſons $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}$; une raiſon compoſée de trois raiſons égales s'appelle *triplée; par ex :* la raiſon $\frac{8}{27}$ eſt triplée des raiſons $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}$; une raiſon compoſée de quatre raiſons égales s'appelle *quadruplée*; & ainſi du reſte.

*Propoſition IV.*

184. *Toute Raiſon compoſée eſt, ou* directement, *ou* indirectement *compoſée.*

Démonstration. En effet,

I°. Si je multiplie les deux raiſons $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{5}$, l'une par l'autre, antécédent par antécédent; conſéquent par

conſéquent, pour avoir la raiſon compoſée $\frac{6}{20}$; cette raiſon $\frac{6}{20}$ s'appelle raiſon *directement compoſée* des deux raiſons ſimples ou *compoſantes* $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{5}$.

II°. Mais ſi je multiplie les deux raiſons $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{5}$, l'une par l'autre; multipliant, non l'antécédent par l'antécédent, & le conſéquent par le conſéquent, mais l'antécédent de l'une par le conſéquent de l'autre, & le conſéquent de l'une par l'antécédent de l'autre; la raiſon qui en réſultera ſera $\frac{10}{12}$, & s'appelle raiſon *réciproquement compoſée* des deux raiſons compoſantes $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{5}$.

*Propoſition V.*

185. *Si les raiſons ſimples ou compoſantes ſont égales entr'elles, la Raiſon qui en ſera réciproquement compoſée, ſera une Raiſon d'égalité.*

Démonstration. Soient les deux raiſons égales $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$; la raiſon qui en ſera réciproquement compoſée, ſera la raiſon $\frac{12}{12}$, qui eſt une raiſon d'égalité: ce qui arrive à cauſe de la compenſation qui ſe trouve entre les multiplicateurs & les multiplicandes dans le cas des raiſons égales, compenſation d'où réſultent des produits égaux.

Cette propoſition ſera énoncée dans la ſuite ſous d'autres expreſſions, lorſque nous dirons que dans toute proportion géométrique le *produit des extrêmes eſt égal au produit des moyens.*

*Corollaire I.*

186. Toute fraction eſt, & doit être regardée comme une raiſon géométrique: en effet, la *fraction*, la *raiſon*, la *diviſion*, ne ſont rien autre choſe que trois points de vue différents qui appartiennent à une même choſe. La *fraction* eſt le rapport d'une partie à ſon tout: la *raiſon* eſt le rapport d'un tout à un autre tout: La *diviſion* eſt l'opération dont on ſe ſert pour connoître le rapport, ou pour connoître

la valeur ſoit de la raiſon, ſoit de la fraction. C'eſt pourquoi.

I°. Comme une *fraction* eſt d'autant plus grande que ſon numérateur eſt plus grand, le dénominateur reſtant le même; ou que ſon dénominateur eſt plus petit, le numérateur reſtant le même; de même la *raiſon* eſt d'autant plus grande que ſon antécédent eſt plus grand, le conſéquent reſtant le même; ou que ſon conſéquent eſt plus petit, l'antécédent reſtant le même.

II°. Et c'eſt pour cette raiſon que l'on dit que les valeurs des raiſons géométriques ſont entr'eux en *raiſon directe* des antécédents & en *raiſon réciproque* des conſéquents; & pareillement que les valeurs des fractions ſont en *raiſon directe* des numérateurs, & en *raiſon réciproque* des dénominateurs.

*Corollaire II.*

187. Tous les nombres pris deux à deux ont entr'eux une raiſon géométrique; parce que l'un eſt toujours contenu un certain nombre de fois dans l'autre: ce *combien de fois* eſt exprimé par un troiſiéme nombre que l'on appelle *partie aliquote, meſure commune, quotient, ſous-multiple.* Tous les nombres pris deux à deux ont donc une partie aliquote qui leur ſert de meſure commune; ſçavoir, l'unité au moins, & alors on les appelle quantités *commenſurables*, ou *rationelles.*

C'eſt pourquoi deux quantités commenſurables ſont toujours entr'elles comme nombre à nombre; *par ex:* comme 2 : 3, ou comme 4 : 5, ou, &c. parce que leur rapport peut toujours être exprimé par deux nombres.

Mais il y a des quantités qui n'ont point de partie aliquote, aucune meſure commune: alors ces quantités s'appellent *incommenſurables*, ou *irrationelles;* parce que l'on ne peut connoître le rapport

de deux quantités, qu'autant qu'elles peuvent être exprimées ou repréſentées par des nombres.

## ARTICLE II.

### *Des Proportions.*

La proportion eſt l'égalité de deux raiſons : une raiſon renferme deux termes, ſçavoir, l'antécédent & le conſéquent ; d'où il ſuit que la proportion renferme quatre termes, ſçavoir, deux antécédens & deux conſéquens. Le premier & le dernier terme s'appellent *Extrêmes ;* les deux termes intermédiaires s'appellent *Moyens.* La proportion eſt, ou *arithmétique* ou *géométrique :* la proportion arithmétique eſt l'égalité de deux raiſons arithmétiques ; la proportion géométrique eſt l'égalité de deux raiſons géométriques.

### LEMME I.

188. *Dans tout Rapport arithmétique, le Conſéquent eſt égal à l'Antécédent augmenté ou diminué de la différence qui ſe trouve entre les deux termes : augmenté, ſi l'Antécédent eſt plus petit que le Conſéquent : diminué, s'il eſt plus grand que le Conſéquent.*

DÉMONSTRATION. Dans le rapport arithmétique 8. 2, dont la différence eſt 6, il eſt évident que le conſéquent 2 eſt égal à l'antécédent 8 diminué de la différence 6, ou que l'on a $2 = 8 - 6$ : de même dans le rapport arithmétique 2. 8, dont la différence eſt encore 6, on aura le conſéquent $8 = 2 + 6$. Pareillement ſi les deux termes $a$ & $b$ ont pour différence $d$ ; dans le rapport $a \cdot b$ on aura $b = a + d$, ou $b = a - d$, ſelon que $a$ ſera plus petit, ou plus grand que $b$.

### *Corollaire.*

189. Donc en ſuppoſant que l'antécédent ſoit re-

préſenté par $a$, & la différence par $d$, le conſéquent ſera $a \pm d$. D'où il ſuit que toute raiſon arithmétique pourra être repréſentée par cette expreſſion, ou formule générale, $a$, $a \pm d$.

### Lemme II.

190. *Dans toute Proportion arithmétique, il regne une même différence entre l'Antécédent & le Conſéquent dans chacune des deux raiſons.*

Demonstration. Dans une proportion arithmétique les deux raiſons ſont égales, & ont une même valeur : or la valeur d'une raiſon arithmétique conſiſte dans la différence des deux termes; donc il regne une même différence dans les deux raiſons ; & par conſéquent ſi la différence de la premiere raiſon eſt exprimée par $d$, celle de la ſeconde ſera auſſi exprimée par $d$.

*Corollaire.*

191. Donc en ſuppoſant que $a$ repréſente le premier antécédent, $c$ le ſecond, & $d$ la différence qui regne dans chacune des deux raiſons; la proportion arithmétique pourra ſe repréſenter par cette expreſſion, ou formule générale, $a \cdot a \pm d :: c. c \pm d$.

### Théorême I.

192. *Dans une Proportion arithmétique la Somme des Extrêmes eſt égale à la Somme des Moyens.*

Démonstration. Soit la proportion arithmétique $a \cdot b :: c \cdot f$; par le corollaire précédent cette proportion peut ſe repréſenter par cette expreſſion générale $a \cdot a \pm d :: c \cdot c \pm d$; or la ſomme des extrêmes $a + c \pm d = c + a \pm d$, ſomme des moyens comme il eſt évident.

*Corollaire I.*

193. Dans une proportion arithmétique *continue*; c'eſt-à-dire,

c'eſt-à-dire, dans laquelle un même terme eſt tout à la fois *conſéquent* de la premiere, & *antécédent* de la ſeconde raiſon, comme dans la proportion $3 \cdot 2 \therefore 2 \cdot 1$, (laquelle s'exprime d'une maniere abrégée par $\overset{\cdot\cdot}{\cdot} 3 \cdot 2 \cdot 1$,) la ſomme des extrêmes eſt double du moyen terme; car $3 + 1 = 2 + 2$.

*Corollaire II.*

194. Dans une proportion arithmétique, ſi l'un des quatre termes; *par ex :* le dernier, eſt inconnu, il ſera aiſé de le trouver : ainſi dans la proportion $8 \cdot 6 \therefore 4 \cdot x$, le dernier terme inconnu $x$ eſt 2 : car (192) $8 + x = 6 + 4$; donc ſi de la ſomme $6 + 4 = 10$, on retranche le terme 8, le reſte 2 ſera la valeur du terme inconnu $x$.

LEMME III.

195. *Dans une Raiſon géométrique, le Conſéquent eſt toujours égal à l'Antécédent diviſé par le Quotient de la Raiſon.*

DÉMONSTRATION. Dans la raiſon géométrique $12 : 4$, ou $\frac{12}{4}$, dont le quotient eſt 3, on aura le conſéquent $4 = \frac{12}{3}$; pareillement dans la raiſon $4 : 12$, ou $\frac{4}{12}$, dont le quotient eſt $\frac{1}{3}$, on aura le conſéquent 12 égal à 4 diviſé par $\frac{1}{3}$, ou $12 = \frac{4}{\frac{1}{3}} = \frac{4 \times 1}{1} = 4 \times 3 = 12$. La raiſon eſt qu'une raiſon géométrique eſt une diviſion : or dans une diviſion le diviſeur eſt toujours égal au dividende diviſé par le quotient.

*Corollaire.*

196. Donc ſi on ſuppoſe que l'antécédent de la raiſon géométrique ſoit $a$; & que le quotient ſoit $\frac{1}{p}$, le conſéquent ſera $ap$, & toute raiſon géométrique pourra être repréſentée par cette expreſſion, ou formule générale, $a : ap$.

## Lemme IV.

197. *Dans toute Proportion géométrique, il regne un même Quotient dans la premiere & dans la ſeconde Raiſon.*

Demonstration. Les deux raiſons d'où réſulte la proportion géométrique, ſont égales; donc elles ont une même valeur : or cette valeur conſiſte dans le quotient; donc elles ont un même quotient; & par conſéquent ſi le quotient de la premiere raiſon s'exprime par $\frac{1}{p}$, le quotient de la ſeconde raiſon doit auſſi s'exprimer par $\frac{1}{p}$.

*Corollaire.*

198. Donc en ſuppoſant que $a$ repréſente l'antécédent de la premiere raiſon, $c$ l'antécédent de la ſeconde, & $\frac{1}{p}$ le quotient des deux raiſons; toute proportion géométrique pourra être repréſentée par cette expreſſion, ou formule générale, $a : ap :: c : cp$.

## Théorême II.

199. *Dans toute Proportion géométrique le Produit des Extrêmes eſt égal au Produit des Moyens.*

Démonstration. Soit la proportion géométrique $a : b :: c : f$; cette proportion peut être repréſentée, comme nous venons de le dire, par cette expreſſion, $a : ap :: c : cp$; or dans cette proportion le produit des extrêmes $acp = cap$ produit des moyens.

## Théorême III.

200. *Réciproquement, lorſqu'on a quatre Termes, tels que le produit des Extrêmes ſoit égal au produit des Moyens, les quatre Termes ſont en proportion géométrique.*

DÉMONSTRATION. Soient les quatre termes $a$, $c$, $ap$, $cp$, tels que le produit des extrêmes $acp = cap$ produit des moyens; il en réſultera la proportion $a : ap :: c : cp$, qui eſt juſte; car les deux raiſons ont un même quotient $\frac{1}{p}$; donc, &c.

*Corollaire I.*

201. Toutes les fois que l'on a deux produits égaux, on en peut toujours conclure une proportion, en prenant pour extrêmes de la proportion les deux racines d'un des produits, & pour moyens les deux racines de l'autre produit; *par ex :* de ce que l'on a $acp = cap$, on en peut conclure $a : ap :: c : cp$, comme il eſt évident. Cette égalité entre le produit des extrêmes, & celui des moyens s'appelle *Equation.* Il eſt donc toujours poſſible de déduire une *équation* d'une proportion donnée, & réciproquement de conclure *une proportion* d'une *équation* donnée.

*Corollaire II.*

202. Dans toute proportion géométrique *continue; par ex : a : b :: b : c*, (laquelle s'exprime d'une maniere abrégée par $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot} a : b : c$,) le produit des extrêmes eſt égal au quarré du moyen terme; ce qui eſt évident.

Ce terme moyen entre les deux extrêmes s'appelle *Moyen proportionnel.* Or, ſi l'on a un produit $ab$ compoſé de deux racines $a$ & $b$, & qu'on prenne un moyen proportionnel $x$ entre $a$ & $b$, le quarré du moyen terme ſera égal au produit des racines; car par l'hypothèſe $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot} a : x : b$; donc $xx = ab$.

*Corollaire III.*

203. Dans une proportion géométrique, on peut changer l'ordre & l'arrangement des termes qui la compoſent; pourvu que le changement ſoit tel, que

le produit des extrêmes reſte toujours égal au produit des moyens. On a donné à ces changemens différens noms que voici : ſoit la proportion

$$a : b :: c : d.$$

I°. Le premier changement que l'on peut faire dans cette proportion, s'appelle *alternando*, & conſiſte à mettre les moyens à la place l'un de l'autre,

$$a : c :: b : d.$$

II°. Le ſecond changement s'appelle *invertendo*, & conſiſte à mettre les moyens à la place des extrêmes

$$b : a :: d : c.$$

Dans ce changement on peut introduire encore le changement *alternando*, ce qui donnera une autre combinaiſon.

III°. Le troiſiéme changement s'appelle *permutando*, & conſiſte à mettre les extrêmes à la place l'un de l'autre, $d : b :: c : a.$

Dans ce changement on peut encore introduire les changemens *alternando* & *invertendo*; ce qui donnera d'autres combinaiſons.

IV° Le quatriéme changement ſe fait, ſoit en ajoutant les conſéquens aux antécédens, ou les antécédens aux conſéquens; ce qui s'appelle *addendo* ou *componendo*.

$$a+b : b :: c+d : d$$
$$a : a+b :: c : c+d$$

Soit en retranchant les antécédens des conſéquens, ou les conſéquens des antécédens; ce qui s'appelle *ſubſtrahendo* ou *dividendo*.

$$a-b : b :: c-d : d$$
$$a : b-a :: c : d-c.$$

*Corollaire IV.*

204. Si deux quantités ſont multipliées, ou diviſées par une même troiſiéme quantité, les produits ou les quotiens auront entr'eux la même raiſon qu'avoient les racines ou les dividendes.

DÉMONSTRATION. Si l'on multiplie les racines $a$, $b$, par une même troiſiéme quantité $m$; les produits $am$, $bm$, ſeront dans le même rapport que les racines $a$, $b$, c'eſt-à-dire, qu'on aura la proportion $am : bm :: a : b$; car le produit des extrêmes eſt égal au produit des moyens, $abm = abm$. Il faut dire la même choſe, lorſqu'on diviſe deux quantités par une même troiſiéme quantité.

D'où il ſuit que les touts ſont entr'eux comme leurs parties ſemblables; c'eſt-à-dire, comme les *moitiés*, les *quarts*, les *tiers*, &c. & réciproquement. Car les parties ſemblables réſultent de la diviſion des touts par une même troiſiéme quantité, & les touts réſultent de la multiplication des parties ſemblables par une même troiſiéme quantité.

### *Corollaire V.*

205. Les produits qui ont une racine commune, ſont entr'eux comme les racines inégales; *par ex :* les produits $am$; $bm$, qui ont la racine commune $m$, ſont entr'eux comme les racines inégales $a$ & $b$ : c'eſt une ſuite évidente du corollaire précédent.

### *Corollaire VI.*

206. Les produits ſont en raiſon compoſée de leurs racines; les quarrés ſont en raiſon doublée des racines; les cubes ſont en raiſon triplée des racines; les quatriémes puiſſances ſont en raiſon quadruplée des racines; les cinquiémes puiſſances, &c.

Ou ce qui revient au même:

I°. Une raiſon compoſée eſt égale à la raiſon qu'ont entr'eux les produits qui réſultent des raiſons compoſantes, multipliées les unes par les autres; *par ex :* la raiſon $\frac{ab}{cd}$, qui eſt compoſée des

raiſons ſimples $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{d}$, eſt $= \frac{a \times b}{c \times d}$, produit des raiſons ſimples compoſantes.

II°. Une raiſon doublée eſt égale à la raiſon qu'ont entr'eux les quarrés des termes de l'une ou l'autre des deux raiſons compoſantes ; *par ex :* ſi l'on a deux raiſons égales $a : ap :: b : bp$ ; la raiſon doublée de ces deux raiſons eſt $ab : abpp$ ; or l'on aura $ab : abpp :: aa : aapp$ ; ou bien $ab : abpp :: bb : bbpp$ ; car dans ces proportions le produit des extrêmes eſt égal au produit des moyens.

III°. Une raiſon triplée eſt égale à la raiſon qu'ont entr'eux les cubes des termes de l'une des trois raiſons compoſantes ; ce qui ſe prouve d'une maniere toute ſemblable.

IV°. Une raiſon quadruplée eſt égale à la raiſon qu'ont entr'elles les quatriémes puiſſances des termes de l'une des quatre raiſons compoſantes. Il faut dire la même choſe des raiſons quintuplées, ſextuplées, &c.

### *Corollaire VII.*

207. Si l'on multiplie, ou ſi l'on diviſe les termes d'une proportion par les termes d'une autre proportion, les produits ou les quotiens ſeront proportionnels.

Démonstration. Si l'on multiplie les termes de la proportion $a : ap :: b : bp$ par les termes de la proportion $c : cp :: d : dp$, on aura la proportion $ac : acpp :: bd : bdpp$, qui eſt juſte ; car le produit des extrêmes $acbdpp = abcdpp$, produit des moyens : on prouveroit de même qu'en diviſant les termes d'une proportion par les termes d'une autre proportion, les quotiens ſeroient proportionnels.

Il ſuit de-là que lorſque les puiſſances ſont proportionnelles entr'elles, les racines ſont auſſi proportionnelles entr'elles, & réciproquement ; mais

les puiſſances ne ſont point proportionnelles aux racines, ni les racines aux puiſſances.

*Corollaire VIII.*

208. Dans une proportion géométrique, ſi l'un des quatre termes; *par ex :* le dernier, eſt inconnu, il ſera facile de le trouver. Soit la proportion $4 : 8 :: 6 : x$, le dernier terme inconnu $x$ ſe trouvera en prenant le produit des moyens, & en le diviſant par l'extrême connu, ce qui donnera $\frac{48}{4} = 12 = x$ : en effet de la proportion $4 : 8 :: 6 : x$, on déduit (199) $4x = 48$; & par conſéquent diviſant les deux quantités par 4, on aura $x = \frac{48}{4} = 12$; pareillement dans la proportion $a : b :: c : x$, on aura $x = \frac{bc}{a}$.

Si le terme inconnu eût été le troiſiéme, comme dans la proportion $a : b :: x : c$; on auroit de même trouvé la valeur de $x$, en prenant le produit des extrêmes, & en le diviſant par le moyen connu $b$, ce qui auroit donné $x = \frac{ac}{b}$.

Cette méthode de trouver un quatriéme terme proportionnel à trois autres, s'appelle *Regle de Trois*, dont nous parlerons plus au long dans la ſuite.

*Corollaire IX.*

209. Toutes les fois qu'on aura une proportion $a : b :: c : d$, on en pourra déduire une fraction, en diviſant le produit des moyens par un des extrêmes, ce qui donne $\frac{bc}{a}$ pour la valeur du ſecond extrême $d$, & réciproquement d'une fraction donnée $\frac{bc}{a}$, on pourra toujours tirer une proportion dont les moyens ſeront les racines $b$, $c$ du numérateur, le premier extrême ſera le dénominateur $a$, & le dernier terme ſera la fraction elle-même;

ſçavoir, $a : b :: c : \frac{bc}{a}$. Pareillement de la fraction $\frac{6}{3}$, qui eſt la même que $\frac{2\times3}{3}$, on peut déduire $5 : 2 :: 3 : \frac{6}{3}$; de la fraction $\frac{2}{3} = \frac{2\times1}{3}$, on peut conclure $3 : 2 :: 1 : \frac{2}{3}$.

## ARTICLE III.

### *Des Progreſſions.*

On appelle *Raiſon* ou *Rapport*, la maniere d'être de deux quantités à l'égard l'une de l'autre; *par ex :* $1 : 3$, $a : b$, &c. On appelle *proportion* ou *analogie*, l'égalité de deux raiſons; *par ex :* $2 : 4 :: 6 : 12$. On appelle *proportionnalité* une ſuite de pluſieurs raiſons égales; *par ex :* $2 : 4 :: 6 : 2 :: 8 : 16 :: 9 : 18$. On appelle *progreſſion* une proportionnalité continue, c'eſt-à-dire, dans laquelle chaque terme eſt en même-tems conſéquent de la raiſon précédente, & antécédent de la ſuivante, *par ex :* $2 : 4 :: 4 : 8 :: 8 : 16 :: 16 : 32$; ce qui s'écrit plus brievement de cette maniere $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$ $2 : 4 : 8 : 16 : 32$. On diſtingue deux ſortes de progreſſions, l'arithmétique & la géométrique. Nous allons parler de l'une & de l'autre.

#### THÉORÊME I.

210. *Dans une progreſſion arithmétique, il regne par-tout une même différence entre deux termes immédiatement conſécutifs.*

DÉMONSTRATION. La raiſon qui eſt du premier terme au ſecond, eſt la même que celle qui eſt du ſecond au troiſiéme; du troiſiéme au quatriéme; du quatriéme, &c.

#### *Corollaire I.*

211. Donc dans une progreſſion arithmétique chaque terme eſt égal à celui qui le précéde immédiatement, augmenté ou diminué de la différence

(188) qui regne dans la progreſſion : augmenté, ſi la progreſſion eſt croiſſante : diminué, ſi la progreſſion eſt décroiſſante.

*Corollaire II.*

212. Suppoſant que le premier terme ſoit $a$, & la différence $d$, on pourra repréſenter une progreſſion arithmétique par cette expreſſion, ou formule générale $\div a \cdot a \pm d \cdot a \pm 2d \cdot a \pm 3d \cdot a \pm 4d$, &c.

THÉORÊME II.

213. *Dans une Progreſſion arithmétique, un Terme quelconque eſt égal à la Somme faite du premier Terme & de la différence commune multipliée par le nombre des Termes précédens.*

DÉMONSTRATION. Soit la progreſſion arithmétique $\div a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f$; elle peut être repréſenté par la formule, ou expreſſion générale, $\div a \cdot a \pm d \cdot a \pm 2d \cdot a \pm 3d \cdot a \pm 4d \cdot a \pm 5d$: or le cinquiéme terme $a \pm 4d$ eſt évidemment égal au premier terme $a$, plus à la différence $d$ multipliée par 4, qui eſt le nombre des termes précédens.

*Corollaire.*

214. Il ſera facile de trouver un terme quelconque dans une progreſſion arithmétique, dans laquelle on connoîtra le premier terme $a$, la différence commune $d$, & le nombre $n$ des termes : car regardant le terme que l'on cherche, comme le dernier de la progreſſion, & le nommant $x$, le nombre des termes qui précédent celui que l'on cherche, ſera $n-1$ ; & alors le terme cherché ſera repréſenté par l'expreſſion générale & indéterminée $x = a + dn - d$, ſi la progreſſion eſt croiſſante ; ou par $x = a - dn + d$, ſi la progreſſion eſt décroiſſante. C'eſt pourquoi ſuppoſant le premier terme $a = 1$, la différence $d = 2$, & le nombre des termes $n = 5$, la valeur du cinquiéme terme $x$ ſera, en ſuppoſant que la progreſſion eſt croiſſante.

$x = a + dn - d = 1 + 10 - 2 = 1 + 8 = 9.$

## THÉORÊME III.

215. *Dans une Progreſſion arithmétique, la Somme des extrêmes eſt égale à la Somme de deux termes également éloignés des extrêmes.*

DEMONSTRATION. Dans la progreſſion arithmétique $\div\ a \cdot a \pm d \cdot a \pm 2d \cdot a \pm 3d \cdot a \pm 4d \cdot a \pm 5d$, la ſomme des extrêmes, ſçavoir, $a + a \pm 5d$ eſt la même que $a \pm 2d + a \pm 3d$, ſomme du troiſiéme & du quatriéme termes également éloignés des extrêmes.

*Corollaire.*

216. Si le nombre des termes de la progreſſion étoit impair, alors la ſomme des extrêmes ſeroit égale au double du terme moyen.

## THÉORÊME IV.

217. *Dans une Progreſſion arithmétique, la Somme de tous les termes eſt égale à la Somme des extrêmes multipliés par la moitié du nombre des termes.*

DÉMONSTRATION. Dans la progreſſion arithmétique $\div\ a \cdot a \pm d \cdot a \pm 2d \cdot a \pm 3d$, compoſée de quatre termes, la ſomme de tous les termes, qui eſt $4a \pm 6d$, eſt évidemment égale à la ſomme des extrêmes $2a \pm 3d$ multipliée par 2, moitié du nombre des termes.

*Corollaire I.*

218. Si l'on appelle le premier terme $a$, le dernier $x$, le nombre des termes $n$, la ſomme des termes $s$; cette ſomme ſera repréſentée par l'expreſſion ou formule générale $s = \frac{an + nx}{2}$: ſoit donc ſuppoſé $a = 1$, $x = 11$, & $n = 6$; par conſéquent on trouvera tout d'un coup

$$s = \frac{an + nx}{2} = \frac{\overline{1 \times 6} + \overline{6 \times 11}}{2} = \frac{6 + 66}{2} = \frac{72}{2} = 36.$$

*Corollaire II.*

219. Si la progreſſion arithmétique étoit priſe dans la ſuite des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, &c. & qu'elle commençât par l'unité; alors on auroit le dernier terme $x=n$, & la formule précédente $s=\frac{an+nx}{2}$, deviendroit $s=\frac{x+xx}{2}$, ou $s=\frac{n+nn}{2}$; c'eſt-à-dire, que l'on trouveroit tout d'un coup la ſomme de tous les termes, en prenant la moitié de la ſomme du dernier terme & de ſon quarré, ou la moitié de la ſomme faite du nombre des termes & de ſon quarré.

Si la progreſſion des nombres naturels commençoit par zero, alors on n'auroit point $x=n$, & l'on n'auroit plus $s=\frac{an+nx}{2}=\frac{n+nn}{2}$; mais on auroit toujours $s=\frac{an+nx}{2}=\frac{x+xx}{2}$:

*Corollaire III.*

220. On prouve par le précédent corollaire qu'une progreſſion arithmétique priſe dans la ſuite naturelle des nombres, & qui commenceroit par zero, eſt préciſément la moitié d'une progreſſion uniforme, dont chaque terme ſeroit égal au dernier terme de la progreſſion naturelle: car ſoient les deux progreſſions, 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6

6. 6. 6. 6. 6. 6. 6

la ſomme des termes de la premiere progreſſion eſt (219) $s=\frac{6+36}{2}=\frac{42}{2}=21$, & la ſomme des termes de la ſeconde eſt $s=6\times 7=42$.

THÉORÊME V.

221. *Dans une progreſſion arithmétique, la différence commune eſt égale à la différence du premier au dernier terme, diviſée par le nombre des termes, moins un.*

DÉMONSTRATION. Soit la progreſſion arithmé-

tique $\div a \cdot a \pm d \cdot a \pm 2d \cdot a \pm 3d$ ; si je soustrais le premier terme du dernier, la différence sera $3d$; si je divise cette différence par 3, qui exprime le nombre des termes, moins un; le quotient sera la différence commune $d$; donc, &c.

*Corollaire.*

222. Si nous appellons le premier terme $a$, le dernier $x$, le nombre des termes $n$, l'expression de la différence commune de la progression sera $d = \frac{x-a}{n-1}$, ou $d = \frac{a-x}{n-1}$, selon que la progression sera croissante ou décroissante.

## Théorême VI.

223. *Dans une progression arithmétique, le nombre des Termes est égal à la différence du premier au dernier terme divisé par la différence commune, plus à l'unité.*

Démonstration. Soit la progression arithmétique $\div a \cdot a \pm d \cdot a \pm 2d \cdot a \pm 3d$, composée de quatre termes: si je soustrais le premier terme du dernier; la différence sera $3d$; si je divise cette différence par $d$, qui est la différence commune de la progression, le quotient sera 3, auquel si j'ajoute l'unité, j'aurai 4, qui exprime le nombre des termes.

*Corollaire.*

224. Le premier terme étant $a$, le dernier $x$, la différence commune $d$; l'expression du nombre des termes sera $n = \frac{x-a}{a} + 1$, si la progression est croissante; ou $n = \frac{a-x}{a} + 1$, si la progression est décroissante.

## Théorême VII.

225. *Dans une progression géométrique, il regne partout un même quotient entre deux termes immédiatement consécutifs.*

DÉMONSTRATION. La raiſon qui eſt du premier terme au ſecond, eſt la même que celle qui eſt du ſecond au troiſiéme, du troiſiéme au quatriéme, &c. parce que chaque terme de la progreſſion géométrique contient celui qui le ſuit, de la même maniere qu'il eſt contenu lui-même dans celui qui le précéde.

*Corollaire I.*

226. Dans une progreſſion géométrique, un terme quelconque eſt égal (195) à celui qui le précéde immédiatement, diviſé par le quotient commun qui regne dans la progreſſion.

*Corollaire II.*

227. En ſuppoſant que le premier terme ſoit $a$, & que le quotient ſoit $\frac{1}{p}$; on pourra repréſenter toute progreſſion géométrique, par cette expreſſion, ou formule générale.

$$\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot} a : ap : ap^2 : ap^3 : ap^4 : ap^5 : ap^6, \text{ \&c.}$$

dans laquelle formule il faut remarquer que, lorſque la progreſſion ſera croiſſante, alors $\frac{1}{p}$ ſera une fraction, & $p$ ſera un nombre entier; mais lorſque la progreſſion ſera décroiſſante, $\frac{1}{p}$ ſera un nombre entier, & $p$ une fraction.

THÉORÊME VIII.

228. *Dans toute progreſſion géométrique, un Terme quelconque eſt égal au premier Terme a diviſé par la puiſſance du quotient* $\frac{1}{p}$ *de même degré que le nombre des Termes précédens.*

DÉMONSTRATION. Dans la progreſſion $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot} a : ap : ap^2 : ap^3 : ap^4 : ap^5$, il eſt évident que le cinquiéme terme $ap^4$ eſt égal au premier terme $a$ diviſé par le quotient $\frac{1}{p}$ élevé à la quatriéme puiſſance, la-

quelle puiſſance eſt de même degré que le nombre des termes précédens. En effet la quatriéme puiſſance de $\frac{1}{p}$ eſt $\frac{1}{p^4}$ : mais $a$ diviſé par $\frac{1}{p^4} = \frac{ap^4}{1} = ap^4$ ; donc, &c.

*Corollaire.*

229. L'on peut regarder le terme que l'on cherche, comme le dernier de la progreſſion, & le nommer $x$ ; nommant le premier terme $a$, le quotient $\frac{1}{p}$, & le nombre des termes $n$ ; le nombre des termes qui précédent celui que l'on cherche, ſera $n - 1$, & alors le terme cherché peut être repréſenté ſous l'expreſſion générale $x = ap^{n-1}$ : ſoit donc le premier terme $a = 1$, le nombre des termes $n = 6$, & le quotient $\frac{1}{p} = \frac{1}{2}$, ce qui donne $p = 2$, & ſuppoſons que la progreſſion ſoit croiſſante, l'on trouvera tout d'un coup la valeur du terme $x$ cherché, & l'on aura $x = ap^{n-1} = 1 \times 2^{6-1} = 2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$.

Si la progreſſion étoit décroiſſante, alors le quotient $\frac{1}{p}$ ſeroit un nombre entier, & $p$ un nombre fractionnaire : ainſi ſuppoſant $a = 32$, $n = 6$, & $\frac{1}{p} = 2$, ce qui donneroit $p = \frac{1}{2}$, on auroit $x = ap^{n-1} = 32 \times \frac{1}{2^{6-1}} = \frac{32}{2^{6-1}} = \frac{32}{2^5} = \frac{32}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = \frac{32}{32} = 1$.

## THÉORÊME IX.

230. *Dans une progreſſion géométrique, le produit des Extrêmes eſt égal au produit de deux termes quelconques également éloignés des Extrêmes.*

DÉMONSTRATION. La raiſon eſt évidente par l'inſpection de la formule $\therefore a : ap : ap^2 : ap^3 : ap^4 : ap^5$, dans laquelle le produit $aap^5$ des extrêmes eſt

le même que le produit du second terme $ap$ par le cinquiéme $ap^4$.

*Corollaire.*

231. Si le nombre des termes étoit impair, le produit des extrêmes seroit égal au quarré du moyen terme.

THÉORÊME X.

232. *Dans une progression géométrique, la somme des Antécédens est à la somme des Conséquens, comme un seul Antécédent est à son Conséquent.*

DÉMONSTRATION. Dans une progression géométrique $\div\!\!\div a : ap : ap^2 : ap^3 : ap^4$, tous les termes sont antécédens, excepté le dernier; donc la somme des antécédens est $a + ap + ap^2 + ap^3$ : pareillement tous les termes sont conséquens, excepté le premier; donc la somme des conséquens est $ap + ap^2 + ap^3 + ap^4$ : or l'on a la proportion $a + ap + ap^2 + ap^3 : ap + ap^2 + ap^3 + ap^4 :: a : ap$ : laquelle est juste; car dans cette proportion le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.

*Corollaire.*

233. Nommant le dernier terme $x$, & la somme des termes $s$, la somme des antécédens sera par conséquent $s - x$, & la somme des conséquens sera $s - a$ : c'est pourquoi le théorême précédent pourra s'énoncer en style algébrique & plus briévement par cette proportion $s - x : s - a :: a : ap$.

THÉORÊME XI.

234. *Dans une progression géométrique, si le quotient* $\frac{1}{p}$ *est* 2, *ou* $\frac{1}{2}$, *la somme de tous les Termes, excepté le plus grand, est égale à la Différence du premier au dernier Terme; si le quotient* $= 3$, *ou* $\frac{1}{3}$, *la somme des Termes, excepté le plus grand, est sous-double de la diffé-*

*rence du premier au dernier Terme ; ſi le Quotient* $= 4$, *ou* $\frac{1}{4}$, *la ſomme des Termes, excepté le plus grand, eſt ſous triple de la différence du premier au dernier Terme.*

Démonstration. Si le quotient $\frac{1}{p} = \frac{1}{2}$ ou 2, la progreſſion $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}\ a : ap : ap^2 : ap^3 : ap^4$ deviendra $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}\ a : 2a : 4a : 8a : 16a$, ou bien $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}\ a : \frac{a}{2} : \frac{a}{4} : \frac{a}{8} : \frac{a}{16}$ : or la ſomme de tous les termes (excepté le plus grand) pour le premier cas eſt $15a$, laquelle eſt $= 16a - a$, différence entre le premier & le dernier terme ; & pour le ſecond cas eſt $\frac{15a}{16} = \frac{16a - a}{16}$, différence entre le premier & le dernier terme ; donc, &c.

On procédera de même ſi le quotient $\frac{1}{p} = \frac{1}{3}$, ou 3, ſi $\frac{1}{p} = \frac{1}{4}$, ou 4, &c. & l'on trouvera alors la ſomme des termes, excepté le plus grand, ſous-double ou ſous-triple, ou, &c. de la différence du premier au dernier terme.

*Corollaire I.*

235. On aura donc la ſomme de tous les termes d'une progreſſion géométrique, en prenant 1°. le plus grand terme ; 2°. la différence du premier au dernier terme, & en diviſant cette différence par 1, ſi le quotient $= 2$, ou $\frac{1}{1}$ ; par 2, ſi le quotient $= 3$, ou $\frac{1}{1}$ ; par 3, ſi le quotient $= 4$, ou $\frac{1}{4}$, &c. de ſorte que ce diviſeur ſera toujours égal à la quantité $p$, diminuée d'une unité, (obſervant que, le quotient étant $\frac{1}{p}$, on aura toujours dans la progreſſion croiſſante, $p = 1$, ou $= 2$, ou $= 3$, ou &c ; & que, lorſque la progreſſion ſera décroiſſante, il faudra l'enviſager comme commençant par le dernier terme $x$, qui eſt le plus petit, afin de la rendre croiſſante, & d'avoir toujours $p = 1$, ou $= 2$, ou $= 3$, ou &c.)

C'eſt

C'eſt pourquoi, ſuppoſant une progreſſion dans laquelle le premier terme ſoit $a$, le dernier $x$, & le quotient $\frac{1}{p}$; la ſomme $s$ de tous les termes de la progreſſion ſera repréſentée par la formule ou expreſſion générale $s = x + \frac{x-a}{p-1} = \frac{px-a}{p-1}$, ſi la progreſſion eſt croiſſante; ou par la formule $s = a + \frac{a-x}{p-1} = \frac{ap-x}{p-1}$, ſi la progreſſion eſt décroiſſante: leſquelles formules feront trouver la ſomme de tous les termes, en ſubſtituant à la place des indéterminées $a$, $x$, $p$, leur valeur; car ſuppoſant $a = 1$, $x = 16$, $p = 2$, on aura

$$s = \frac{px-a}{p-1} = \frac{2\times 16-1}{2-1} = \frac{32-1}{2-1} = \frac{31}{1} = 31.$$

*Corollaire II.*

236. Par ce moyen on trouvera la ſomme des moitiés, $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots\ldots o = 1$
celle des tiers, $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}\ldots\ldots o = \frac{1}{2}$
celle des quarts, $\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \frac{1}{256}\ldots\ldots o = \frac{1}{3}$
celles des parties dixiémes, $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}\ldots\ldots o = \frac{1}{9}$
celle des parties centiémes, $\frac{1}{100}, \frac{1}{10000}, \frac{1}{1000000}\ldots\ldots o = \frac{1}{99}$.
& en général on trouvera tout d'un coup la ſomme de toutes les parties quelconques, dont la ſuite ſera une progreſſion géométrique décroiſſante, en retranchant une unité du dénominateur du premier terme.

## THÉORÊME XII.

237. *Dans une Progreſſion géométrique; 1°. les Sommes; 2°. les Différences; 3°. les Produits des Termes immédiatement conſécutifs, ſont en progreſſion géométrique.*

Démonstration. I. Partie. Dans la Progreſſion géométrique $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot} a : ap : ap^2 : ap^3 : ap^4 : ap^5$, ſuppoſons $p = 2$, & elle deviendra $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot} a : 2a : 4a : 8a : 16a$. Or les ſommes des termes conſécutifs ſeront $3a, 6a, 12a, 24a$, leſquelles ſont évidemment en progreſſion géométrique.

Démonstration. II. Partie. Les différences au contraire ſeront $a — 2a : 2a — 4a : 4a — 8a : 8a — 16a$, ou, ce qui eſt le même, $— a : — 2a : — 4a : — 8a$ : ce qui donne évidemment une progreſſion géométrique.

Démonstration. III. Partie. Dans la même progreſſion les produits des termes immédiatement conſécutifs ſont $2aa : 8aa : 32aa : 128aa$, leſquels ſont évidemment en progreſſion géométrique.

## Théorême XIII.

238. *Dans une Progreſſion géométrique les Puiſſances de même nom, & les Racines de même nom des Termes conſécutifs, ſont en Progreſſion géométrique.*

Démonstration. Dans la progreſſion géométrique $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot} a : ap : ap^2 : ap^3 : ap^4 : ap^5$, ſuppoſons $p = 2$ & elle deviendra $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot} a : 2a : 4a : 8a : 16a$, &c. Or ſi nous prenons, *par ex :* les quarrés des termes conſécutifs, nous aurons $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot} aa : 4aa : 16aa : 64aa : 256aa$. &c. ce qui donne évidemment une progreſſion géométrique.

Si l'on avoit pris les racines, ſoit quarrées, ſoit cubiques, ſoit, &c. des termes conſécutifs, elles auroient donné auſſi une progreſſion géométrique.

### *Corollaire I.*

239. Toutes les puiſſances ſucceſſives d'une même quantité ſont en progreſſion géométrique. Soit la quantité $a$, dont les puiſſances ſucceſſives ſont $a^1$, $a^2$, $a^3$, $a^4$, $a^5$, $a^6$, &c. leſquelles forment évidemment une progreſſion géométrique.

Il n'en eſt pas de même des racines. Soit la quantité $a$, dont les racines ſont $a^{\frac{1}{1}}$, $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{1}{4}}$, $a^{\frac{1}{5}}$, $a^{\frac{1}{6}}$, leſquelles ne ſont point en progreſſion géométrique.

*Corollaire II.*

240. Dans une progreſſion géométrique dont les termes ſont affectés d'expoſans, les expoſans ſont en progreſſion arithmétique; cela ſe voit dans la formule $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot} a : ap : ap^2 : ap^3 : ap^4 : ap^5 : ap^6$ : &c. dont les expoſans $0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot$ &c. ſont en progreſſion arithmétique.

D'où il ſuit que, ſi dans une progreſſion géométrique on prend quatre termes quelconques, dont les expoſans ſoient en proportion arithmétique, alors les termes eux-mêmes ſeront en proportion géométrique; tels ſont les termes $ap : ap^3 :: ap^5 : ap^7$.

*Remarque.*

241. Toutes les fois que l'on a une ſuite de termes en progreſſion géométrique, & qui ſont affectés d'expoſans, l'on a deux progreſſions réunies, l'une géométrique qui regne entre les termes; & l'autre arithmétique qui regne entre les expoſans. La réunion de ces deux progreſſions eſt le fondement & le principe d'un calcul célébre & utile, que l'on appelle *calcul logarithmique*, & dont nous parlerons dans la ſuite.

THÉORÊME XIV.

242. *Dans une Progreſſion géométrique, le premier Terme eſt au troiſiéme, comme le quarré du premier eſt au Quarré du ſecond: pareillement le premier Terme eſt au quatriéme, comme le Cube du premier eſt au Cube du ſecond: de même le premier Terme eſt au cinquiéme, comme la quatriéme Puiſſance du premier eſt à la quatriéme Puiſſance du ſecond.*

*En général deux Termes quelconques, éloignés d'un nombre quelconque d'intervalles, ſont toujours entr'eux*

*comme deux Termes immédiatement consécutifs, élevés chacun à une Puissance de même degré que le nombre d'intervalles qui sépare les deux premiers Termes.*

DÉMONSTRATION. La chose est évidente par l'inspection de la formule $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot} a : ap : ap^2 : ap^3 : ap^4 : ap^5$. &c. car on y verra, *par ex :* que le premier terme $a$, & le troisiéme $ap^2$, qui sont éloignés de deux intervalles, sont entr'eux comme le quarré du premier terme est au quarré du second ; c'est-à-dire, que l'on aura,

$$a \cdot ap^2 :: aa \cdot aapp ;$$

car cette proportion est juste.

## ARTICLE IV.

### *Des Progressions infinies.*

### *DÉFINITIONS.*

#### I.

243. On appelle *Quantité infinie*, une quantité qui a reçu tous ses accroissemens finis possibles, & elle s'exprime par $\infty$. On appelle au contraire *Quantité infiniment petite*, une quantité qui a reçu tous ses décroissemens finis possibles, & elle s'exprime par $\frac{1}{\infty}$.

#### II.

244. Une quantité infinie multipliée par un infini, ou prise une infinité de fois, s'appelle un *Infini* du second ordre, & s'exprime par $\infty^2$. Pareillement un infini du second ordre multiplié par une quantité infinie, s'appelle *Infini* du troisiéme ordre, & s'exprime par $\infty^3$, & ainsi du reste.

#### III.

245. Une quantité infiniment petite multipliée par un infiniment petit, devient un infiniment petit

du ſecond ordre, & s'exprime par $\frac{1}{\infty^2}$: de ſorte que, comme l'on a les quantités $\infty$, $\infty^2$, $\infty^3$, $\infty^4$, &c. de même l'on a auſſi les quantités $\frac{1}{\infty}$, $\frac{1}{\infty^2}$, $\frac{1}{\infty^3}$, $\frac{1}{\infty^4}$, leſquelles repréſentent les grandeurs infiniment petites de différens ordres.

*Principe I.*

246. Une quantité finie ajoutée à une quantité infinie, ou retranchée d'une quantité infinie, ne la rend ni plus grande, ni plus petite; c'eſt-à-dire, qu'une quantité finie eſt nulle par rapport à une quantité infinie, & peut être négligée dans le calcul: parce qu'elle eſt, par rapport à l'infini, comme zero eſt à l'unité.

La raiſon eſt que l'infini a reçu tous ſes accroiſſemens finis poſſibles; donc il ne peut être augmenté, ou diminué par l'addition ou la ſouſtraction d'aucune quantité finie: c'eſt pourquoi $\infty + 2 = \infty$, $\infty + a = \infty$.

*Principe II.*

247. Un infini d'un ordre inférieur eſt nul par rapport à l'infini d'un ordre ſupérieur; car il eſt, par rapport à l'infini d'un ordre ſupérieur, ce que le fini eſt par rapport à l'infini, & ce que le zero eſt par rapport à l'unité: c'eſt pourquoi l'on a $\infty^2 + \infty = \infty^2$; $\infty^3 + \infty^2 = \infty^3$. Il faut dire la même choſe des quantités infiniment petites, c'eſt-à-dire, que $2 + \frac{1}{\infty} = 2$; $a + \frac{1}{\infty} = a$; $\frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty^2} = \frac{1}{\infty}$, &c.

*Principe III.*

248. Mais une quantité infinie multipliée, ou diviſée par une autre quantité infinie, devient infinie d'un ordre ſupérieur, ou d'un ordre inférieur:

*par ex:* $\infty \times \infty = \infty^2$; $\infty^3 \times \infty = \infty^4$; $a\infty^2 \times b\infty^3 = ab\infty^5$: pareillement $\frac{\infty^4}{\infty} = \infty^3$; $\frac{\infty^5}{\infty^2} = \infty^3$; de ſorte que le produit ou le quotient ſera un infini dont l'ordre ſera déſigné par la ſomme, ou par la différence des expoſans des deux infinis que l'on multiplie, ou que l'on diviſe. Il faut dire la même choſe des quantités infiniment petites.

*Corollaire.*

249. Les quantités, ſoit infinies, ſoit infiniment petites, ont entr'elles les mêmes rapports, & peuvent être ſoumiſes au même calcul que les quantités finies; & on peut les regarder comme des quantités algébriques, ſur leſquelles on peut faire toutes les opérations dont nous avons parlé ci-devant.

LEMME.

250. *Si l'on a une Progreſſion arithmétique* $\dddot{\div}$ a · b : c · d · e · f, *&c. dont la différence ſoit* d, *on pourra la repréſenter par cette expreſſion, ou formule générale* $\dddot{\div}$ a · a $\pm$ d · b $\pm$ d · c $\pm$ d · d $\pm$ d · e $\pm$ d, *&c.*

DÉMONSTRATION. Dans une progreſſion arithmétique, chaque terme eſt égal à celui qui le précéde immédiatement, augmenté, ou diminué de la différence qui regne dans la progreſſion (211); donc dans la progreſſion arithmétique $\dddot{\div}$ *a.b.c.d.e.f*, &c. le premier terme étant *a* & la différence *d*; le ſecond terme *b* ſera $= a \pm d$; le troiſiéme terme *c* ſera $= b \pm d$; on aura de même le quatriéme terme $d = c \pm d$, & ainſi de ſuite. Par conſéquent, ſi à la place des termes *b*, *c*, *d*, &c. on ſubſtitue leurs valeurs, au lieu de la progreſſion donnée $\dddot{\div}$ *a* · *b* · *c* · *d* · *e* · *f*, &c. on pourra ſubſtituer la progreſſion $\dddot{\div}$ *a. a* $\pm$ *d. b* $\pm$ *d. c* $\pm$ *d*, &c. que l'on appelle *transformée*, & laquelle pourra ſervir de formule ou d'expreſſion générale.

*Corollaire.*

251. Si dans une progreſſion arithmétique quel-

conque, la différence $d = 1$ ; alors l'expreſſion ou formule générale ſera $\div\!\!\div a \cdot a \pm 1 \cdot b \pm 1 \cdot c \pm 1 \cdot d \pm 1 \cdot e \pm 1$, &c.

## THÉORÊME I.

252. *Dans une Progreſſion arithmétique quelconque, dont la différence* $= 1$ ; *un Terme quelconque eſt égal à la Somme faite ; 1°. du premier Terme ; 2°. du nombre des Termes précédens.*

DÉMONSTRATION. Soit la progreſſion arithmétique donnée $\div\!\!\div a \cdot b \cdot c \cdot d$ ; cette progreſſion transformée en l'expreſſion ou formule générale, ſera $\div\!\!\div a \cdot a \pm 1 \cdot b \pm 1 \cdot c \pm 1$, dans laquelle le quatriéme terme eſt $d = c \pm 1$ : or $c = b \pm 1$, & $b = a \pm 1$ ; donc le quatriéme terme ſera $d = a \pm 1 \pm 1 \pm 1 = a \pm 3$, qui eſt la ſomme faite, 1°. du premier terme, 2°. du nombre des Termes précédens.

## THÉORÊME II.

253. *Dans une Progreſſion arithmétique quelconque, dont la différence* $= 1$ ; *le Quarré d'un Terme quelconque eſt égal à la ſomme faite, 1°. du Quarré du premier Terme ; 2°. du double de la ſomme des Termes précédens ; 3°. du nombre des Termes precédens.*

DÉMONSTRATION. Soit la progreſſion arithmétique donnée $\div\!\!\div a \cdot b \cdot c$, &c. ; la progreſſion transformée ſera $\div\!\!\div a \cdot a \pm 1 \cdot b \pm 1$ ; le troiſiéme terme eſt $c = b \pm 1$, & ſon quarré eſt $cc = bb + 2b + 1$ : or, dans cette expreſſion on a $bb = aa + 2a + 1$ : donc en ſubſtituant à la place de $bb$ ſa valeur, on aura.

$$cc = aa + 2a + 1 + 2b + 1$$

où l'on voit que la quarré $cc$ eſt égal à la ſomme faite ; 1°. du quarré du premier Terme, ſçavoir, $aa$ ; 2°. du double de la ſomme des termes précédens, ſçavoir, $2a + 2b$ ; 3°. du nombre des termes précédens, lequel eſt $1 + 1 = 2$.

## THÉORÊME III.

254. *Dans une Progreſſion arithmétique quelconque, dont la différence* $= 1$ ; *le Cube d'un Terme quelconque eſt égal à la ſomme faite, 1°. du Cube du premier Terme ; 2°. du triple de la ſomme des quarrés des Termes précédens ; 3° du triple de la ſomme des Termes précédens ; 4°. du nombre des Termes précédens.*

DÉMONSTRATION. Soit la progreſſion donnée $\dddot{-} a \cdot b \cdot c$ ; la progreſſion transformée ſera $\dddot{-} a \cdot a \pm 1 \cdot b \pm 1$ ; le troiſiéme terme eſt $c = b \pm 1$ ; ſon cube eſt $c^3 = b^3 + 3bb + 3b + 1$ : or dans cette expreſſion l'on a $b^3 = a^3 + 3aa + 3a + 1$ ; donc en ſubſtituant à la place de $b^3$ ſa valeur, on aura

$$c^3 = a^3 + 3aa + 3a + 1 + 3bb + 3b + 1$$

où l'on voit que le cube $c^3$ du troiſiéme terme eſt égal à la ſomme faite ; 1°. du cube du premier terme, ſavoir $a^3$ ; 2°. du triple, &c.

## THÉORÊME IV.

255. *La Somme des unités priſes une infinité de fois, eſt un Infini du premier ordre, ou eſt* $= \infty$.

DÉMONSTRATION. L'unité priſe une infinité de fois, eſt une quantité finie qui a reçu tous ſes accroiſſemens finis poſſibles : donc, &c.

## THÉORÊME V.

256. *La Somme des Termes de la Progreſſion infinie des nombres naturels* $1, 2, 3, 4, 5, 6, \cdots \infty$, *eſt la moitié d'un Infini du ſecond ordre, & ſon expreſſion eſt* $s = \frac{\infty^2}{2}$.

DÉMONSTRATION. Cette progreſſion étant infinie, ſon dernier terme eſt $\infty$, le nombre des termes qui précédent le dernier, eſt $\infty - 1$ : ſi l'on appelle $s$ la ſomme des termes ; celle des termes qui précédent le dernier, ſera par conſéquent $= s - \infty$. Or par le ſecond théorême (253) l'on a $\infty^2$

$= 1 + 2s - 2\infty + \infty - 1$ ; & réduiſant $\infty^2 = 2s - \infty$ ; & ajoutant de part & d'autre la quantité $+\infty$, & réduiſant, on aura $\infty^2 + \infty = 2s$. Or par le ſecond principe (247), $\infty^2 + \infty = \infty^2$, donc on aura $\infty^2 = 2s$ ; & diviſant de part & d'autre par 2, on aura $s = \frac{\infty^2}{2}$.

Ce théorême auroit pu auſſi être prouvé ſimplement par la formule $s = \frac{nn+n}{2}$, dont nous avons parlé (219), laquelle a lieu pour toute ſuite de nombres naturels, qui commence par l'unité ; & cette formule donnera ici

$$s = \frac{nn+n}{2} = \frac{\infty^2+\infty}{2} = \frac{\infty^2}{2} + \frac{\infty}{2}.$$

## THÉORÊME VI.

257. *La ſomme des termes de la Progreſſion des nombres quarrés* $1, 4, 9, 16 \ldots \infty^2$, *eſt le tiers d'un infini du troiſiéme ordre, & ſon expreſſion eſt* $s = \frac{\infty^3}{3}$.

DÉMONSTRATION. La ſuite naturelle des nombres étant $1, 2, 3, 4, 4, 5 \cdots \infty$, le nombre des termes eſt $\infty$, & le nombre des termes qui précédent le dernier, eſt $\infty - 1$ ; la ſomme de tous les termes eſt, comme on vient de le voir, $\frac{\infty^2}{2}$, & la ſomme des termes qui précédent le dernier, ſera par conſéquent $\frac{\infty^2}{2} - \infty$ : ſi l'on appelle $s$ la ſomme des quarrés de tous les termes ; celle des quarrés qui précédent le dernier, ſera par conſéquent $s - \infty^2$. Or l'on a par ce qui a été dit (254) $\infty^3 = 1 + 3s - 3\infty + \frac{3\infty^2}{2} - 3\infty + \infty - 1$ ; & réduiſant $\infty^3 = 3s - 3\infty^2 + \frac{3\infty^2}{2}$ ; & ajoutant de part & d'autre la quantité $3\infty^2$, & retranchant de part &

d'autre la quantité $\frac{3\infty^2}{2}$, on aura $\infty^3 + 3\infty^2 - \frac{3\infty^2}{2} = 3s$. Or par le second principe (247), on a $\infty^3 + 3\infty^2 - \frac{3\infty^2}{2} = \infty^3$ : donc on auta $3s = \infty^3$, & diviſant de patt & d'autre par 3, on aura $s = \frac{\infty^3}{3}$.

## THÉORÊME VII.

258. *La Somme des Termes de la Progreſſion infinie des nombres cubiques, ou des troiſiémes puiſſances* 1, 8, 27, 64.... $\infty^3$, *eſt le quart d'un Infini du quatriéme ordre, & ſon expreſſion eſt* $s = \frac{\infty^4}{4}$.

DÉMONSTRATION. Ce théorême ſe prouve de la même maniere que les deux théorêmes précédens; en évaluant la quatriéme puiſſance du dernier terme de la progreſſion des nombres naturels, laquelle évaluation donne la ſomme des cubes de tous les termes.

*Corollaire.*

259. On prouvera de la même maniere que la ſomme des quatriémes puiſſances 1, 16, 81 ... $\infty^4$, eſt la cinquiéme partie d'un infini du cinquiéme ordre, & que ſon expreſſion eſt $s = \frac{\infty^5}{5}$; que la ſomme des cinquiémes puiſſances eſt $s = \frac{\infty^6}{6}$; & ainſi du reſte. Or on a $\frac{\infty^2}{2} = \frac{\infty^1 + 1}{1+1}$. Pareillement $\frac{\infty^3}{3} = \frac{\infty^2 + 1}{2+1}$; de même $\frac{\infty^4}{4} = \frac{\infty^3 + 1}{3+1}$; & ainſi de ſuite: d'où il ſuit en général que ſi l'on repréſente l'expoſant des puiſſances pat l'indéterminée $m$, la ſomme de toutes les puiſſances poſſibles $m$ des nombres naturels ſera repréſentée pat l'expreſſion générale $s = \frac{\infty^{m+1}}{m+1}$.

# CHAPITRE II.

## *Du Calcul Analytique, ou de l'Analyſe.*

L'Analyſe peut être conſidérée ou en général & dans ſes principes, ou en particulier & dans ſes applications; nous en allons parler ſous ces deux rapports.

### ARTICLE I.

#### *Des Principes de l'Analyſe.*

260. Lorſque les rapports que l'on conſidere, ſont de termes connus avec d'autres termes connus, le calcul qui a pour objet ces ſortes de rapports, s'appelle *Analogie* ou *Proportion :* mais lorſque les rapports que l'on conſidere, ſont de termes connus avec des termes inconnus, le calcul qui a pour objet ces ſortes de rapports, s'appelle *Analyſe* : Or

I°. Le but de l'analyſe eſt de découvrir les quantités inconnues par les rapports qu'elles ont avec les quantités connues. Le moyen dont elle ſe ſert pour découvrir les quantités inconnues, eſt la *double expreſſion* d'une même quantité.

II°. La double expreſſion d'une même quantité s'appelle *Equation*; *par ex* : la quantité *huit* peut être repréſentée par l'expreſſion 8, ou par celle de $5 + 3$ égale à la premiere, d'où naît l'équation $8 = 5 + 3$, dans laquelle les quantités jointes par le ſigne $=$ s'appellent *membres*; tous les termes qui ſe trouvent à la gauche du *ſigne*, s'appellent *premier membre*; tous ceux qui ſe trouvent à la droite, s'appellent *ſecond membre*.

III°. L'uſage des équations eſt fort étendu ; on peut par leur moyen réſoudre une infinité de *queſtions* ou *problêmes ; par ex :* ſi je diſois Pierre a 10 écus, & Paul a 15 écus ; quelle eſt la ſomme des écus qu'ils ont tous les deux ? il eſt clair que nommant $x$ cette ſomme, la queſtion peut s'exprimer par l'équation $x = 10 + 15$, & qu'elle eſt réſolue par l'équation $x = 25$.

IV°. Le but de l'équation eſt donc de connoître la valeur d'une quantité ſous une expreſſion connue, lorſqu'on ne pouvoit la connoître ſous une autre expreſſion, dont la valeur étoit inconnue.

V°. Les équations ſont de différens degrés : ſavoir, du premier, du ſecond, du troiſiéme, &c. degré, ſelon que l'inconnue $x$ ou $y$, &c. eſt élevée à la premiere, à la ſeconde, à la troiſiéme, &c. puiſſance. Nous parlerons ſur-tout des équations du premier degré, que l'on appelle auſſi équations *ſimples* ou *linéaires*.

VI°. Le calcul analytique conſiſte à former & à réſoudre des équations : la formation des équations s'appelle *Synthèſe*, ou compoſition des équations : la réſolution des équations s'appelle *Analyſe*, ou décompoſition des équations.

## PARAGRAPHE I.

### *La Synthèſe, ou Formation des Equations.*

### *DÉFINITIONS.*

I.

261. La *Synthèſe*, ou formation des équations, conſiſte en général à exprimer la double valeur d'une même quantité. La Synthèſe, ou formation des équations, conſidérée par rapport à la ſolution des problêmes, eſt l'art d'exprimer par des équations

l'état d'une *queſtion* propoſée, ou les conditions d'un problême qui eſt donné à réſoudre.

II.

262. On appelle *Conditions* du problême, des marques qui caractériſent les quantités inconnues dont on cherche la valeur, & qui ſervent à les faire connoître. Les conditions du problême ſont, à proprement parler, les *rapports* que les quantités inconnues ont avec les quantités connûes, leſquels rapports ſont donnés dans l'état de la queſtion.

III.

263. On appelle problême *déterminé*, celui dans lequel il y a autant de conditions, ou de rapports donnés, qu'il y a de quantités inconnues; & on appelle problême *indéterminé*, celui dans lequel il y a moins de conditions que de quantités inconnues.

IV.

264. On appelle problêmes *numériques*, ou problêmes d'*Arithmétique*, ceux que l'on peut réſoudre, ou aux conditions deſquels on peut ſatisfaire par des nombres: on appelle problêmes *géométriques*, ou de *Géométrie*, ceux aux conditions deſquels il faut ſatisfaire en aſſignant de certaines lignes, ou de certaines poſitions de lignes. Les premiers ſont ceux dont nous allons bientôt donner des exemples.

*Propoſition I.*

265. Quand on veut réſoudre un problême, il faut bien faire attention aux conditions qui ſont énoncées dans l'état de la queſtion: car

I°. Il faut toujours un certain nombre de conditions, ou de rapports donnés pour rendre la ſolution poſſible, & ordinairement il faut autant de conditions, qu'il y a de quatités inconnues; ſavoir, lorſque le problême eſt *déterminé*.

II°. Il ſe trouve quelquefois dans l'état de la

queſtion des conditions inutiles & ſuperflues, & qui ne peuvent qu'embarraſſer pour la ſolution ; il faut alors que l'art & la dextérité faſſent démêler les conditions, ou rapports néceſſaires, d'avec ceux qui ſont inutiles pour la ſolution.

*Propoſition II.*

266. Après avoir bien déterminé les conditions du problême, il s'agit de les exprimer algébriquement & par des équations : or

I°. Si l'état de la queſtion, ou du problême propoſé, énonce une proportion ; *par ex* : de trouver un quatriéme terme $x$, proportionnel à trois autres donnés $a$, $b$, $c$, il ne ſera pas difficile de former l'équation : car faiſant $a : b :: c : x$, l'on déduit l'équation $ax = bc$, qui exprime la queſtion propoſée.

II°. Mais lorſque la queſtion ne renferme pas de proportion, il faut alors former les équations immédiatement, & ſuivant les conditions qui ſont énoncées dans le problême.

III°. Le moyen de parvenir à former ces équations, eſt d'exprimer *algébriquement* les conditions du problême ; c'eſt-à-dire, qu'il faut exprimer en ſtyle *algébrique* les quantités & les rapports de ces quantités, qui dans l'état de la queſtion ſont énoncés en ſtyle ordinaire.

IV°. Le ſtyle algébrique eſt celui qui ſe ſert de lettres & de ſignes. On repréſente donc les quantités par les lettres de l'alphabet ; les quantités connues par les premieres lettres $a$, $b$, $c$, $d$, &c. les quantités *inconnues* par les dernieres lettres $x$, $y$, $z$, & les quantités *égales* par les mêmes lettres ; & pour exprimer les rapports que ces quantités ont entr'elles, on les combine les unes avec les autres par le moyen des ſignes $+$, $-$, $\times$, $=$, $\surd$, &c. ſuivant l'état & la fonction qu'elles ont chacune dans le problême propoſé.

V°. Il faut donc ajouter, ſouſtraire, multiplier,

&c. les quantités algébriques, autant & de la maniere qu'il eſt néceſſaire, pour qu'elles repréſentent exactement les rapports énoncés dans le problême: en ſorte qu'une quantité étant repréſentée par $a$, le double de cette quantité ſera $2a$; le triple ſera $3a$; &c. le quarré ſera $a^2$; le cube ſera $a^3$; &c. la ſomme de $a$ ajoutée à une autre quantité $b$, ſera $a+b$; la différence ſera $a-b$; le produit ſera $ab$; le quotient $\frac{a}{b}$. Pareillement ſi la quantité $a$ eſt ſuppoſée quatriéme proportionnelle à trois autres quantités $b, c, d$, on fera $b : c :: d : a$, d'où l'on tire $a = \frac{cd}{b}$, & l'expreſſion de la quantité $a$ deviendra pour lors $\frac{cd}{b}$; ſi $a$ eſt un moyen proportionnel entre $b$ & $c$, on fera $b : a :: a : c$, d'où l'on tire $aa = bc$, & $a = \sqrt{bc}$, & alors l'expreſſion de $a$ ſera $\sqrt{bc}$. Si l'on vouloit exprimer que la quantité $x$ eſt la moitié de $ab$, moins les deux tiers de $c$. il faudroit diviſer $ab$ par 2 pour en avoir la moitié, & multiplier $c$ par $\frac{2}{3}$ pour en avoir les deux tiers; & après avoir retranché la quantité $\frac{2c}{3}$ de $\frac{ab}{2}$ par le moyen du ſigne $-$, on feroit $x = \frac{ab}{2} - \frac{2c}{3}$.

*Propoſition III.*

267. Pour mieux entendre comment on forme les équations, & comment on transforme le ſtyle *ordinaire* en ſtyle *algébrique*, nous allons donner quelques exemples.

I°. Soit propoſée cette queſtion: Pierre & Paul ont dépenſé enſemble 100 écus; mais la dépenſe de Pierre eſt trois fois plus grande que celle de Paul: quelle eſt la dépenſe de chacun? On voit aiſément que cette queſtion a deux inconnues; ſavoir, la

dépenſe de Pierre que j'appelle $x$, & la dépenſe de Paul que j'appelle $y$: elle renferme une quantité connue; ſavoir, les 100 écus que j'appelle $a$: on voit auſſi qu'il y a deux conditions dans le problême.

La premiere eſt en ſtyle ordinaire, que la dépenſe de Pierre & celle de Paul priſes enſemble, font 100 écus, ce qui s'exprime en ſtyle algébrique par l'équation $x+y=a$.

La ſeconde condition eſt en ſtyle ordinaire, que la dépenſe de Pierre eſt triple de celle de Paul; donc $x$ eſt triple de $y$, & par conſéquent pour rendre $y$ égal à $x$, il faut multiplier $y$ par 3; la ſeconde condition s'exprimera donc en ſtyle algébrique par l'équation $x=3y$.

Nous avons deux équations, & il y a deux inconnues, ce qui fait voir que ce problême eſt déterminé.

II°. Soit propoſé de trouver deux nombres, tels que le premier ajouté au ſecond donne 12, & que la moitié du ſecond retranchée du premier laiſſe 6. Ayant appellé le premier nombre $x$, & le ſecond $y$; ayant déſigné la quantité connue 12 par $a$, & 6 par $b$; il eſt clair que la premiere condition du problême s'exprime en ſtyle algébrique par l'équation $x+y=a$;
& que pour exprimer la ſeconde condition, il n'y a qu'à prendre la moitié du ſecond nombre $y$, laquelle eſt $\frac{y}{2}$, la retrancher du premier nombre $x$, ce qui donne $x-\frac{y}{2}$, & l'égaler à la quantité $b$, & l'on exprimera la ſeconde condition du problême en ſtyle algébrique par l'équation

$$x-\frac{y}{2}=b,$$

ce qui donne deux équations, leſquelles ſont ſuffiſantes

ſiſantes pour la ſolution du problême, où il n'y a que deux inconnues.

*Propoſition IV.*

268. Dans l'expreſſion des conditions, & lorſqu'on forme les équations, il ne faut point introduire de nouvelles inconnues ſans néceſſité; le but doit être au contraire d'en diminuer le nombre, autant qu'il eſt poſſible. Or il arrive ſouvent que toutes les inconnues d'un problême peuvent être repréſentées par une même lettre $x$ ou $y$, & cela arrive ſur-tout lorſque les inconnues ſont multiples, ou ſous-multiples les unes des autres. Cela ſe voit dans le premier exemple donné ci-deſſus : car puiſque la dépenſe $x$ de Pierre eſt triple de la dépenſe $y$ de Paul; il s'enſuit que celle-ci étant repréſentée par $y$, celle-la pourra être repréſentée par $3y$, & par ce moyen les deux inconnues $x$ & $y$ ſe trouvent réduites à une ſeule inconnue $y$, & les deux équations $x+y=a$, $x=3y$, ſe réduiront à une ſeule équation $3y+y=a$, ou $4y=a$ ce qui rendra la ſolution plus facile.

*Propoſition V.*

269. Lorſqu'on a formé les équations qui renferment les conditions du problême, il faut les préparer pour la ſolution. Cette préparation conſiſte à les ſimplifier : pour les ſimplifier, il faut modifier les membres de l'équation par la voie, ou de l'*addition*, ou de la *ſouſtraction*, ou de la *multiplication*, &c. Ces opérations introduiſent dans l'équation différens changemens que l'on appelle *transformations* : ces transformations rendent les équations plus aiſées à réſoudre; mais elles doivent ſe faire de maniere que l'on ne détruiſe pas l'égalité qui ſe trouve entre les deux membres; ainſi on ne doit rien faire d'un côté, qu'on ne faſſe préciſément la même choſe de l'autre.

Les regles ſuivantes donneront la méthode d'introduire dans une équation les différentes eſpéces de *transformations* qui peuvent la ſimplifier ſans détruire l'égalité des membres.

### *Regle I.*

270. Si j'ai l'équation $x - b = ac$, il eſt évident que je puis (10), ſans détruire l'égalité, ajouter la quantité $b$ de part & d'autre, & il viendra $x - b + b = ac + b$, & en réduiſant $x = ac + b$ : d'où l'on déduit cette regle, que *dans une équation on peut faire paſſer une quantité négative d'un membre à l'autre, en changeant ſon ſigne — en +.*

### *Regle II.*

271. Soit l'équation $x + b = ac$, je puis (11) retrancher la quantité $b$ de part & d'autre, & j'aurai $x + b - b = ac - b$, & en réduiſant $x = ac - b$ : d'où ſuit la regle, que *dans une équation on peut faire paſſer une quantité poſitive d'un membre à l'autre, en changeant ſon ſigne + en —.*

### *Regle III.*

272. L'équation $a + \frac{b}{c} = fx$ étant donnée, je puis (12) multiplier les deux membres par une même quantité ; *par ex :* par le dénominateur $c$, & il viendra $ac + \frac{bc}{c} = cfx$, & réduiſant, $ac + b = cfx$ : il eſt donc évident, que *dans une équation on peut faire évanouir une fraction qui s'y trouve, en multipliant par ſon dénominateur tous les autres termes de l'équation.*

### *Regle IV.*

273. Dans l'équation $ab + cc = bx$, je puis (13) évidemment diviſer les deux membres par une même quantité $b$, & j'aurai $\frac{ab}{a} + \frac{cc}{b} = \frac{bx}{b}$, & réduiſant,

$a + \frac{cc}{b} = x$ : on peut donc *dans une équation dégager une quantité d'un coefficient qui la multiplie, en divisant par ce coefficient tous les autres termes de l'équation :* dans l'équation précédente les deux quantités $a$ & $x$ ont été par ce moyen dégagées de la grandeur $b$ qui les multiplioit.

*Corollaire.*

274. Toutes les fois que les deux membres de l'équation sont des produits qui ont une racine commune, on simplifie l'équation en divisant les deux membres par la racine commune ; *par ex :* on simplifie l'équation $ax + 2ay = 2abc - acd$, en divisant le tout par $a$, & il vient $x + 2y = 2bc - cd$.

*Regle V.*

275. Si l'on avoit l'équation $xx = ab$, on pourroit extraire la racine quarrée de $xx$, en faisant la même extraction dans l'autre membre, & l'on auroit $x = \sqrt{ab}$ : d'où il suit que *pour trouver la racine quelconque d'une puissance inconnue, il n'y a qu'à laisser cette puissance toute seule pour faire un membre de l'équation, & extraire la racine proposée des deux membres.*

*Regle VI.*

276. Mais si l'équation, outre le quarré $xx$ de l'inconnue, contient aussi l'inconnue $x$ linéraire, comme on voit dans les équations

$$xx = bc - xa \qquad xx + ax = bc$$

ou

$$xx = 6 - x \qquad xx + x = 6$$

Alors on trouve la racine, en mettant dans un seul membre tous les termes où se trouve l'inconnue, & faisant en sorte que ce membre devienne un quarré parfait : or pour qu'il le devienne, il faut prendre la moitié du coefficient qui multiplie l'inconnue $x$ linéraire, élever cette moitié au quarré, & ajouter

ce quarré aux deux membres de l'équation, & le premier membre deviendra un quarré parfait, dont on pourra aiſément extraire la racine : on connoîtra donc la valeur de $x$, en extrayant la racine ſemblable des deux membres.

Dans la premiere équation le coefficient de $x$ eſt $a$, ſa moitié eſt $\frac{a}{2}$, dont le quarré $\frac{aa}{4}$ étant ajouté aux deux membres, il viendra

$$xx + ax + \frac{aa}{4} = bc + \frac{aa}{4},$$

dont la racine eſt

$$x + \frac{a}{2} = \sqrt{bc + \frac{aa}{4}}$$

Dans la ſeconde équation le coefficient de $x$ eſt 1, ſa moitié eſt $\frac{1}{2}$, dont le quarré $\frac{1}{4}$ étant ajouté aux deux membres, on aura

$$xx + x + \tfrac{1}{4} = 6 + \tfrac{1}{4} = \tfrac{25}{4} :$$

& la racine ſera $x + \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$ :

donc $x = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2.$

## *Regle VII.*

277. De plus, ſi le quarré $xx$ étoit affecté d'un coefficient tel que $a$, & que l'on eût $axx + x = ab$; il faudroit dégager la quantité $xx$ du coefficient qui la multiplie, en diviſant tous les termes de l'équation par le coefficient $a$, pour avoir $xx + \frac{x}{a} = b$; enſuite on feroit du premier membre un quarré parfait, & l'on trouveroit la racine ſuivant la méthode preſcrite dans la regle précédente.

## PARAGRAPHE II.

### *Analyſe, ou Réſolution des Équations.*

Après avoir exprimé les conditions du problême en ſtyle algébrique & par des équations, après avoir

ſimplifié & préparé ces mêmes équations par différentes transformations, il faut les réſoudre ou les *analyſer*.

*Propoſition I.*

278. La réſolution ou l'*analyſe* des équations conſiſte à trouver la valeur de chaque inconnue. Cette valeur ſe connoît par les rapports que chaque quantité inconnue a avec des quantités toutes connues : ces rapports ſont enveloppés dans l'équation à cauſe de la pluralité des inconnues & de leur mêlange, ſoit entr'elles, ſoit avec les quantités connues ; il s'agit de développer ces rapports.

*Propoſition II.*

279. Pour trouver la valeur des quantités inconnues.

I°. Il faut choiſir à volonté une des inconnues, & en chercher la valeur. On la trouve, en laiſſant cette inconnue toute ſeule pour faire un membre de l'équation ; & faiſant paſſer tous les autres termes de ce membre dans l'autre, cet autre membre ſera la valeur de l'inconnue ; *par ex :* ſi dans l'équation $x+y=a$, je cherche la valeur de $x$, je ferai $x=a-y$, & le ſecond membre ſera la valeur de $x$.

II°. On ſubſtitue cette valeur à la place de l'inconnue, non dans l'équation où l'on a pris cette valeur, (ce qui donneroit deux membres ſous une même expreſſion) mais dans l'autre équation, ou les autres équations ; *par ex :* ayant les deux équations

$$x+y=a$$
$$x=3y,$$

je prends dans la premiere équation la valeur de $x$, laquelle eſt $a-y$, je la ſubſtitue à la place de $x$ dans la ſeconde équation, qui devient

$$a-y=3y$$

& dans laquelle il n'y a plus qu'une ſeule eſpece d'inconnue, ſçavoir $y$ : cette opération peut être appellée *premiere ſubſtitution.*

III°. Cette ſubſtitution réduit, comme on le voit, les deux inconnues $x$ & $y$ à une ſeule $y$, & les deux équations à une ſeule $a - y = 3y$; d'où je conclus, en transpoſant,

$$a = 3y + y,$$

en réduiſant, $a = 4y$,

& en diviſant, $y = \frac{a}{4} = \frac{100}{4} = 25$.

IV° La valeur de $y$ étant toute connue, je m'en ſers pour connoître auſſi la valeur de $x$; & pour cela je mets cette valeur de $y$ à la place de $y$ dans toutes les équations où ſe trouvent $x$ & $y$; & cette opération peut s'appeller *ſeconde ſubſtitution*. Dans l'exemple précédent je ſubſtitue 25, valeur de $y$, à la place de $y$ dans l'équation $x = 3y$; & je trouve $x = 3 \times 25 = 75$; donc la valeur de $x$ devient toute connue, & l'équation eſt réſolue.

V°. S'il reſtoit encore quelques inconnues, on prendroit de même & ſucceſſivement la valeur de chacune d'elles, & on la ſubſtitueroit à leur place dans les équations reſtantes, juſqu'à ce que l'on eût fait évanouir toutes les inconnues.

*Remarque.*

280. Il y a cette différence entre la premiere & la derniere *ſubſtitution*; que dans la premiere la valeur de l'inconnue n'eſt pas tout-à-fait connue, parce que cette valeur eſt encore un mêlange de quantités connues & de quantités inconnues; au lieu que dans la derniere ſubſtitution la valeur de l'inconnue devient tout-à-fait connue, ne renfermant plus que des quantités connues.

*Propoſition III.*

281. Lorſqu'on ſubſtitue la valeur d'une inconnue à la place de cette inconnue, on doit ſubſtituer cette valeur ſelon l'état & la fonction que l'inconnue a dans l'équation, ou les équations dans leſ-

quelles ſe fait cette ſubſtitution ; c'eſt-à-dire, que ſi l'inconnue eſt ajoutée, ou ſouſtraite, on ajoute, ou l'on ſouſtrait ſa valeur ; ſi l'inconnue eſt multipliée, ou diviſée, on multiplie, ou l'on diviſe ſa valeur par les mêmes quantités qui multiplient ou qui diviſent l'inconnue. Soient les deux équations

$$ax + 3x = b$$
$$x + y = c,$$

je veux ſubſtituer dans la premiere équation la valeur de $x$, qui priſe dans la ſeconde équation, eſt $x = c - y$ : je remarque que dans la premiere équation $x$ eſt multipliée par la quantité $a + 3$ ; car $ax + 3x = x \times \overline{a+3}$ : je dois donc multiplier la valeur $c - y$ par la quantité $a + 3$ ; ce qui donnera l'équation $ac - ay + 3c - 3y = b$.

*Propoſition IV.*

282. Lorſque le problême eſt *déterminé*, il n'eſt ſuſceptible que d'une ſeule ſolution : car il n'y a qu'une valeur déterminée pour chaque inconnue, qui puiſſe ſatisfaire aux conditions du problême. Mais ſi le problême eſt *indéterminé*, il admet pluſieurs ſolutions ; chaque inconnue pouvant alors avoir pluſieurs valeurs, qui toutes ſatisferoient aux conditions du problême.

Or dans un problême *indéterminé*, il y a plus d'inconnues que d'équations ; & alors pour réſoudre le problême, on ſuppoſe à quelques-une des inconnues une valeur arbitraire que l'on ſubſtituera à la place de cette inconnue. Si la valeur ſuppoſée eſt juſte, vous aurez la ſolution du problême, en ſuivant les procédés que nous avons expoſés ci-deſſus. Mais ſi cette valeur n'étoit pas juſte, il ſe rencontreroit dans la ſolution des contradictions & des oppoſitions avec les conditions du problême : alors on ſuppoſeroit une autre quantité pour la valeur de l'inconnue ; & ſi elle ne ſe trouvoit pas encore juſte, on eſſaieroit ſucceſſivement différentes quantités pour la va-

leur de cette inconnue, juſqu'à ce qu'on en eût trouvé une qui donne la ſolution du problême.

*Propoſition V.*

283. Tout l'art de *l'Analyſe* conſiſte à réduire toutes les inconnues à une ſeule : car on en trouve dans dans ce cas aiſément la valeur, en laiſſant l'inconnue toute ſeule pour faire un membre de l'équation; ſçavoir, en faiſant paſſer toutes les quantités connues dans l'autre membre; & la ſomme de toutes ces quantités connues donnera la valeur préciſe de l'inconnue.

I°. S'il y a deux équations, & par conſéquent deux inconnues, il faut réduire les deux inconnues à une ſeule par la ſubſtitution, comme dans l'exemple précédent; & les deux équations ſont par-là réduites à une ſeule équation.

II°. S'il y a trois équations, & par conſéquent trois inconnues, on réduit les trois inconnues à deux, puis les deux à une, ce qui réduit les trois équations à deux, & les deux à une.

III°. Il en eſt de même, s'il y a quatre, cinq, ſix, ſept, &c. inconnues. Or ayant ainſi ſimplifié le nombre des inconnues & des équations, & les ayant réduites à une ſeule, on trouvera la valeur toute connue d'une des inconnues, laquelle valeur par la *ſubſtitution* fera connoître celle d'une ſeconde inconnue; les deux valeurs ſubſtituées feront connoître celle d'une troiſiéme inconnue, & ces trois valeurs ſubſtituées feront connoître celle d'une quatriéme, & ainſi des autres.

## ARTICLE II.

*Application de l'Analyſe aux Équations ſimples.*

L'analyſe peut s'appliquer à différens cas; aux raiſons, aux progreſſions, aux puiſſances, &c. & à une infinité de circonſtances dans leſquelles on peut conſidérer la grandeur. L'objet de l'analyſe eſt

de réſoudre des queſtions relatives à ces circonſtances, & propoſées avec certaines conditions ; c'eſt ce que l'on appelle *problêmes* : de la ſolution de ces problêmes réſultent des vérités qui conduiſent à la découverte de propriétés générales, & de-là naiſſent les *théorêmes*. C'eſt ainſi que par le moyen de l'analyſe on parvient à la connoiſſance des vérités qui nous étoient inconnues : nous en allons donner des exemples.

PROBLÊME I.

284. *Diviſer* 1000 *livres entre Pierre, Paul & Jacques, de maniere que la portion de Pierre ſoit double de celle de Paul, & celle de Paul triple de celle de Jacques.*

SOLUTION I. Soit $x$ la portion de Jacques; celle de Paul qui eſt triple, ſera $3x$; & celle de Pierre qui eſt double de celle de Paul, $6x$ : donc la condition du problême exprimée algébriquement ſera

$$x + 3x + 6x = 1000,$$

& en réduiſant, $10x = 1000$,

& en diviſant, $x = \frac{1000}{10} = 100$ :

donc $x$ portion de Jacques $= 100$ livres, $3x = 300$ livres, & $6x = 600$.

On voit dans ce problême que les parties auxquelles il faut diviſer 1000 livres, ont entr'elles un certain rapport exprimé par les nombres 6, 3, 1; & que ce problême auroit pu être énoncé d'une façon générale, en diſant, *diviſer un tout en trois parties, telles que leur rapport ſoit comme* 6 · 3 · 1.

SOLUTION II. Si l'on ſuppoſoit la portion de Jacques $=$ 10 livres; celle de Paul ſeroit 30 livres, & celle de Pierre 60 livres : dans ce cas la ſomme ſeroit 100 livres. Mais cette ſuppoſition eſt fauſſe, puiſqu'il s'agit de diviſer non 100 livres, mais 1000 livres ; c'eſt ce qu'on appelle *fauſſe poſition*. Cependant cette ſuppoſition, quoique fauſſe, peut conduire à la vérité par le moyen de la regle de trois : en diſant, ſi 100 livres donnent 10 livres pour la por-

tion du troiſiéme; combien donneront 1000 livres pour la portion du même? ou bien

$$100 : 10 :: 1000 : x ;$$

donc $x = \frac{1000}{10} = 100$,

c'eſt-à-dire, que la portion qui écheoit au troiſiéme, eſt 100 livres.

### Problême II.

285. *On a donné à Pierre* 12 *livres, à Paul* 8 *livres, à Jacques* 6 *livres; on veut donner à Jean une ſomme proportionnelle aux trois autres: on demande quelle doit être cette ſomme? Ou pour énoncer le problême d'une façon plus générale, on demande que l'on trouve un quatriéme Terme proportionnel à trois autres donnés* 12, 8, 6.

Solution. Ayant exprimé par $x$ le terme inconnu que l'on cherche, il faut ranger les quatre termes en proportion $12 : 8 :: 6 : x$: donc (208)

$$x = \frac{8 \times 6}{12} = \frac{48}{12} = 4,$$

c'eſt-à-dire, que la ſomme qui doit écheoir à Jean eſt 4 livres.

Cette méthode de trouver un quatriéme terme proportionnel à trois autres termes donnés, s'appelle la *Regle de trois*, comme nous l'avons dit (208); elle s'appelle auſſi *Regle d'or*, à cauſe de ſa grande utilité. Elle eſt quelquefois *directe*, quelquefois *inverſe*, ou *réciproque*.

### *Regle de Trois directe.*

286. La regle de trois s'appelle *directe*, lorſque dans l'état de la queſtion, le quatriéme terme inconnu $x$ que l'on cherche, doit être d'autant plus grand, ou plus petit par rapport au troiſiéme, que le ſecond eſt plus grand, ou plus petit par rapport au premier: tel eſt l'exemple du problême précédent. On y trouve alors la valeur de l'inconnu $x$, en prenant le produit des moyens, & le diviſant par l'extrême connu: ſoit $a : b :: c : x$, on aura $x = \frac{bc}{a}$. Cette regle s'appelle *directe*, parce que dans

l'état de la queſtion les deux derniers termes ſont entr'eux dans le même ordre que les deux premiers.

*Regle de Trois inverſe.*

287. La regle de trois s'appelle *inverſe*, ou *réciproque*, lorſque par l'état de la queſtion on voit que le quatriéme terme inconnu doit être d'autant plus grand ou plus petit par rapport au troiſiéme, que le ſecond eſt plus petit, ou plus grand par rapport au premier; telle ſeroit cette queſtion: trois ouvriers ont fait un certain ouvrage en 10 heures, ſix ouvriers en combien de tems l'auroient-ils fait? Et pour s'aſſurer ſi l'état de la queſtion exprime une raiſon *directe*, ou *réciproque*, il faut mettre les termes homogênes avec les homogênes, les ouvriers avec les ouvriers, les heures avec les heures.

3 ouvriers : 6 ouvriers :: 10 heures : $x$.

Or l'on voit que les deux derniers termes ne ſont point dans le même ordre que les deux premiers: ou que le quatriéme terme ne doit pas être plus grand que le troiſiéme, de même que le ſecond eſt plus grand que le premier, car ſix ouvriers doivent faire le même ouvrage en moins de tems que ne l'ont fait trois ouvriers: pour conſerver la proportion juſte, il faut donc placer au troiſiéme rang le terme inconnu $x$;

3 ouvriers : 6 ouvriers :: $x$ : 10 heures;

& on aura la valeur de $x$, en prenant le produit des extrêmes, & en le diviſant par le moyen connu, ſavoir, $x = \frac{3\times 10}{6} = \frac{30}{6} = 5$: car étant donnée la proportion $a : b :: x : c$, on auroit $bx = ac$; & par conſéquent $x = \frac{ac}{b}$.

Cette regle s'appelle *inverſe* ou *réciproque*, ou *indirecte*, parce que dans la queſtion propoſée les deux derniers termes homogênes ſont entr'eux dans un ordre renverſé des deux premiers.

*Corollaire I.*

288. Pour exprimer que deux quantités quelconques $x$ & $y$ ſont en raiſon directe de deux autres 3 & 2, on fait $x : y :: 3 : 2$, ce qui eſt évident. Mais pour exprimer que deux quantités quelconques $x$ & $y$ ſont en raiſon *inverſe* ou *réciproque* de 3 & 2, on fait $x : y :: 2 : 3$. On peut auſſi exprimer cette raiſon réciproque, en faiſant $x : y :: \frac{1}{3} : \frac{1}{2}$; car les produits des extrêmes & des moyens ſeront les mêmes dans les deux proportions; ſavoir, $3x = 2y$, & $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$, ce qui revient au même.

*Corollaire II.*

289. On doit conclure de ce que nous venons de dire, que deux quantités, qui ſont exprimées par des fractions dont le numérateur eſt l'unité, *ſont en raiſon réciproque des dénominateurs.* Si l'on a, *par ex:* $a : b :: \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$, les quantités $a$ & $b$ ſeront en raiſon réciproque des dénominateurs 2 & 3.

*Corollaire III.*

290. C'eſt ſur la regle de trois qu'eſt fondée la méthode que nous avons donnée pour multiplier les nombres complexes, ou les nombres de différente eſpéce. Soient, *par ex:* 15 toiſes & 7 pieds à multiplier par 2 livres, 2 ſols, en ſuppoſant que le prix de la toiſe eſt 2 livres 2 ſols. Nous avons dit (101) qu'après avoir réduit le multiplicande, & le multiplicateur à leurs plus petites eſpéces; ſavoir, 97 pieds, 42 ſols, & pris le produit qui eſt 4074 ſols; il falloit diviſer ce produit par 6, qui exprime le nombre de fois que la petite eſpéce du multiplicande eſt contenue dans la plus grande; ſavoir, le pied dans la toiſe, ce qui donne $\frac{4074}{6} = 679$ ſols.

Or dans cette opération on fait réellement, ou du moins équivalemment une regle de trois, ou une proportion, 6 pieds : 97 pieds :: 42 ſols : $x$, dans

laquelle on multiplie les deux moyens l'un par l'autre, & l'on diviſe le produit par l'extrême connu 6, pour avoir $x = \frac{97\times42}{6} = \frac{4074}{6} = 679$ ſols.

En général, dans toute multiplication, le multiplicande & le multiplicateur peuvent être regardés comme les deux moyens d'une proportion, dont le premier terme eſt l'*unité*, ou la grande eſpéce, que l'on conſidére dans le multiplicande, & le dernier eſt le réſultat ou le produit que l'on cherche: ainſi lorſqu'on a $3\times4=12$, on peut conclure $1:3::4:12$.

PROBLÊME III.

291. 20 *Hommes en* 10 *jours ont fait* 100 *toiſes*; *on demande*, 30 *Hommes en* 6 *jours combien feront-ils de toiſes?*

SOLUTION. Cette queſtion renferme cinq termes, ce que l'on appelle la *regle de cinq*: pour la réſoudre, on exprime l'état de la queſtion par deux proportions, en cette maniere: ſi 20 hommes on fait 100 toiſes, 30 hommes combien en feront-ils? ou

$$20:100::30:x;$$

& ſi en 10 jours on a fait 100 toiſes; en 6 jours combien en fera-t-on? ou

$$10:100::6:x;$$

les deux proportions ſont donc

$$20:100::30:x,$$
$$10:100::6:x,$$

ou plus ſimplement,

$$\begin{matrix}20\\10\end{matrix}:100::\begin{matrix}30\\6\end{matrix}:x$$

Maintenant il n'y a qu'à multiplier le nombre des ouvriers par le nombre des jours, 20 par 10, ce qui donne 200, & 30 par 6, ce qui donne 180: car 20 ouvriers qui travaillent pendant 10 jours, font la même choſe que 200 ouvriers qui travaillent pendant un ſeul jour; pareillement 30 ouvriers qui travaillent pendant 6 jours, font la même choſe que 180 ouvriers qui travaillent pendant un ſeul

jour ; les deux proporions ſe réduiſent donc à une ſeule, que l'on réſout par la ſimple regle de trois,

$$200 : 100 :: 180 : x ;$$

donc on aura $x = \frac{180 \times 100}{200} = \frac{18000}{202} = 90$.

Si la queſtion propoſée avoit renfermé ſept termes, ce qui donne la *regle de ſept*, il eût fallu faire trois proportions, qui par une multiplication de termes, ſemblable à celle qui a été faite ci-deſſus, auroient été réduites à une ſeule : ſi elle avoit eu neuf termes, ce que l'on appelle *regle de neuf*, il eût fallu faire quatre proportions, qui, par la multiplication des termes auroient été réduites à une ſeule.

## PROBLÊME IV.

292. *Pierre, Jacques & Jean ont fait un fonds de 1800 livres ; Pierre y a mis 300 livres, Jacques 600 livres, & Jean 900 livres ; ils ont fait ſur ce fonds un gain de 9000 livres. On demande combien chacun doit participer au gain, à proportion de la miſe qu'il a faite.*

Cette queſtion peut être énoncée d'une maniere générale, en propoſant de *diviſer un tout en parties proportionnelles aux parties d'un autre tout.*

SOLUTION. Ce problême renferme ce que l'on appelle la *regle de compagnie ;* il eſt clair que le gain qui doit revenir à chacun, doit être proportionnel à la miſe qu'il a faite : cette queſtion ſe réſout donc par autant de proportions, qu'il y a de termes inconnus, en diſant ; le fond eſt au gain comme la miſe de chacun eſt à la portion du gain qui revient à chacun : ſoit $x$ la portion qui doit revenir à Pierre : celle de Jacques, $y$ ; & celle de Jean, $z$ : on aura

$$1800 \cdot 9000 :: \begin{matrix} 300 \cdot x \\ 600 \cdot y \\ 900 \cdot z ; \end{matrix}$$

donc $x = \frac{2700000}{1800} = 1500$,

& $y = \frac{5400000}{1800} = 3000$,

& $z = \frac{8100000}{1800} = 4500$.

PROBLÊME V.

293. *Etant donné des Quantités de différens prix, déterminer les portions qu'il faut prendre de chacune d'elles, pour faire ſoit un mêlange, ſoit un alliage, dont telle meſure ou tel poids ſoit à un prix moyen.*

Ce problême renferme ce que l'on appelle la *Regle d'alliage.* La regle d'ailliage eſt la méthode dont on ſe ſert, loſqu'on veut mêler enſemble des matieres différentes, comme des vins de différente eſpéce, des bleds de différens prix, des métaux de différens titres: elle eſt de même que la regle de trois, ou *directe*, ou *inverſe.*

*Regle d'Alliage directe.*

294. La regle d'alliage *directe* eſt la méthode de trouver le prix moyen d'un mêlange quelconque, lorſque les portions qui doivent le compoſer, ſont données, & que les prix de ces portions ſont connus.

EXEMPLE. On veut mêler enſemble des vins de différens prix; ſavoir, 4 pintes de vin à 10 ſols, & 6 pintes de vin à 15 ſols la pinte, on demande quel ſera le prix moyen, ou le prix auquel reviendra la pinte après le mêlange fait?

SOLUTION I. Prenez la ſomme des portions ou meſures qui doivent compoſer le mêlange, prenez auſſi la ſomme des prix de toutes ces meſures.

| Meſures, | Prix |
|---|---|
| 4 pintes à 10 ſ. font | 40 ſ. |
| 6 pintes à 15 ſ. font | 90 ſ. |
| 10 meſures. | 130 ſ. |

Faites enſuite la proportion; la ſomme des meſures ou le mêlange entier eſt au prix total, comme une ſeule meſure eſt au prix moyen, ou

10 pintes : 130 :: 1 pinte : $x = \frac{130}{10} = 13$.

Cette queſtion ſe réſout, comme l'on voit, par une ſimple *regle de trois*, & porte avec elle ſa démonſtration.

Solution II. On peut auſſi réſoudre la queſtion propoſée d'une façon générale. Car ſoit $x$ le prix moyen cherché; $a$ le plus haut prix; $b$ le plus bas prix: $m$ la portion que l'on prend de la quantité du plus haut prix, $n$ la portion priſe de la quantité du plus bas prix; il eſt évident que le prix de la portion $m$, ſera $am$; que celui de la portion $n$ ſera $bn$; que la ſomme des portions ou meſures qui compoſent le mêlange, ſera $m+n$, & par conſéquent que le prix total du mêlange ſera $am+bn$; on trouvera donc le prix moyen, ou le prix auquel reviendra chaque meſure du mêlange, en faiſant $m+n : am+bn :: 1 \cdot x$, ce qui donne $x = \frac{am+bn}{m+n}$, c'eſt-à-dire, qu'il faut diviſer le prix total du mêlange, par le nombre des meſures qui le compoſent, & ſubſtituant les valeurs numériques données ci-deſſus, ou aura

$$x = \frac{am+bn}{m+n} = \frac{15\times 6+10\times 4}{4+6} = \frac{90+40}{10} = \frac{130}{10} = 13.$$

*Regle d'Alliage inverſe.*

295. La regle d'alliage *inverſe* eſt une méthode par laquelle étant donné le prix ou titre moyen que l'on veut faire réſulter d'un mêlange ou d'un alliage quelconque, étant auſſi donnés les prix particuliers des quantités dont on veut faire le mêlange; il s'agit de déterminer les portions dont doit réſulter le mêlange ou l'alliage.

Cette regle s'appelle *inverſe*, ſoit par oppoſition à la regle d'alliage *directe*, dans laquelle on cherche toujours le prix ou titre moyen qui doit réſulter, par le moyen des portions, & des prix particuliers que l'on connoît; au lieu que dans celle-ci on cherche les portions qu'il faut faut prendre des quantités, par le moyen du titre moyen & des prix particuliers qui ſont connus: ſoit parce que dans l'opération,

tion, en comparant, comme nous le verrons, les prix particuliers connus avec le prix moyen, on en prend les différences dans un ordre renverſé.

Exemple. La livre d'étain étant ſuppoſée de 16 ſols, & la livre de plomb de 10 ſols, combien faut-il prendre de l'un & de l'autre pour faire un alliage dont la livre puiſſe être vendue à un prix moyen 12 ſols?

Solution I. Dans l'exemple propoſé il y a deux prix, ou deux titres donnés : c'eſt pourquoi

I°. Comparez les deux prix avec le prix moyen pour en connoître les différences : donnez au plus haut prix la différence du prix moyen avec le plus bas prix ; & au plus bas prix la différence du prix moyen avec le plus haut, de cette maniere,

$$12 \left\{ \begin{array}{l} 16 \ldots\ldots 2 \\ 10 \ldots\ldots 4 \end{array} \right.$$

Ces différences dénotent combien il faut prendre de parties de chaque quantité, pour faire l'alliage ou le mêlange ; dans la queſtion ci-deſſus il faut prendre deux parties d'étain & quatre de plomb ; & comme la ſomme des parties qui compoſeront l'alliage, eſt $2 + 4 = 6$ ; les parties qu'il faut prendre des deux quantités, ſont $\frac{2}{6}$, $\frac{4}{6}$, ou, ce qui revient au même, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$.

IIº. S'il y avoit trois titres donnés tels que 20, 16, 10, dont on voulût faire un alliage qui fût d'un titre moyen 14 ; après les avoir diſpoſés, comme il ſuit.

$$14 \left\{ \begin{array}{l} 20 \ldots\ldots 4 \\ 16 \ldots\ldots 4 \\ 10 \ldots\ldots 6+2 \end{array} \right.$$

Il faut prendre les titres donnés deux à deux, commençant par le plus haut & le plus bas, ſçavoir, 20 & 10 ; les comparer avec le titre moyen pour en prendre les différences 6 & 4, que l'on écrit ſuivant le procédé ci-deſſus, 6 à côté de 10, & 4 à côté de

20 : enſuite, comme le nombre des titres donnés eſt impair, pour comparer le titre reſtant 16, je prends avec lui l'un des autres titres déjà comparés; ſçavoir ici 10 plutôt que 20, parce que le titre moyen 14 ſe trouve intercepté entre 16 & 10, & non entre 16 & 20; & prenant leurs différences qui ſont 2 & 4, je donne la différence 4 au titre 16, & la différence 2 au titre 10, lequel ſe trouve avoir ainſi deux différences écrites à côté; ſçavoir, 6 & 2, parce qu'il a été comparé deux fois. Les différences trouvées ſont donc 4, 4, & $6+2=8$, dont la ſomme eſt 16 : ce qui fait voir que les portions qu'il faut prendre des titres 20, 16 & 10, ſont $\frac{4}{16}$, $\frac{4}{16}$, $\frac{8}{16}$; ou en réduiſant $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, leſquelles fractions évaluées donneront les nombres 5, 4, 5, dont la ſomme eſt 14, & qui par conſéquent ſatisfont aux conditions du problême.

III°. S'il y avoit quatre titres donnés, on les prendroit deux à deux, obſervant de prendre toujours l'un au-deſſus, & l'autre au-deſſous du titre moyen, (ſans quoi la ſolution ſeroit impoſſible; parce que le titre auquel on veut réduire, ne ſeroit plus moyen entre les titres comparés;) d'où il réſulte que dans quelques cas le même titre doit être comparé pluſieurs fois, comme dans cet exemple,

$$22\left\{\begin{array}{lll} 26 & . \ . & 12+4+2=18. \\ 20 & . \ . & 4 \\ 18 & . \ . & 4 \\ 10 & . \ . & 4 \end{array}\right.$$

où le même titre 26 eſt comparé avec chacun de trois autres titres, parce que ceux-ci ſont tous au-deſſous du titre moyen donné 22.

Solution II. On peut auſſi réſoudre la queſtion d'une façon générale. Car ſoit appellé *a*, le plus haut prix; *b* le plus bas prix; *c* le prix moyen; la meſure que l'on veut réduire au prix moyen ſoit $=1$; la portion que l'on doit prendre de la quantité du

plus haut prix ſoit repréſentée par $x$; par conſéquent celle que l'on doit prendre de la quantité du plus bas prix, ſera $1-x$. Le prix de la portion $x$ ſera égal au nombre des meſures qui y ſont contenues, multiplié par le prix $a$, que coute chaque meſure, & ſera par conſéquent $ax$ : par la même raiſon le prix de la portion $1-x$, ſera $b-bx$.

Or la ſomme de ces prix doit être égale au prix moyen; on aura donc $ax+b-bx=c$,

donc $ax-bx=c-b$,

& $x=\frac{c-b}{a-b}$.

maintenant ſuppoſant $a=100$; $b=60$; $c=72$;

on aura $x=\frac{c-b}{a-b}=\frac{72-60}{100-60}=\frac{12}{40}=\frac{3}{10}$.

Démonstration. La raiſon de cette opération eſt que les titres doivent fournir à l'alliage, ou au mêlange, d'autant plus qu'ils different moins du titre moyen, & d'autant moins qu'ils en different plus : donc les portions qu'ils doivent fournir, ſont entr'elles réciproquement comme les différences qu'ont les titres avec le titre moyen : donc pour connoître ces portions, il n'y a qu'à donner au plus haut titre la différence du plus petit, & réciproquement.

## Problême VI.

296. *Deux Dimenſions*, par ex : *l'une de 65 pieds, & l'autre de 40 pieds, étant données à meſurer; trouver la plus grande Meſure poſſible dont on puiſſe ſe ſervir pour meſurer exactement & ſans reſte ces deux Dimenſions.*

Solution. Le problême ſe réduit, comme il eſt aiſé de le voir, à trouver le plus grand diviſeur commun des deux nombres 65 & 40. Il faut donc, ſuivant ce qui a été dit (69), diviſer 65 par 40, ce qui donne le quotient 1, & le reſte 25; enſuite, (négligeant le quotient,) diviſer 40 par 25, d'où

réſultera le quotient 1, & le reſte 15 : puis diviſer le premier reſte 25 par le ſecond 15, d'où l'on aura le quotient 1, & le reſte 10; de plus diviſer le ſecond reſte 15 par le troiſiéme 10, ce qui donne le quotient 1 avec le reſte 5; enfin diviſer le troiſiéme reſte 10 par le quatriéme 5 & l'on aura le quotient juſte 2 : par conſéquent le nombre 5 eſt le plus grand commun diviſeur dont on puiſſe ſe ſervir pour diviſer ſans reſte les nombres 65 & 40.

Démonstration. Soient A & B, dont il faille trouver le plus grand commun diviſeur; il eſt clair que A & B doivent être des produits exacts de ce plus grand commun diviſeur : or

I°. Si ayant diviſé A par B, on trouve le quotient 3 juſte & ſans reſte; il eſt évident que A ſera compoſé de B pris 3 fois, ou que l'on aura $A=3B$; & que B ſera compoſé de B pris une fois : par conſéquent B ſera le plus grand commun diviſeur de A & de B.

II°. Mais ſi ayant diviſé A par B, on trouve le quotient 3 avec le reſte C; il eſt clair que le dividende A, diminué de ce reſte C, ſera préciſément égal au produit du diviſeur par le quotient, ou que l'on aura $A-C=3B$. Si de plus on diviſe B par C, & que l'on trouve le quotient 4 avec le reſte D, on aura auſſi $B-D=4C$. Si l'on diviſe encore C par D, & que l'on trouve le quotient 3 juſte & ſans reſte, on aura $C=3D$. Nous avons donc

$$A-C=3B$$
$$B-D=4C$$
$$C=3D$$

Maintenant prenant la valeur de C dans la troiſiéme équation, & la ſubſtituant dans les deux autres, elles deviendront $A-3D=3B$

$$B-D=12D$$

prenant encore la valeur de B dans la ſeconde équation; c'eſt-à-dire, faiſant $B=12D+D=13D$, &

ſubſtituant cette valeur dans la premiere ; nous aurons $A - 3D = 3 \times 13D = 39D$

donc $A = 39D + 3D = 42D$

donc $\frac{A}{D} = 42$.

mais d'ailleurs $B = 13D$, donc $\frac{B}{D} = 13$.

Donc D ſera un diviſeur commun de A & de B. Mais il ſera le plus grand diviſeur poſſible ; puiſque c'eſt le plus grand reſte que l'on ait trouvé qui puiſſe diviſer juſte les deux quantités donnés A & B. Donc, &c.

## PROBLÊME VI.

297. *Deux Couriers partent d'un même lieu, mais en différens tems : le premier fait 3 lieues en 2 heures, le ſecond en fait 7 en 3 heures : le premier a 8 heures d'avance, quand ſera-t-il atteint par le ſecond ?*

SOLUTION. Soit $x$ le chemin que le ſecond courier aura fait lorſqu'il joindra le premier. Il eſt clair que ce chemin doit être égal à celui que le premier courier aura fait pendant les 8 heures d'avance, plus au chemin qu'il aura fait pendant le tems que le ſecond aura couru. Cherchons d'abord le chemin que le premier courier aura fait pendant les 8 heures d'avance ; & pour cela remarquons que ſa vîteſſe étant toujours la même, les eſpaces qu'il parcourt ſeront proportionnels aux tems employés à les parcourir. Je fais donc la proportion ; 2 heures ſont à 8 heures, comme 3 lieues ſont au chemin cherché $y$ ; ou,

2 heures : 8 heures :: 3 lieues : $y = 12$.

De plus pour trouver le chemin que le même courier a fait pendant le tems que le ſecond a couru, ou pendant le tems que le ſecond courier fera le chemin $x$ : il faut premierement chercher le tems que le ſecond courier met à faire ce chemin $x$, ce qui ſe trouve par cette proportion.

$$7 \text{ lieues} : x :: 3 \text{ heures } \frac{3x}{7};$$

enſuite chercher le chemin que le premier courier aura fait en ce tems $\frac{3x}{7}$; en faiſant la proportion,

$$2 \text{ heures} : \frac{3x}{7} :: 3 \text{ lieues} : \frac{9x}{14},$$

dont le quatriéme terme $\frac{9x}{14}$ exprime le chemin fait par le premier courier pendant le tems $\frac{3x}{7}$ que le ſecond a couru.

Par conſéquent la quantité $12 + \frac{9x}{14}$ exprime le chemin $x$ que le premier courier aura fait, & pendant les 8 heures qu'il avoit d'avance, & pendant le tems que le ſecond aura couru : on aura donc

$$x = 12 + \frac{9x}{14}$$

ou $\quad 14x = 168 + 9x$

donc $\quad 14x - 9x = 168$

& en ſimplifiant, $\quad 5x = 168$

donc $\quad x = \frac{168}{5} = 33 + \frac{3}{5}$.

Le ſecond courier joindra donc le premier, lorſqu'il aura fait $33 + \frac{3}{5}$ lieues : & puiſqu'il fait 7 lieues en 3 heures ; en faiſant la proportion 7 lieues : $33 + \frac{3}{5}$ lieues :: 3 heures : $x =$ 14 heures, 24 minutes ; on trouvera que le ſecond courier joindra le premier, lorſqu'il aura fait 14 heures 24 minutes de marche.

Si l'on ſuppoſoit que le premier courier fût parti non ſeulement plutôt, mais auſſi d'un lieu plus avancé ; la queſtion, quoique plus compliquée, pourroit être réſolue, en raiſonnant ſuivant les principes ci-deſſus.

### PROBLÊME VIII.

298. *La Somme de deux Nombres étant connue, &*

*leur Différence étant auſſi connue, trouver quels ſont ces deux Nombres.*

SOLUTION. Soient les deux nombres que l'on cherche, le plus grand déſigné par $x$, & le plus petit par $y$; leur ſomme ſoit $40 = a$, & leur différence ſoit $8 = d$: il eſt évident,

I°. Que les deux nombres pris enſemble égalent la ſomme, ou $x + y = a$.

II°. Qu'en retranchant le plus petit du plus grand, on aura la différence, ou $x - y = d$.

Ces deux équations expriment les conditions du problême.

III°. Prenons la valeur de $x$ dans la premiere équation; elle ſera $x = a - y$;
ſubſtituons-la dans la ſeconde équation, qui par conſéquent deviendra $a - y - y = d$,

ou $a - 2y = d$

& tranſpoſant, $a - d = 2y$

& diviſant par 2, $y = \frac{a}{2} - \frac{d}{2}$:

donc la valeur de $y$ eſt toute connue.

IV°. Subſtituons cette valeur toute connue à la place de $y$ dans la premiere équation, qui étant $x + y = a$, deviendra $x + \frac{a}{2} - \frac{d}{2} = a$

donc $x = a - \frac{a}{2} + \frac{d}{2}$

ou $x = \frac{a}{2} - \frac{a}{2} + \frac{d}{2}$

& $x = \frac{a}{2} + \frac{d}{2}$

c'eſt-à-dire, que la plus grande quantité eſt égale à la moitié de la ſomme, plus la moitié de la différence; & que la plus petite eſt égale à la moitié de la ſomme, moins la moitié de la différence.

V°. Si à la place des indéterminées $a$ & $d$, nous ſubſtituons leur valeur, nous trouverons que $x = 24$, & $y = 16$.

## PROBLÊME IX.

299. *Un réſervoir de 100 pieds cubes reçoit de l'eau par trois canaux ; dont le premier rempliroit 10 pieds cubes en une heure ; le ſecond, 25 pieds cubes en deux heures ; & le troiſiéme, 40 pieds cubes en trois heures, ſi les canaux couloient ſucceſſivement : en combien de tems le baſſin ſe remplira-t-il, ſi les canaux coulent enſemble?*

SOLUTION. I°. Puiſque le premier canal rempliroit 10 pieds cubes en une heure ; on voit aiſément par la regle de trois, qu'il rempliroit le baſſin entier en 10 heures, s'il couloit ſeul : par la même raiſon le ſecond canal rempliroit le baſſin en 8 heures, & le troiſiéme le rempliroit en 7 heures $\frac{1}{2}$ ; ainſi la queſtion ſe peut ſimplifier, & peut être réduite à ce cas ſimple : *En combien de tems un baſſin ſera-t-il rempli par trois canaux coulans enſemble ; & dont le premier, s'il couloit ſeul, le rempliroit en 10 heures ; le ſecond, en 8 heures ; & le troiſiéme, en 7 heures* $\frac{1}{2}$ *?*

II°. Puiſque le premier canal rempliroit le baſſin en 10 heures, il fournit donc au baſſin pendant une heure un $\frac{1}{10}$ du volume d'eau qui ſuffit pour le remplir : par la même raiſon le ſecond canal en fournit un $\frac{1}{8}$ dans le même tems, & le troiſiéme un $\frac{1}{7+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{15}{2}} = \frac{2}{15}$. Ainſi le baſſin reçoit par les trois canaux coulans enſemble $\frac{1}{10} + \frac{1}{8} + \frac{2}{15}$ d'eau dans une heure. Ces trois fractions ajoutées enſemble font $\frac{120+150+160}{1200} = \frac{430}{1200} = \frac{43}{120}$ : c'eſt-à-dire, que le réſervoir en queſtion reçoit dans une heure la quantité $\frac{43}{120}$ du volume d'eau néceſſaire pour le remplir ; lequel volume eſt $\frac{120}{120}$.

III°. C'eſt pourquoi je fais cette proportion ; puiſque le réſervoir dans une heure reçoit $\frac{43}{120}$ du volume d'eau, dont il faut $\frac{120}{120}$ pour le remplir ; en combien de tems recevra-t-il $\frac{120}{120}$? ou

$\frac{43}{120}$ d'eau : 1 heure :: $\frac{120}{120}$ d'eau : $x = \frac{120}{43} = 2$ heures

$+\frac{14}{43}$; c'eſt-à-dire, que le réſervoir ſe remplira en deux heures, plus $\frac{14}{43}$ d'heure, laquelle fraction vaut plus de $\frac{1}{4}$ d'heure.

### PROBLÊME X.

300. *Trouver trois nombres* x, y, z, *dont la ſomme ſoit* 60, *& qui ſoient tels que la Différence de* x *&* y *ſoit double de la Différence de* y *&* z.

SOLUTION. La premiere condition du problême eſt $x+y+z=60$.

La ſeconde condition étant que la différence $x-y$ eſt double de la différence $x-z$, il en réſulte

$$x-y=2y-2z.$$

Les conditions du problême ne peuvent s'exprimer que par ces deux équations : or le problême renferme trois inconnues; il a donc une inconnue de plus qu'il n'a de conditions, ou d'équations ; d'où il ſuit qu'il eſt indéterminé.

Je prends la valeur de $x$ dans la ſeconde équation; & j'aurai $x=3y-2z$.

Je la ſubſtitue dans la premiere équation à la place de $x$, & j'aurai $3y-2z+y+z=60$,
ou $4y-z=60$;
dans laquelle équation je ne puis faire évanouir ni $y$, ni $z$; il faut donc ſuppoſer une valeur, *par ex :*
a $y$ : je ſuppoſe $y=18$,
& j'aurai $72-z=60$;
donc $z=12$ :
& ſubſtituant ces deux valeurs de $y$ & de $z$ dans la premiere équation, nous trouverons que

$$x=30.$$

Ces trois nombres 30, 18, 12, ſatisfont aux conditions du problême.

On auroit pu ſuppoſer $y=16$, & alors on auroit eu $z=4$, & $x=40$; ces trois nombres 40, 16 & 4, ſatisfont encore aux conditions du problême, ce qui fait voir que ce problême eſt ſuſceptible de pluſieurs ſolutions.

## Problême XI.

301. *Trouver un nombre* x, *dont le quarré*, xx, *& le produit*, ax, *par une quantité connue*, a, *pris enſemble, ſoient égaux à une grandeur connue*, b.

Solution. I°. Le problême ne renferme qu'une condition, laquelle s'exprime par l'équation, $xx+ax=b$; qui eſt une équation du ſecond degré.

II°. C'eſt pourquoi, pour réſoudre le problême, il faut faire enſorte que le premier membre devienne un quarré parfait: pour cela je prends (276) la moitié du coefficient du ſecond terme, ſavoir, $\frac{a}{2}$, pour en avoir le quarré $\frac{aa}{4}$, que j'ajoute aux deux membres, & l'équation devient

$$xx+ax+\frac{aa}{4}=\frac{aa}{4}+b.$$

III°. En extrayant la racine quarrée des deux membres, j'aurai $x+\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{aa}{4}+b}$

& ſuppoſant $a=6, b=16,$

j'aurai $x+\frac{6}{2}=\sqrt{9+16}$.

ou $x+3=\sqrt{25}$.

donc $x+3=5,$

ou $x=5-3=2.$

## Problême XII.

302. *Trouver deux Nombres* x, & y, *dont on connoît la ſomme* 2a, *& le produit* p.

Solution. I°. La premiere condition du problême donne l'équation $x+y=2a$; & la ſeconde donne $xy=p$.

II°. Je prends la valeur de $x$ dans la premiere équation, & j'ai $x=2a-y$; je ſubſtitue cette valeur dans la ſeconde équation $xy=p$, laquelle deviendra par conſéquent $2ay-yy=p$: or cette équation eſt du ſecond degré, parce que l'inconnue $y$ eſt

élevée au quarré, & que de plus l'équation contient différens degrés de l'inconnue, ſavoir, $yy$ & $2ay$.

III°. C'eſt pourquoi, pour réſoudre cette équation, je tranſpoſe les membres pour rendre $yy$ poſitif (270), & il viendra $yy - 2ay = -p$.

J'ajoute à chaque membre le quarré de la moitié de $2a$, coefficient du ſecond terme $y$ (276), & j'aurai l'équation $yy - 2ay + aa = aa - p$, dont le premier membre eſt un quarré parfait : j'extrais enſuite la racine quarrée des deux membres ; ce qui donne $y - a = \sqrt{aa - p}$
& tranſpoſant, $y = a + \sqrt{aa - p}$
Or ſuppoſons maintenant la ſomme $2a = 34$, & le produit $p = 120$ : donc on aura $a = 17$ ; & l'équation deviendra $y = 17 + \sqrt{289 - 120}$,
ou, $y = 17 + \sqrt{169}$.
& ôtant le ſigne radical, $y = 17 + 13 = 30$ ; & ſubſtituant 30 valeur de $y$ à la place de $y$ dans la ſeconde équation $xy = p$, j'aurai $30x = 120$ ; donc

$$xy = \frac{120}{30} = 4.$$

*Remarque I.*

303. En prenant la valeur de $x$ dans la premiere équation $x + y = 2a$, pour la ſubſtituer dans la ſeconde équation $xy = p$ ; nous avons eu $y = 30$, & $x = 4$. Mais nous euſſions pu prendre la valeur de $y$ dans la premiere équation, pour la ſubſtituer dans la ſeconde, & alors nous euſſions eu $x = 30$, & $y = 4$ : d'où il ſuit ;

I°. Que chacune des inconnues $x$ & $y$ peut indifféremment repréſenter, ſoit la plus grande racine 30, ſoit la plus petite 4.

II°. Que chacune des inconnues $x$ & $y$ a deux valeurs, & qu'elle n'a pas plutôt l'une que l'autre ; & que par cette raiſon le *problême eſt ſuſceptible de deux ſolutions* ; ce qui arrive de ce que le problême

eſt du ſecond degré, ou par conſéquent l'inconnue eſt élevée au quarré ; or tout quarré a toujours deux racines poſſibles.

III°. Et en général, puiſque toute puiſſance a autant de racines poſſibles, qu'il y a d'unités dans le degré de la puiſſance ; il s'enſuit que *tout problême déterminé d'un degré ſupérieur ſera ſuſceptible d'autant de ſolutions, qu'il y aura d'unités dans le degré de la puiſſance.*

IV°. Par conſéquent dans les équations d'un degré ſupérieur, on peut ne ſe ſervir que d'une ſeule inconnue $x$, ou $y$, ou, &c. parce qu'une ſeule inconnue $x$ pouvant avoir différentes valeurs dans une équation d'un degré ſupérieur, elle ſuffira par conſéquent pour repréſenter toutes les racines de l'équation.

*Remarque II.*

304. En extrayant la racine de l'équation $yy - 2ay + aa = aa - p$, au lieu de prendre la racine $y - a = \sqrt{aa - p}$, on eût peut mettre $-y + a = \sqrt{aa - p}$ : car le quarré $yy - 2ay + aa$ réſulte auſſi bien des racines $-y+a \times -y+a$, que de racines $y-a \times y-a$ ; de même que le quarré $aa$ réſulte également ſoit des racines $-a \times -a$, ſoit des racines $+a \times +a$ : or en ſe ſervant de $-y+a = \sqrt{aa-p}$, on eût eu par la tranſpoſition $y - a = -\sqrt{aa-p}$, ce qui eût donné $y = 4$ ; de même qu'en prenant $y - a = \sqrt{aa-p}$, on a trouvé $y = 30$, ce qui fait voir

I°. Que dans cette équation que nous venons de réſoudre, il y a deux racines, l'une *poſitive*, & l'autre *négative.*

II°. Que la même inconnue $x$ ou $y$ peut indifféremment repréſenter, ou la racine *poſitive*, ou la racine *négative* ; ce qui revient à la premiere remarque que nous avons faite, & conduit aux mêmes conſéquences.

## ARTICLE III.

*Application de l'Analyſe aux Equations compoſées.*

### *DÉFINITIONS.*

I.

305. On appelle Equations *ſimples* ou *linéaires*, celles ou l'inconnue $x$ ou $y$, eſt à la premiere puiſſance; telle eſt l'équation $x+a=bc$; telles ſont les équations auxquelles nous avons ci-devant appliqué l'analyſe.

II.

306. On nomme Equations *compoſées*, celles où l'inconnue eſt élevée à différentes puiſſances, & le degré de l'équation ſe prend du terme où l'inconnue eſt élevée au plus haut degré.

III.

307. Les équations *compoſées* ſont des produits réſultans de deux, trois, quatre, &c. équations *linéaires*, multipliées les unes par les autres. Elles ſont à ces équations linéaires, ce que les puiſſances ſont à leurs racines. Une puiſſance étant propoſée à réſoudre, pour la décompoſer il en faut trouver les racines; pareillement ſi l'on propoſoit de réſoudre ou de décompoſer une équation compoſée, il faudroit trouver les équations linéaires qui la compoſent, ou qui en ſont les *Facteurs*, que l'on appelle auſſi *Racines*. La différence entre une puiſſance & une équation compoſée, eſt que dans celle là toutes les racines ſont égales; au lieu qu'elles ſont inégales, ou du moins elles ne ſont point toutes égales en celle-ci.

IV.

308. Les équations *compoſées* ſont toujours ſuppoſées égales à zero, c'eſt-à-dire, que dans ces équations l'uſage eſt de faire paſſer tous les termes du

ſecond membre dans le premier, & le ſecond membre devient o.

V.

309. On appelle les *Termes* d'une équation compoſée, les grandeurs où l'inconnue eſt élevée à différens degrés; & les termes où l'inconnue eſt élevée à un même degré, ne ſont qu'un ſeul & même terme: dans l'équation, $xx + 2ax + aa = 0$
$+ 2bx + bb$
$+ 2ab$,
il n'y a que trois termes; parce qu'il n'y a que trois différens degrés de l'inconnue $x$, ſavoir, $x^2$, $x^1$, $x^0$; & c'eſt pour cette raiſon qu'on écrit les uns ſous les autres tous les termes où l'inconnue ſe trouve élevée à un même degré.

VI.

310. Il manque quelque terme dans l'équation, lorſque la ſuite des *Puiſſances* de l'inconnue eſt interrompue; *par ex:* le ſecond terme manque dans l'équation $x^3 + abx + abc = 0$.

*Corollaire.*

311. Quand il ne manque aucun terme dans l'équation; il y a autant de termes, & un de plus, que l'équation a de degrés.

*Propoſition I.*

312. A une même inconnue $x$ vous pouvez ſuppoſer tant de valeurs que vous voudrez, en faiſant $x = 2$, $x = -5$, $x = 6$, $x = -8$; ou $x = a$, $x = -b$, $x = c$, $x = -d$.

I°. Suppoſez toutes ces équations égales à zero; & vous aurez les équations ſimples,

| | |
|---|---|
| $x - 2 = 0$ | $x - a = 0$ |
| $x + 5 = 0$ | $x + b = 0$ |
| $x - 6 = 0$ | $x - c = 0$ |
| $x + 8 = 0$ | $x + d = 0$ |

que l'on appelle *ſimples*, ou *linéaires*.

II°. Multipliez de chaque côté la premiere équation par la ſeconde équation; & vous aurez les équations compoſées

$$xx+3x-10=0 \qquad x^2-ax-ab=0 \\ +bx$$

qui ſont les équations du ſecond degré.

III°. Multipliez de chaque côté l'équation du ſecond degré par la troiſiéme équation linéaire; & vous aurez les produits

Premier $x^3-3x^2-28x+60=0$

Second $x^3-ax^2-abx+abc=0$
$+bx^2+acx$
$-cx^2-bcx$

qui donnent les équations du troiſiéme degré.

IV°. Si vous multipliez l'équation du troiſiéme degré par la quatriéme équation linéaire, le produit ſera une équation du *quatriéme degré*, & vous pouvez ainſi former de ſuite les équations du cinquiéme, du ſixiéme, &c. degré. C'eſt de l'obſervation faite ſur la formation, ou *compoſition* des équations, que l'on déduit les regles pour les *décompoſer*, ou pour en trouver les racines.

*Propoſition II.*

313. La valeur de l'inconnue dans chaque équation linéaire, s'appelle *racine* de l'équation.

I°. Il y a autant de racines, qu'il y a d'équations linéaires; autant d'équations linéaires, que l'équation a de degrés; & le *nombre des racines ſe prend du degré de l'équation.*

II°. Les racines qui dans les équations linéaires ſont affectées du ſigne —, ſont *poſitives*; celles qui ſont affectées du ſigne +, ſont *négatives*:

| | | | |
|---|---|---|---|
| ſoit | $x-a=0$ | on aura | $x=a$ |
| | $x+b=0$ | | $x=-b$ |
| | $x-c=0$ | | $x=c$ |

III°. Lorſque toutes les racines ſont *négatives*,

tous les termes de l'équation composée sont affectés du signe +; quand les racines sont toutes *positives*, les termes de l'équation ont alternativement les signes + & —; si les racines sont les unes *positives*, & les autres *négatives*, les termes de l'équation composée ont les uns +, & les autres —, mais sans alternative: cela se voit évidemment, en observant ce qui arrive, lorsqu'on multiplie les équations linéaires, pour avoir une équation composée.

*Corollaire.*

314. C'est pourquoi, lorsque les termes de l'équation auront le signe +, c'est une marque que toutes les racines sont *négatives*; s'ils ont alternativement + & —, toutes les racines sont *positives*; & quand les uns ont +, & les autres —, sans alternative, alors il se trouve dans l'équation autant de racines *positives*, qu'il y a de changemens de signes, & autant de *négatives*, qu'il y a de successions de mêmes signes; *par ex:* dans l'équation $x^3 - 3x^2 - 28x + 60 = 0$, il y a deux changemens de signes, + —, — +, & une succession de mêmes signes — —; on y trouve aussi deux racines positives + 2 & + 6, & une négative — 5.

*Proposition III.*

315. En observant ce qui arrive, lorsqu'on multiplie les équations linéaires, pour avoir une équation composée, on voit

I°. Que la grandeur connue, ou le coefficient du second terme, est la somme des racines: dans l'équation $x^3 - 3x^2 - 28x + 60 = 0$, le coefficient du second terme est $-3 = +5 - 2 - 6$, somme des racines.

II°. Que le coefficient du troisiéme terme est la somme des produits des racines multipliées deux à deux.

III°.

III°. Que le coefficient du quatriéme terme eſt la ſomme des produits des racines multipliées trois à trois, & ainſi du reſte.

IV°. Enfin que le dernier terme eſt le produit de toutes les racines ;

$$\begin{array}{l} x^3 - ax^2 - abx + abc = 0 \\ \quad + bx^2 + acx \\ \quad - cx^2 - bcx \end{array}$$

*Corollaire.*

316. Dans une équation compoſée de racines, les unes *poſitives*, & les autres *négatives*, ſi la ſomme des racines poſitives eſt égale à celle des racines négatives, le ſecond terme de l'équation devient nul, & eſt détruit par les ſignes contraires ; ſi la ſomme des poſitives ſurpaſſe celle des négatives, il aura le ſigne —; & ſi la ſomme des négatives ſurpaſſe celle des poſitives, il aura le ſigne +.

Pareillement ſi dans le troiſiéme terme, parmi les produits des racines ; il s'en trouve de poſitifs & d'autres négatifs, qui s'entredétruiſent, le troiſiéme terme deviendra nul, & diſparoîtra. Diſons à peu près la même choſe des autres termes de l'équation.

*Propoſition IV.*

317. Lorſqu'on a formé une équation compoſée, *par ex :* du ſecond degré,

$$\begin{array}{l} xx + ax + ab = 0 \\ \quad + bx, \end{array}$$

on voit bien que le coefficient $a+b$ du ſecond terme eſt une quantité connue, ainſi que le dernier terme $ab$ ; on peut donc abréger l'équation, en exprimant par une ſeule lettre toutes les grandeurs connues d'un même terme. Suppoſons dans l'équation précédente le coefficient du ſecond terme, ſçavoir, $a+b=n$, & le dernier terme $ab=p$, nous aurons

l'équation abrégée $xx + nx + p = 0$ ; cette abréviation s'appelle *formule*.

I°. On peut repréſenter par des formules ſemblables les équations de tous les degrés, en faiſant :

| | |
|---|---|
| I. degré | $x \pm n = 0$ |
| II. degré | $x^2 \pm nx \pm p = 0$ |
| III. degré | $x^3 \pm nx^2 \pm px \pm q = 0$ |
| IV. degré | $x^4 \pm nx^3 \pm px^2 \pm qx \pm r = 0$ |

II°. L'uſage de ces formules eſt d'abréger les équations. Les équations ainſi abrégées ſont aiſées à réſoudre, & leur ſolution conduit à celle des équations dont elles ſont la formule, ou l'expreſſion abrégée, en ſubſtituant à la place des coefficiens indéterminés, $n$, $p$, $q$, $r$, &c. leurs valeurs priſes dans les équations plus compoſées.

*Propoſition V.*

318. La ſolution d'une équation conſiſte à trouver ſes racines, ou les différentes valeurs que l'inconnue $x$ a dans cette équation. C'eſt pourquoi

I°. Puiſque le dernier terme de l'équation, *par ex:* $x^3 - 3x^2 - 28x + 60 = 0$ eſt le produit de toutes les racines ; réduiſez ce dernier terme en tous ſes *facteurs*, *produiſans*, ou *diviſeurs*, leſquels ſont 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, (car le dernier terme 60 peut être diviſé exactement & ſans reſte par chacun de ces nombres.).

II°. Subſtituez ſucceſſivement chacun de ces diviſeurs & ſes puiſſances à la place de l'inconnue $x$, & de ſes puiſſances ; ſubſtituez-le, dis-je, dans l'équation, tantôt avec le ſigne +, tantôt avec le ſigne —.

III°. Si après la ſubſtitution, la ſomme des termes de la nouvelle équation ſe trouve $= 0$, comme dans la précédente, la quantité ſubſtituée eſt une véritable racine, ou une valeur de l'inconnue $x$, puiſque miſe en ſa place dans l'équation, elle fait la même fonction, & produit les mêmes effets.

Dans l'équation $x^3 - 3x^2 - 28x + 60 = 0$ ſubſtitutions $+2$ & ſes puiſſances, à la place de $x$ & de ſes puiſſances, & nous aurons la nouvelle équation $8 - 12 - 56 + 60 = 0$, dans laquelle la ſomme des termes eſt $= 0$, parce qu'ils ſe détruiſent tous par des ſignes contraires; d'où il faut conclure que $+2$ eſt une racine de l'équation. Mais ſi au lieu de $+2$, on ſubſtituoit $-2$, alors la nouvelle équation qui réſulteroit après la ſubſtitution, ſeroit $-8 - 12 + 56 + 60 = 96$, dans laquelle la ſomme des termes n'eſt point $= 0$, mais $= 96$, & par conſéquent $-2$ n'eſt pas une racine de l'équation.

IV°. Pareillement dans l'équation algébrique

$$\begin{aligned} x^3 &- ax^2 - abx + abc = 0 \\ &+ bx^2 + acx \\ &- cx^2 - bcx \end{aligned}$$

réduiſez le dernier terme $abc$ en ſes *produiſans*, ou *diviſeurs*, qui ſont $a$, $b$, $c$, & ſubſtituez $+a$ & ſes puiſſances, à la place de l'inconnue $x$ & de ſes puiſſances, & vous aurez la nouvelle équation

$$\begin{aligned} a^3 &- a^3 - a^2b + abc = 0 \\ &+ a^2b + a^2c \\ &- a^2c - abc \end{aligned}$$

dans laquelle tous les termes ſe détruiſent par l'oppoſition des ſignes; d'où il faut conclure que $+a$ eſt une racine. Mais ſi l'on avoit ſubſtitué $-a$, l'on auroit eu l'équation

$$\begin{aligned} -a^3 - a^3 + a^2b + abc = &- 2a^3 + 2a^2b + 2abc - 2a^2c \\ &+ a^2b - a^2c \\ &- a^2c + abc \end{aligned}$$

dans laquelle la ſomme des termes n'eſt pas $= 0$, comme on voit; d'où il ſuit que $-a$ n'eſt pas une véritable racine.

*Corollaire:*

319. Puiſque les équations compoſées ſont formées par la multiplication des équations ſimples

(312), une équation composée pourra donc être divisée sans reste par une équation simple, formée de $x$ & d'un des *produisans*, ou *diviseurs* du dernier terme, & alors le quotient sera, ou l'autre racine, ou le produit des autres racines : soit donc l'équation composée $x^3 - 3x^2 - 28x + 60 = 0$,

Les *produisans*, ou *diviseurs* du dernier terme sont, comme nous l'avons vu (318.), 2, 3, 4, 5, &c. dont on peut former les équations simples.

$x - 2 = 0, x + 2 = 0; x - 3 = 0, x + 3 = 0;$
$x - 4 = 0, x + 4 = 0; x - 5 = 0, x + 5 = 0;$

& ainsi du reste : divisons donc l'équation proposée par l'équation simple $x - 2 = 0$, & nous aurons

$$\frac{x^3 - 3x^2 - 28x + 60}{x - 2} = x^2 - x - 30.$$

L'équation est divisée sans reste : $x - 2$ est donc une racine, & le quotient sera une équation du second degré, dont on trouvera aussi les racines par la même méthode. Mais en vain aurions-nous essayé de diviser par $x + 2$; la division n'eût pas été juste : $x + 2$ n'est donc pas une véritable racine.

*Remarque.*

320. Si dans une équation composée le premier terme $x^2$, ou $x^3$, ou $x^4$, &c. est affecté d'un coefficient quelconque, on doit, avant que de chercher les racines de l'équation, faire évanouir le coefficient; en divisant tous les autres termes de l'équation par la quantité qui multiplie le premier terme.

*Proposition VI.*

321. Si l'on avoit à résoudre une équation, telle que

$$xx + 3x - 3\sqrt{7} = 0$$
$$- x\sqrt{7}$$

& qu'après avoir trouvé la premiere racine 3, on divisât l'équation composée par l'équation linéaire $x + 3 = 0$, on trouveroit pour seconde racine $x - \sqrt{7} = 0$, ou $x = \sqrt{7}$. Cette racine s'appelle *incom-*

*commenſurable*, parce qu'elle ne peut être exprimée par aucun nombre poſſible. Dans ce cas l'équation ne peut être réſolue que par *approximation*; c'eſt-à-dire, que l'on peut approcher tant que l'on voudra de la juſte valeur de $\sqrt{7}$, mais ſans jamais y parvenir. C'eſt pourquoi

I°. Pour trouver une valeur approchée de $\sqrt{7}$, il faut prendre les quarrés au-deſſous & au-deſſus de 7, & qui en approchent le plus, ſavoir, 4 & 9; dont les racines ſont 2 & 3. Ces racines 2 & 3 s'appellent les *limites* de la racine $\sqrt{7}$, parce que celle-ci quelle qu'elle ſoit, ſe trouve néceſſairement entre les nombres 2 & 3.

II°. Il faut rapprocher les limites 2 & 3, en diminuant l'intervalle qui les ſépare; ce qui ſe fait, ou en diminuant 3, ou en augmentant 2. Prenons donc pour les limites $2+\frac{1}{1}$ & 3 : or $2+\frac{1}{1}=\frac{7}{1}$, dont le quarré $\frac{49}{9}=5+\frac{4}{9}$, approche plus de 7 que le quarré 4 : donc la limite $2+\frac{1}{1}$ eſt une valeur approchée de la racine.

III°. Pour trouver une valeur encore plus approchée, au lieu de la limite $2+\frac{1}{1}$, prenons $2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$, dont le quarré $\frac{25}{4}=6+\frac{1}{4}$ approche encore plus de 7 que le quarré $5+\frac{4}{9}$: donc la limite $2+\frac{1}{2}$ differe encore moins de la quantité $\sqrt{7}$.

IV°. Au lieu de $2+\frac{1}{2}$, prenons $2+\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$, dont le quarré $\frac{64}{9}=7+\frac{1}{9}$ : or ce quarré eſt plus grand que 7; donc la limite $2+\frac{2}{3}$ eſt au-deſſus de $\sqrt{7}$, & eſt trop grande; il faut la diminuer, & prendre un nombre entre les limites $2+\frac{1}{3}$ & $2+\frac{2}{3}$: car la quantité $\sqrt{7}$ ſe trouve néceſſairement entre ces deux limites. Or ſi l'on continue toujours, ou de diminuer la limite ſupérieure, ou d'augmenter la limite inférieure que l'on aura trouvée, on approchera par cette méthode, tant que l'on voudra, de la juſte valeur de $\sqrt{7}$.

V°. On pourra même approcher de la valeur de

$\sqrt{7}$, de façon que la valeur trouvée ne differe de la valeur véritable, qu'auſſi peu que l'on voudra, ſi l'on transforme les limites & le nombre 7 en décimales. Nous en donnerons ailleurs la méthode, en parlant du calcul décimal.

*Remarque.*

322. Les quantités $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$, & les autres ſemblables $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[5]{aa}$, &c. & en général toutes celles où les grandeurs qui ſont ſous le ſigne radical, ne ſont point des puiſſances parfaites de même degré que l'expoſant du ſigne, s'appellent *incommenſurables*, ou *radicaux*. Lorſque dans une équation compoſée, il ſe trouve des *incommenſurables*, on a coutume d'en débarraſſer l'équation, en faiſant: *par ex*; $\sqrt{7} = a$, $\sqrt{ab} = c$, &c. mais dans la ſolution elles reviennent, lorſqu'à la place des indéterminées $a$, $c$, &c. on veut ſubſtituer leur valeur.

*Propoſition VII.*

323. Si l'on avoit à réſoudre l'équation $xx + aa = 0$; on feroit $xx = -aa$, & on extrairoit la racine quarrée des deux membres. Or la racine quarrée de $-aa$ n'eſt point une quantité poſſible: elle n'eſt point $-a$, puiſque $-a \times -a = +aa$; elle n'eſt pas $+a$, puiſque $+a \times +a = +aa$: donc $\sqrt{-aa}$ n'eſt pas une quantité poſſible. Or cette racine $\sqrt{-aa}$ s'appelle *imaginaire*; & toutes les fois qu'il ſe rencontre quelque racine imaginaire dans la ſolution d'un problême, cette ſolution eſt impoſſible.

*Corollaire I.*

324. Lorſque ſous le ſigne *radical* il ſe trouve des quantités, les unes poſitives, & les autres négatives, comme dans $\sqrt{4bb - aa}$; la racine eſt imaginaire, ſi la grandeur poſitive eſt plus petite que la négative, ou ſi l'on a $4bb < aa$: mais elle ne ſera point imagi-

naire, si la quantité positive est plus grande que la négative, ou si l'on a $4bb < aa$.

*Corollaire II.*

325. Les racines d'une équation composée peuvent donc être de deux sortes, les unes *réelles*, les autres *imaginaires*. On appelle racine *réelle* toute racine qui peut être extraite d'une puissance, ou exactement, ou par approximation, & laquelle par conséquent multipliée par elle-même le nombre de fois requis, donne la puissance ou exacte ou approchée. Au contraire la racine est dite être *imaginaire*, lorsqu'ayant une puissance négative, on ne sçauroit trouver aucune quantité, qui, multipliée par elle-même le nombre de fois requis, puisse donner — à la puissance. Telles sont les racines des puissances $-a^2$, $-a^4$, $-a^8$ &c. ou les quantités $\sqrt{-a^2}$, $\sqrt{-a^4}$, $\sqrt{-a^8}$, &c. Or

I°. Lorsque l'on rencontre quelque racine imaginaire, le problême renferme quelque contradiction, & la solution est impossible, du moins par rapport à toutes ses racines.

II°. Les racines réelles sont, ou *positives*, ou *négatives*; & dans l'un & l'autre cas on peut parvenir à la solution juste & entiere du problême.

III°. Les racines réelles peuvent encore être, ou *commensurables*, ou *incommensurables*. Si le problême renferme des incommensurables, on ne peut en avoir la solution que par *approximation*, parce que l'on ne peut avoir que des valeurs approchées pour les quantités incommensurables.

# LIVRE SECOND.

## *ÉLÉMENS DE GÉOMÉTRIE.*

LA Géométrie eſt, ou *Spéculative*, ou *Pratique*. La Géométrie *ſpéculative* eſt celle qui eſt occupée à démontrer; la Géométrie *pratique* eſt celle qui eſt occupée à opérer & à exécuter : à l'une appartiennent les *Théorêmes*, à l'autre les *Problêmes*. Nous diviſerons ce livre en deux parties. Dans la premiere nous donnerons les élémens de la Géométrie ſpéculative; dans la ſeconde, ceux de la Géométrie pratique.

## PREMIERE PARTIE.

### *Élémens de la Géométrie ſpéculative.*

L'OBJET de la Géométrie eſt l'étendue : dans l'étendue il y a quatre choſes à conſidérer, ſçavoir, le *Point*, la *Ligne*, la *Surface*, & le *Solide*. Un corps quelconque conſidéré tout entier, s'appelle *Solide* : un ſolide eſt terminé par des faces, que l'on appelle *Surfaces*; chaque ſurface eſt terminée par des côtés, que l'on appelle *Lignes*; chaque ligne eſt terminée par des extrêmités, que l'on appelle *Points*.

II°. Le *point* n'a pas de dimenſions; la *ligne* a une dimenſion que l'on appelle *longueur*; la *ſurface* a deux dimenſions, que l'on appelle *longueur* & *largeur*; le *ſolide* a trois dimenſions, que l'on appelle *longueur*, *largeur* & *profondeur*.

III°. Ces trois dimenſions tirent primitivement leur origine du *point*: car en Géométrie on conçoit qu'un point en ſe mouvant, décrit une *ligne*; qu'une ligne en ſe mouvant, décrit une *ſurface*; qu'une ſurface en ſe mouvant, décrit un *ſolide*. Il n'y a donc que trois eſpéces d'étendue, la *ligne*, la *ſurface*, & le *ſolide*. Nous en allons parler dans autant de ſections.

# SECTION I.

## *Des Lignes.*

LEs lignes ont leur nature, leurs propriétés & leurs rapports, dont il nous faut parler.

## CHAPITRE I.

### *De la Nature des Lignes.*

I°. TOUTE ligne eſt *droite* ou *courbe*: une ligne droite eſt unique dans ſon eſpéce; elle ne peut être plus ou moins droite: une ligne courbe peut varier à l'infini; elle peut être plus ou moins courbe.

II°. De toutes les lignes courbes, la plus ſimple, la plus uniforme, & dont toutes les autres tirent primitivement leur origine, eſt la ligne *circulaire* (*fig.* 2) parce que ſa courbure eſt la même par

tout, & ne varie dans aucun de ſes points, comme nous le verrons.

III°. Toutes les lignes priſes en général ſe rapportent donc à deux eſpéces, la ligne *droite*, & la ligne *circulaire*: & ce ſont-là les principes ſur leſquels eſt fondée toute la Géométrie *ſpéculative*.

IV°. A la ligne *droite* & à la ligne *circulaire* répondent la *regle* & le *compas*: la regle pour décrire la ligne droite, & le compas pour décrire la ligne circulaire; & ce ſont les inſtrumens fondamentaux dont on ſe ſert dans la Géométrie *pratique*.

V°. Sur la ligne droite, la ligne circulaire, & leur combinaiſon ſont fondées toutes les démonſtrations des *théorêmes* de la Géométrie ſpéculative; pareillement de la regle, du compas, & de leur combinaiſon dérivent tous les inſtrumens dont on ſe ſert pour exécuter les *problêmes* de la Géométrie pratique. Nous allons donc donner, 1°. la notion de la ligne droite; 2°. la notion de la ligne circulaire.

## ARTICLE I.

### *Notion de la Ligne droite.*

### *HYPOTHESE.*

326. Si un point A (*fig.* 1.) eſt ſuppoſé ſe mouvoir, & partir d'un terme A pour arriver au terme B, l'eſpace parcouru par ce point s'appelle *ligne*.

### *DÉFINITIONS.*

I.

327. Si le point, en ſe mouvant, conſerve toujours la même direction, il décrit une ligne que l'on nomme ligne *droite*: telle eſt la ligne AB (*fig.* 1.)

II.

328. Si le point, en ſe mouvant, vient à changer de direction, il décrit une ligne que l'on appelle *anguleuſe*, telle eſt la ligne AEB (*fig.* 3.) ou la ligne DCE (*fig.* 5.)

III.

329. Si le point, en ſe mouvant, change à chaque inſtant de direction, il décrit une ligne que l'on appelle *courbe*: telle eſt la ligne CAD (*fig.* 1.)

IV.

330. Si la ligne eſt en partie droite, & en partie courbe, on l'appelle ligne *mixte*.

*Corollaire I.*

331. Tous les points d'une ligne *droite* ſont dans la même direction; *par ex*: tous les points de la droite AB (*fig.* 1.) ſont dans la direction de A vers B.

*Corollaire II.*

332. La ligne droite eſt la plus courte que l'on puiſſe mener d'un point à un autre point; *par ex*: la droite AB (*fig.* 3.) eſt plus courte qu'aucune des trois lignes AEB, ADB, AFB; parce que tous ſes points étant dans la même direction, elle paſſe par la voie la plus courte.

*Corollaire III.*

333. La ligne droite eſt auſſi la plus courte entre ſes extrêmités; *par ex*: la ligne AB eſt la plus courte que l'on puiſſe mener entre ſes extrêmités A & B.

*Corollaire IV.*

334. La ſomme de deux droites AE+EB (*fig.* 3.) eſt toujours plus grande que la troiſiéme AB.

*Corollaire V.*

335. D'un point A à un autre point B on ne peut mener qu'une ſeule ligne droite AB (*fig.* 3.): car toute autre ligne droite menée de A en B ſeroit par le ſecond corollaire la plus courte entre ces deux points, & par conſéquent ne ſeroit pas diſtinguée de la droite AB.

*Corollaire VI.*

336. D'un point à une ligne on peut mener une infinité de lignes droites; *par ex :* du point C à la ligne EG (*fig.* 11.) on peut mener les lignes CA, CD, CF, CB, & une infinité d'autres : on en peut mener autant qu'il y a de points dans la ligne EG.

*Corollaire VII.*

337. Pour déterminer la position d'une ligne *droite*, un point seul ne suffit pas; car les droites CA, CD, CF, &c. ont un même point C commun, & ont différentes positions : deux points suffisent ; deux points étant donnés, tels que C & D (*fig.* 11.) il n'est pas possible (335) de faire passer par ces points d'autre ligne que CD.

*Corollaire VIII.*

338. Deux lignes droites ne peuvent avoir deux points communs ; elles auroient dès-lors la même position, & ne feroient plus qu'une seule & même ligne.

*Corollaire IX.*

339. Deux lignes droites ne peuvent se couper qu'en un seul point : si elles se coupoient en deux points, elles auroient deux points communs, & par conséquent ne feroient plus qu'une seule & même ligne.

## ARTICLE II.

### *Notion de la Ligne circulaire.*

### *HYPOTHESE.*

340. Si une ligne droite AD (*fig.* 4.) immobile au point A, & mobile à l'extrêmité D, est supposée faire une révolution autour du point A ; il est clair que l'extrêmité, ou le point D décrira une courbe dont tous les points seront également distans du point A : cette ligne courbe s'appelle *Ligne circulaire*, ou *Cercle*.

## *DÉFINITIONS.*

I.

341. Une ligne *circulaire* eſt une ligne courbe, dont tous les points ſont également éloignés d'un point commun ; *par ex :* A (*fig.* 2 & 4.) que l'on nomme *Centre.*

II.

342. L'eſpace compris & renfermé par la ligne circulaire, s'appelle *Cercle*, & la ligne circulaire s'appelle *Circonférence* du cercle.

III.

343. La ligne AD, ou AC, ou AB, &c. (*fig.* 4.) & en général toute ligne droite, tirée du centre A à un point quelconque de la circonférence, s'appelle *Rayon.* Le double rayon, & en général toute ligne droite menée d'un point de la circonférence au point oppoſé, & qui paſſe par le centre, s'appelle *Diamétre.*

IV.

344. Deux cercles qui ont un centre commun, s'appellent *Concentriques* (*fig.* 2.) : deux cercles qui ſe coupent ou ſe touchent, s'appellent cercles *Excentriques* (*fig.* 7, 8, & 9.) ; la ligne droite qui joint les deux centres, s'appelle ligne d'*excentricité.*

*Corollaire I.*

345. Dans le cercle tous les rayons ſont égaux ; car ils meſurent la diſtance du centre à la circonférence, laquelle eſt par tour la même : pareillement tous les diamétres ſont égaux, puiſqu'ils ſont chacun le double du rayon.

*Corollaire II.*

346. Une ligne droite qui coupe la circonférence d'un cercle, la coupe toujours en deux points ; ou prolongée, la couperoit en deux points.

*Corollaire III.*

347. Une ligne droite ne peut pas couper une circonférence de cercle en trois points ; car trois points ont la même direction dans une ligne droite, & ne peuvent l'avoir dans une circonférence de cercle.

*Corollaire IV.*

348. Donc trois points pris dans la circonférence du cercle ne peuvent pas être posés en ligne droite ; ou, ce qui revient au même, une circonférence de cercle peut bien avoir deux points communs avec une ligne droite, mais non pas trois.

*Corollaire V.*

349. Deux circonférences de cercle qui se coupent, se coupent nécessairement en deux points, comme il est évident (*fig.* 9.)

*Corollaire VI.*

350. Deux circonférences de cercle ne peuvent se couper en trois points (*fig.* 9.) ; car si cela étoit possible, deux circonférences pourroient donc avoir trois points communs ; & par conséquent la circonférence ACB pourroit avoir trois de ses points également distans du point G centre de l'autre circonférence : or elle ne peut avoir que deux de ses points, savoir, A & B, également distans du point C ; car tous ses autres points s'en éloignent ou s'en approchent toujours de plus en plus, à cause de l'uniformité de sa courbure : donc, &c.

*Corollaire VII.*

351. Deux circonférences de cercle ne peuvent se toucher qu'en un seul point : car soit qu'elles se touchent en dedans (*fig.* 7.), soit qu'elles se touchent en dehors (*fig.* 8.), elles ne peuvent avoir qu'un seul point commun O : si elles en avoient deux, elles se couperoient, comme il arrive (*fig.* 9.)

*Remarque.*

352. Lorſque deux circonférences de cercle ſe touchent, la ligne d'excentricité eſt égale à la ſomme ou à la différence des rayons ; car ſi elles ſe touchent en dehors (*fig.* 8.), la ligne d'excentricité, ſavoir CD, eſt égale, comme il eſt évident, à la ſomme des rayons CO+OD : ſi elles ſe touchent en dedans (*fig.* 7.) la ligne d'excentricité eſt CD=CO —OC, qui eſt la différence des rayons.

*Corollaire VIII.*

353. Deux circonférences de cercle peuvent avoir un point commun, lorſqu'elles ſe touchent; elles peuvent avoir deux points communs, lorſqu'elles ſe coupent : mais elles ne peuvent avoir trois points communs; parce qu'elles ne peuvent ni ſe toucher, ni ſe couper en trois points.

*Corollaire IX.*

354. Pour déterminer la poſition d'une circonférence de cercle, deux points ne ſuffiſent pas ; car elle peut avoir deux points communs, ſoit avec une ligne droite, ſoit avec une autre circonférence de cercle : mais trois points ſuffiſent, parce qu'elle ne peut avoir trois points communs, ni avec une ligne droite, ni avec une autre circonférence de cercle.

*Corollaire X.*

355. On peut toujours faire paſſer une circonférence de cercle par trois points donnés B, C, D, (*fig.* 4.) & non poſés en ligne droite : car prenant un point A également diſtant des trois points donnés, & de ce point A comme centre, & de l'intervalle AB décrivant avec le compas un arc, cet arc paſſera par les trois points donnés, & continué donnera une circonférence de cercle.

Il ne s'agit pour cela que de trouver le centre A; nous en donnerons dans la ſuite la méthode.

## *DÉFINITIONS.*

I.

356. Les portions GH, HI, IB, &c. (*fig.* 4.) de la circonférence, compriſes entre deux rayons, s'appellent *Arcs* de circonférence.

I I.

357. Toute portion priſe dans la ſurface du cercle, compriſe entre deux rayons & terminée par un arc, s'appelle *Secteur* de cercle.

I I I.

358. Une ligne droite FG ou DE (*fig.* 5.) qui paſſe par les extrêmités d'un arc, s'appelle *Corde.*

I V.

359. La corde diviſe la ſurface du cercle en deux parties inégales, dont la plus grande s'appelle le *grand Segment*; & la plus petite, le *petit Segment.*

*Corollaire I.*

360. Dans un cercle, ou dans des cercles égaux, les cordes égales ſoutiennent des arcs égaux, & les arcs égaux ſont ſoutenus par des cordes égales : ce qui eſt évident, puiſque la courbure du cercle étant par-tout uniforme, il eſt néceſſaire qu'entre les extrêmités des cordes égales ſoient compris des arcs égaux.

*Corollaire II.*

361. Dans un même cercle, ou dans des cercles égaux, les plus grandes cordes ſoutiennent de plus grands arcs, & les plus grands arcs ſont ſoutenus par de plus grandes cordes.

*Corollaire III.*

362. Dans un même cercle la plus grande de toutes les cordes eſt celle qui paſſe par le centre, ou eſt le diamétre lui-même; *par ex* : le diamétre AB (*fig.* 5.)

(*fig.* 5.) eſt plus grand que la corde DE. Car le diamétre AB eſt égal aux rayons CE+CD : or la ſomme CE+CD=AD, eſt plus grande que la corde DE (334.) : donc, &c.

*Corollaire IV.*

363. La corde différente du diamétre partage la circonférence & la ſurface du cercle en deux portions inégales ; mais tout diamétre partage & la circonférence & la ſurface du cercle en deux également. Car le diamétre pouvant être regardé comme la plus grande de toutes les cordes, il ſoutient par conſéquent le plus grand de tous les arcs, & le plus grand de tous les ſegmens que l'on puiſſe prendre dans le cercle : or dans le cercle, le plus grand de tous les arcs eſt la demi-circonférence, & le plus grand de tous les ſegmens eſt le demi-cercle ; donc le diamétre partage & la circonférence & le cercle en deux moitiés, ou en deux parties égales.

## CHAPITRE II.

### *Des Propriétés des Lignes.*

I°. LEs lignes dont nous examinons ici les propriétés, ſont les lignes droites : les propriétés des lignes droites naiſſent de leur *poſition* reſpective, & de leur *aſſortiment*.

II°. La poſition reſpective des lignes eſt la poſition d'une ligne par rapport à une autre ligne, ou à pluſieurs autres lignes ; l'aſſortiment des lignes conſiſte dans la rencontre & la réunion de pluſieurs lignes par leurs extrêmités.

III°. De la poſition reſpective des lignes naiſſent les *angles* : de l'aſſortiment des lignes réſultent les *figures*.

## ARTICLE I.

*De la Position respective des Lignes droites, & des Angles.*

Nous parlerons, 1°. de la position respective des lignes droites: 2°. des angles.

### PARAGRAPHE I.

*De la Position respective des Lignes droites.*

Une ligne droite considérée toute seule, n'a qu'une position *absolue*; elle ne peut avoir de position *respective* qu'à l'égard d'autres lignes. La position d'une ligne droite peut être considérée ou par rapport à d'autres lignes droites, ou par rapport au cercle.

#### NOMBRE I.

*De la position d'une ligne droite par rapport à d'autres droites.*

*HYPOTHESE I.*

364. Concevez que la ligne CD (*fig.* 9.) immobile au point C, décrive par son extrêmité D une circonférence de cercle, & qu'ensuite immobile au point D, elle décrive par son extrêmité C une autre circonférence de cercle; ou ce qui revient au même, concevez que des points C & D, pris comme centres, on décrive successivement & de la même ouverture de compas deux circonférences, ces deux circonférences s'entrecouperont aux points A & B, & on les appelle circonférences *excentriques*, comme nous l'avons déjà dit.

*Corollaire I.*

365. Les points d'intersection A & B des deux cercles seront chacun également distans des deux centres C & D, extrêmités de la ligne CD: car AC = AD, puisqu'ils sont rayons de cercles égaux; & par la même raison BC = BD.

*Corollaire II.*

366. Si vous menez la ligne droite AB, les extrêmités A & B de cette ligne ſeront également éloignées chacune des deux termes, ou points C & D; car les extrêmités de la ligne AB ne ſont point diſtinguées des points d'interſection A, B, des deux cercles.

*Corollaire III.*

367. Tous les autres points de la ligne AB ſeront auſſi également diſtans chacun des termes, ou points C & D. En effet nous venons de prouver que la ligne AB dans ſes extrémités A & B, eſt également éloignée des deux termes C & D: or elle eſt droite; donc (331) elle conſerve dans tous ſes autres points la même poſition & la même direction que dans ſes extrêmités: donc au point I, *par ex:* elle ne s'approchera pas plus de C que de D, ni de D que de C, c'eſt-à-dire que l'on aura IC = ID.

*Corollaire IV.*

368. Donc la ligne AB en tombant ſur la ligne CD, ne s'incline pas plus d'un côté que de l'autre, ne penche pas plus vers le point C que vers le point D.

*DÉFINITIONS.*

I.

369. Une ligne AB qui tombe ſur une autre ligne CD, ſans pencher plus d'un côté que de l'autre, s'appelle *Perpendiculaire.*

II.

370. La ligne ſur laquelle tombe la perpendiculaire, eſt auſſi perpendiculaire à l'égard de l'autre; *par ex:* la ligne CD eſt perpendiculaire ſur AB, auſſi-bien que AB ſur CD (*fig.* 9.)

III.

371. Les lignes AC, AD (*fig.* 9.) qui tombent

ſur une ligne CD, de façon qu'elles s'inclinent plus d'un côté que de l'autre, s'appellent *Obliques*, par rapport à la ligne CD; & les diſtances CI, DI, (*fig.* 9.) s'appellent *Eloignemens de Perpendicule.*

IV.

372. Les obliques peuvent être inclinées, ou dans le même ſens, comme CF, CB (*fig.* 11.), ou en ſens contraire, comme CA, CF.

THÉORÊME I.

373. *Une ligne* AI (fig. 9.) *qui tombe ſur une autre* CD, *de façon qu'elle ait deux de ſes points*, par ex : A & I, *également diſtans chacun de deux termes ou deux points* C, D, *donnés dans l'autre ligne, eſt dès-lors perpendiculaire ſur cette ſeconde ligne* CD.

DÉMONST. Car ſi elle n'étoit point perpendiculaire ſur CD, elle pencheroit plus d'un côté que de l'autre; & dans ce cas le point A, *par ex* : ſeroit plus proche de C que de D, ou de D que de C, & l'on auroit AC $<$ AD, ou AD $<$ AC; ce qui eſt contre la ſuppoſition.

*Corollaire.*

374. Pour mener une ligne perpendiculaire AI, ou AB, ſur une ligne donnée CD (*fig.* 9.), il n'y a qu'à décrire des extrêmités C, D, pris comme centres, & de la même ouverture de compas, des cercles, leſquels s'entrecouperont, & joindre les points d'interſection A & B par une droite AB, laquelle ſera la perpendiculaire cherchée.

Remarquez 1°. que pour mener une perpendiculaire AB, au lieu de cercles, il ſuffit de tracer des arcs qui s'entrecoupent aux points A & B.

Remarquez 2°. que c'eſt par cette même méthode que l'on diviſe une ligne droite donnée, *par ex* : CD en deux également.

THÉORÊME II.

375. *Une ligne* AI *étant perpendiculaire ſur une au-*

*tre* CD, *ſi l'un des points de la perpendiculaire eſt également éloigné de deux termes ou deux points* C, D, *donnés dans l'autre ligne, tous les autres points de la perpendiculaire ſeront également éloignés chacun de ces deux mêmes points* C, D (fig. 9.)

Démonst. Si l'on ſuppoſe que le point A ſoit également éloigné des deux points C, D, ou que l'on ait AC = AD, je dis que tout autre point de la perpendiculaire; *par ex*: le point I ſera auſſi également éloigné des deux mêmes points C & D, ou que l'on aura IC = ID. Car ſi l'on avoit IC > ID, la ligne AI pencheroit plus du côté de C que de D; & ſi l'on avoit ID > IC, la ligne AI pencheroit plus du côté de D que de C: donc la ligne AI ne ſeroit plus perpendiculaire ſur CD, ce qui eſt contre la ſuppoſition.

*Corollaire I.*

376. Une perpendiculaire AI étant prolongée tant que l'on voudra de part & d'autre, tous les points par où elle paſſera, ſeront toujours également diſtans chacun des deux termes ou deux points donnés C & D. Car la perpendiculaire AI étant prolongée juſqu'en B, & le point I étant également diſtant des extrêmités C & D, il ſuit que le point B ſera de même également diſtant des extrêmités C & D, & que l'on aura BC = BD, ce qui ſe prouve de la même maniere que le théorême précédent.

*Corollaire II.*

377. Il y a donc cette différence entre la ligne *perpendiculaire*, & la ligne ſimplement *droite*, que pour juger de la poſition d'une ligne perpendiculaire, *par ex*: CD (*fig.* 11.), par rapport à une autre ligne donnée EB, il ſuffit qu'il ſoit donné un ſeul de ſes points, tel que C; car ſi le point C eſt également diſtant des deux termes E, B, il en ſera de même de tous les autres points de la perpendiculaire: au lieu que pour dé-

terminer la position d'une ligne simplement *droite* CF, le point C seul ne suffit pas; car le point C ne détermine pas plutôt la position de CF que de CB, ou que de CA: mais il faut qu'il soit donné deux points; *par ex*: C & F, pour pouvoir juger de la position de la ligne CF par rapport à l'autre ligne EB.

### THÉORÊME III.

378. *La Perpendiculaire est plus courte que l'Oblique menée d'un même point à une même ligne droite*, par ex: AI *est plus courte que* AC (*fig.* 9.)

DÉMONST. Prolongez AI de façon que l'on ait AI = IB; cela posé, la ligne AB est plus courte (334) que la ligne AC + CB: donc la moitié de AB est plus courte que la moitié de AC + CB: or AI est la moitié de AB, puisque AI = IB, & pareillement AC, est la moitié de AC + CB, puisque AC = CB (345): donc, &c.

### THÉORÊME IV.

379. *D'un point pris hors d'une ligne on ne peut abbaisser sur cette ligne qu'une seule Perpendiculaire; pareillement d'un point pris dans une ligne on ne peut élever sur cette ligne qu'une seule Perpendiculaire* (fig. 9 & 11.)

DÉMONST. I. Part. La perpendiculaire est la ligne la plus courte que l'on puisse mener d'un point à une ligne (378): or il ne peut y avoir qu'une seule ligne qui soit la plus courte entre deux termes donnés: donc, &c.

DÉM. II. Part. Dans la ligne EG (*fig.* 11.), prenons le point D également éloigné des points A & F: or de ce point D on ne peut élever que la seule perpendiculaire DC. Car si du point D on pouvoit élever une seconde perpendiculaire distinguée de DC, cette seconde perpendiculaire partant d'un point D, également éloigné de A & de F, passeroit par conséquent toujours (376) par des points également éloignés de A & de F; donc elle passeroit par le point

C; donc elle auroit deux points C & D communs avec la premiere perpendicaire CD, & ſe confondroit ainſi avec elle.

*Corollaire.*

380. C'eſt pourquoi la ligne perpendiculaire eſt la meſure dont ſe ſervent les Géométres pour meſurer les *diſtances*, les *hauteurs*, &c. parce qu'elle eſt la ligne la plus courte que l'on puiſſe mener entre deux termes donnés, & qu'entre deux termes on ne peut mener qu'une ſeule perpendiculaire: deux propriétés qui donnent à la perpendiculaire les deux caracteres propres de la *meſure*, ſçavoir, la *ſimplicité* & l'*invariabilité*.

THÉORÊME V.

381. *De toutes les Obliques* CF, CB, *&c. menées d'un même point* C *ſur une même ligne* EG, *celles qui ſont moins éloignées de la Perpendiculaire, ſont plus courtes; celles qui ſont plus éloignées, ſont plus longues* (fig. 11.)

DÉMONST. Prolongez CD juſqu'au point H, de façon que l'on ait CD=DH, & menez les lignes HF, HB; il eſt évident que la ligne CBH eſt plus grande que CFH, puiſqu'elle s'écarte davantage de la voie la plus courte: donc la moitié de CBH eſt plus longue que la moitié de CFH: or CB eſt la moitié de CBH, & CF eſt la moitié de CFH. Car la ligne CH étant ſuppoſée perpendiculaire ſur la ligne EG, la ligne EG ſera auſſi perpendiculaire ſur CH, (370); & le point D étant également éloigné des extrêmités C & H par la conſtruction, il s'enſuit que les points F & B ſeront auſſi également éloignés chacun des extrêmités C & H: donc on aura CF=FH, & CB=BH: donc CF eſt la moitié de CFH, & CB eſt la moitié de CBH.

*Corollaire I.*

382. De toutes les obliques menées d'un même

point ſur une même ligne : 1°. celles qui ont même éloignement de perpendicule, ſont égales : 2°. celles qui ſont égales, ont même éloignement de perpendicule : 3°. celles qui ſont égales & ont même éloignement de perpendicule, appartiennent à une même perpendiculaire (*fig.* 11.).

I°. Si les éloignemens de perpendicule ſont égaux, on aura AD=DF : donc dans la perpendiculaire CD, le point D, & par conſéquent auſſi le point C, ſera (375.) également éloigné des points A & F ; donc on aura CA=CF.

II°. Si les obliques ſont égales, on aura CA=CF : donc dans la perpendiculaire CD, le point C, & par conſéquent auſſi le point D ſera également éloigné des points A & F : donc on aura DA=DF.

III°. Si l'on a les obliques égales CA=CF, & les éloignemens de perpendicule égaux DA=DF, il eſt clair que la ligne dont les obliques ſont également éloignées, eſt une même perpendiculaire CD.

*Corollaire II.*

383. Si les obliques ſont tirées de différens points & en ſens contraire, ſoit ſur une même ligne, ſoit ſur différentes lignes, comme AC, EG (*fig.* 12 & 13.), il arrivera

I°. Que les obliques AC, EG ſeront égales, lorſqu'elles auront des perpendiculaires égales, & même éloignement de perpendicule.

II°. Que les éloignemens de perpendicule BC, DG ſeront égaux, lorſque les obliques ſeront égales, & les perpendiculaires égales.

III°. Que les perpendiculaires AB, ED ſeront égales, lorſque les obliques ſeront égales, & les éloignemens de perpendicule égaux.

En effet concevez que l'extrêmité A de la perpendiculaire AB ſoit poſée ſur l'extrêmité E de la perpendiculaire ED ; alors les figures 12 & 13 reviendront

à la figure 11, & le cas dont nous parlons, retombera dans celui du corollaire précédent, où deux lignes obliques ſont tirées d'un même point ſur une même ligne; dans lequel cas nous avons prouvé que les trois propriétés énoncées ont lieu.

*Corollaire III.*

384. Si les obliques ſont tirées de différens points & dans le même ſens, ſoit ſur une même ligne, ſoit ſur différentes lignes, comme AC, EF (*fig.* 12 & 13.), on prouve auſſi que les propriétés ci-deſſus énoncées ont lieu; puiſqu'en prenant de l'autre côté de la perpendiculaire ED, au lieu de l'oblique EF, l'oblique EG=EF, on fait tomber le cas préſent dans celui du corollaire précédent.

*Corollaire IV.*

385. Donc en général de ces trois choſes, lignes perpendiculaires, lignes obliques, éloignemens de perpendicule; ſi deux d'une part ſont égales aux deux correſpondantes de l'autre part, la troiſiéme ſera auſſi néceſſairement égale de part & d'autre.

*Corollaire V.*

386. D'un point on ne peut mener que deux obliques égales ſur une même ligne EG (*fig.* 11.): car il ne peut y avoir que deux obliques CA, CF, également éloignées de la perpendiculaire, & par conſéquent égales.

*HYPOTHESE II.*

388. Si ſur les arcs DFA, CEA (*fig.* 14.) vous prenez des portions égales DF, CE, & que par les points E & F vous meniez une ligne droite GH, cette droite GH eſt dite être *parallele* à la ligne CD; parce que ſi des points quelconques E, F vous abbaiſſez des perpendiculaires pour meſurer la diſtance des deux lignes, cette diſtance ſe trouvera égale dans tous les points correſpondans des deux lignes.

Lorſqu'on veut mener une ligne parallele à une autre ligne donnée CD (*fig.* 14.), il n'eſt pas néceſſaire que des points C & D on décrive des cercles entiers; les Géométres ſe contentent de décrire les arcs indéfinis CEA, DFA, ſur leſquels ils prennent avec le compas des portions égales CE, DF: on peut auſſi, au lieu des points C & D, prendre pour centres de ces cercles, ou de ces arcs, deux points quelconques E & F (*fig.* 15.) pris à volonté dans la ligne CD; ce qui eſt évident.

## *DÉFINITIONS.*

### I.

388. On appelle donc lignes *Paralleles* deux lignes qui ſont également éloignées l'une de l'autre dans tous leurs points correſpondans (*fig.* 15.)

### II.

389. On définit auſſi les *Paralleles* des lignes qui, quelque prolongées qu'on les ſuppoſât, ne ſe rencontreroient jamais.

### *Corollaire I.*

390. Donc deux lignes perpendiculaires compriſes entre deux paralleles, ſont égales; puiſqu'elles meſurent des diſtances égales.

### *Corollaire II.*

391. Donc deux lignes paralleles compriſes entre deux paralleles, ſont égales entr'elles; car ſi elles ſont perpendiculaires, elles ſeront égales, comme nous venons de le prouver: ſi elles ſont obliques, elles auront même éloignement de perpendicule, puiſqu'elles ſont paralleles, & par conſéquent elles ſeront égales.

### *Corollaire III.*

392. Donc deux lignes également inclinées & dans le même ſens entre deux paralleles, ſont éga-

les ; car étant également inclinées, elles ont même éloignement de perpendicule : donc elles ſont égales.

*Corollaire IV.*

393. Pareillement deux lignes EG, EF (*fig.* 13.) également inclinées en ſens contraire entre deux paralleles, ſont égales entr'elles : car quoiqu'inclinées en ſens contraire, elles ſont cependant également éloignées de perpendiculaires égales.

THÉORÊME I.

394. *Deux lignes qui ſont chacune perpendiculaires à une même troiſiéme Ligne, ſont paralleles entr'elles.*

DÉMONST. Si elles n'étoient pas paralleles entre elles, elles ſe rencontreroient en un point quelconque ; & par conſéquent il y auroit deux perpendiculaires menées d'un même point ſur une même ligne, ce qui eſt impoſſible (379).

THÉORÊME II.

395. *Une Ligne* AB *perpendiculaire à une Ligne* GH, *eſt auſſi perpendiculaire à une ſeconde ligne* CD, *parallele à* GH (fig. 14.)

DÉMONST. Si la ligne AB perpendiculaire ſur GH, ne l'étoit pas ſur CD, CD ne ſeroit pas non plus perpendiculaire ſur AB ; donc CD ſeroit inclinée ſur AB : donc CD étant prolongée rencontreroit de part ou d'autre la ligne GH, & par conſéquent ne lui ſeroit pas parallele, ce qui eſt contre la ſuppoſition.

*Corollaire.*

396. Une ligne GI perpendiculaire à une ligne AB (*fig.* 17.), eſt auſſi perpendiculaire à toutes les lignes CD, EF, &c. paralleles à la ligne AB.

THÉORÊME III.

397. *Une ligne* AB, *parallele à une premiere parallele* CD, *eſt auſſi parallele à la ſeconde parallele* EF, (fig. 17.)

Démonst. Par l'hypothèſe la ligne AB eſt parallele à la ligne CD, & par conſéquent la ligne GH perpendiculaire ſur AB, l'eſt auſſi ſur CD: par l'hypothèſe encore la ligne CD eſt parallele à la ligne EF: donc la ligne prolongée GHI, perpendiculaire ſur CD, le ſera auſſi ſur EF, donc la ligne GI eſt perpendiculaire ſur AB & ſur EF: donc (394) AB & EF ſont paralleles.

C'eſt la même choſe auſſi de dire que deux lignes, paralleles à une même troiſiéme ligne, ſont paralleles entr'elles.

## Théorême IV.

398. *Une ligne* IF, *oblique & inclinée ſur une parallele* AB, *eſt également inclinée ſur l'autre parallele* CD (fig. 16.)

Démonst. Si la ligne IF étoit plus ou moins inclinée ſur la parallele AB, que ſur la parallele CD, la parallele AB ſeroit pareillement plus ou moins inclinée ſur la ligne IF, que ne l'eſt la parallele CD: donc les paralleles AB, CD, s'inclineroient l'une ſur l'autre, & prolongées ſe rencontreroient quelque part; & par conſéquent ne ſeroient plus paralleles, ce qui eſt contre la ſuppoſition.

### *Corollaire I.*

399. Une ligne GI oblique & inclinée ſur une ligne AB (*fig.* 18.) eſt également inclinée ſur toutes les lignes CD, EF, &c. paralleles à la ligne AB.

### *Corollaire II.*

400. En général deux lignes paralleles ont toujours une même poſition par rapport à une même troiſiéme ligne; & réciproquement.

## Nombre II.

### *De la poſition de la ligne droite par rapport au Cercle.*

Une ligne droite conſidérée par rapport à une au-

tre ligne droite, peut avoir trois ſortes de poſitions; ſçavoir, être *perpendiculaire*, être *oblique*, être *parallele*: une ligne droite conſidérée par rapport au cercle, ne peut avoir que deux ſortes de poſition; ſçavoir, être *tangente*, ou être *ſécante*.

## *DÉFINITIONS.*

I.

401. On appelle *Tangente*, une ligne droite qui rencontre en dehors la circonférence du cercle ſans la couper.

III.

402. Le point où la tangente rencontre la circonférence du cercle, s'appelle point de *Contact*, ou de *Contingence*.

II.

403. On appelle *Sécante*, toute ligne droite qui coupe, ou qui, prolongée, couperoit la circonférence du cercle.

V I.

404. La ſécante s'appelle *Sécante extérieure*, lorſqu'elle eſt tirée d'un point pris hors de la circonférence; & elle s'appelle *Sécante intérieure*, lorſqu'elle eſt tirée d'un point pris en dedans du cercle.

THÉORÊME I.

405. *De toutes les Sécantes intérieures tirées d'un point pris au-deſſous du centre, la plus courte ſera celle qui, prolongée, paſſeroit par le centre* (fig. 19.).

DÉMONST. La ſécante AB, qui, prolongée, paſſeroit par le centre C, eſt plus courte que la ſécante AD. Car (334.) CAD > CD: or CD = CB, parce qu'elles ſont rayons d'un même cercle: donc CAD > CB: donc, en retranchant de part & d'autre la partie commune CA, on aura AD > AB.

*Remarque.*

406. De toutes les ſécantes intérieures, tirées du centre à la circonférence du cercle, aucune n'eſt plus

courte, aucune n'eſt plus longue ; mais elles ſont toutes égales, parce qu'elles ſont toutes *rayons* d'un même cercle.

### Théorême II.

407. *De toutes les Sécantes intérieures tirées d'un même point, pris au-deſſus du centre à la circonférence concave du cercle, la plus longue ſera celle qui paſſe par le centre* ( fig. 20. )

Démonst. La ſécante AB qui paſſe par le centre C, eſt plus longue que toute autre ſécante, *par ex* : AD. Car CB = CD, puiſqu'elles ſont rayons d'un même cercle ; donc ajoutant à l'une & à l'autre la portion commune CA, on aura ACB = ACD ; or (334.) ACD > AD : donc ACB, ou AB > AD.

### Théorême III.

408. *De toutes les Sécantes extérieures, menées d'un même point à la circonférence convexe du cercle, la plus courte eſt celle qui, prolongée, paſſeroit par le centre* (fig. 21.).

Démonst. Ayant continué les deux ſécantes AB, AD, juſqu'au centre C, on aura (334.) ABC < ADC ; donc retranchant de part & d'autre les lignes égales, ou rayons EC, DC, il reſtera AB < AD.

### Théorême IV.

409. *De toutes les Sécantes extérieures, tirées d'un même point à la circonférence concave d'un cercle, la plus longue ſera celle qui paſſera par le centre* ( fig. 22. ).

Demonst. La ſécante AB qui paſſe par le centre C, eſt plus longue que AD. Car (345.) CB = CD : donc ajoutant la partie commune CA, on aura BCA = DCA : or (334.) DCA > DA ; donc auſſi BCA > DA.

### *Remarque.*

410. Si les ſécantes étoient menées, non d'un point pris hors de la circonférence, mais d'un point pris

dans la circonférence, telles que AB & AF (*fig.* 6.), la plus longue ſeroit encore celle qui paſſe par le centre, ſçavoir la ſécante AB. Car alors la ſécante AB eſt un diamétre, & la ſécante AF eſt une corde: or l'on a prouvé (362.) que dans le cercle le diamétre eſt plus grand que la corde.

## *HYPOTHESE I.*

411. Suppoſez que la ſécante AF (*fig.* 6.) change de poſition, & devienne la ſécante CD (*fig.* 23.) perpendiculaire à l'autre ſécante FB, vous aurez alors un *diamétre* perpendiculaire à une *corde* dans un même cercle.

### THÉORÊME.

412. *Dans un même Cercle* (fig. 23.).

I°. *Tout Diamétre, ou Rayon, qui eſt perpendiculaire à une corde, coupe cette corde & l'arc ſoutenu par cette corde, en deux également.*

II°. *Tout Diamétre, ou Rayon, qui coupe une corde en deux également, eſt perpendiculaire à cette corde.*

III°. *Toute Ligne perpendiculaire à une corde, & qui la diviſe en deux également, eſt Diamétre, ou Rayon.*

DEMONST. I. Part. Le diamétre FB paſſe par le centre A, qui eſt également diſtant des extrémités C & D de la corde; or il eſt perpendiculaire à la corde: donc le point E, par où paſſe ce diamétre, eſt auſſi également diſtant des extrémités C & D: donc on aura CE=ED: par la même raiſon on aura l'arc CB =BD.

DÉMONST. II. Part. Le diamétre paſſe par le centre A, qui eſt également éloigné des extrémités C & D; & puiſqu'il coupe la corde en deux également, le point E eſt auſſi également diſtant des extrémités C & D: donc dans ce diamétre il y a deux points A, E, qui ſont chacun également diſtans des extrémités de

la corde : donc (373.) il eſt perpendiculaire à la corde.

Démonst. III. Part. Puiſque la ligne FB coupe la corde en deux également, le point E eſt également diſtant des extrémités C & D de la corde : & puiſqu'elle eſt perpendiculaire à la corde; elle paſſe toujours par des points également diſtans des extrémités C & D : donc elle paſſe par le centre A ; or toute ligne qui paſſe par le centre, eſt rayon, ou diamétre : donc, &c

*Corollaire.*

413. D'où il ſuit en général que de ces trois conditions, être perpendiculaire à une corde ; couper une corde en deux également ; être rayon, ou diamétre, deux étant données, la troiſiéme s'enſuit néceſſairement.

## *HYPOTHESE II.*

414. Suppoſez que la corde CD (*fig.* 23.) reſtant toujours perpendiculaire au diamétre, vienne à deſcendre parallelement à elle-même juſqu'à l'extrémité B, & qu'elle devienne la ligne EF (*fig.* 24.), vous aurez alors une ligne *perpendiculaire* à l'extrémité du *rayon*, ou *du diamétre.*

## Théorême I.

415. *Une ligne perpendiculaire à l'extrémité du rayon, ou du diamétre, eſt tangente par rapport au cercle ;* (fig. 24.).

Démonst. Elle eſt ou tangente, ou ſécante : or elle n'eſt point ſécante. Si elle l'étoit, elle couperoit néceſſairement (346.) la circonférence du cercle en deux points, *par ex* : A & D : donc cette ligne ſeroit la ligne AB, qui rentre dans le cercle : donc menant ſur AB une ligne quelconque CH, le point H ſera en dedans du cercle, & la ligne CH ſera plus courte que le rayon CA : donc le rayon CA n'étant

n'étant point la ligne la plus courte que l'on puiſſe mener d'un même point C ſur la ligne AB, ne ſera pas perpendiculaire ſur la ligne AB : donc auſſi la ligne AB ne ſera pas perpendiculaire à l'extrêmité du rayon ; ce qui eſt contre notre ſuppoſition.

### THÉORÊME II.

416. *Réciproquement la Tangente eſt toujours perpendiculaire à l'extrêmité du rayon mené au point de contingence* (fig. 24.).

DÉMONST. Si la tangente AE n'eſt pas perpendiculaire à l'extrêmité du rayon CA, le rayon ne ſera pas non plus perpendiculaire, mais oblique ſur la tangente ; ſoit donc CH, cette perpendiculaire menée du centre à la tangente : donc on aura CH $<$ CA : donc l'extrêmité H eſt en dedans du cercle : donc la tangente rentreroit dans le cercle, & par conſéquent ne ſeroit plus tangente ; ce qui eſt contre la ſuppoſition.

### THÉORÊME III.

417. *La Tangente ne touche la circonférence du cercle qu'en un ſeul point.*

DÉMONST. Si elle touchoit la circonférence du cercle en deux points, ſoient menés du centre deux rayons à ces deux points de contingence : or tout rayon mené au point de contingence, eſt perpendiculaire ſur la tangente, comme nous venons de le voir : donc on auroit deux perpendiculaires menées d'un même point ſur une même ligne, ce qui eſt impoſſible.

*Corollaire I.*

418. De ces trois conditions, être rayon, ou paſſer par le centre ; aboutir au point de contingence ; être perpendiculaire à la tangente ; deux étant poſées, la troiſiéme s'enſuit néceſſairement : En effet,

I°. Tout rayon qui aboutit au point de contingence, eſt auſſi perpendiculaire à la tangente; puiſque (416.) la tangente eſt toujours perpendiculaire à l'extrêmité du rayon mené au point de contingence.

II°. Toute ligne menée au point de contingence, & qui eſt perpendiculaire à la tangente, dès-lors paſſe par le centre ou eſt rayon: car du point de contingence, ou ne peut élever ſur la tangente d'autre perpendiculaire, que celle qui paſſe par le centre, ou qui eſt rayon.

III°. Toute ligne qui eſt perpendiculaire à la tangente, & qui paſſe par le centre, ou qui eſt rayon, aboutit dès-lors au point de contingence, car ſi elle n'y aboutiſſoit pas, on pourroit donc avoir deux perpendiculaires menées du centre à la tangente; l'une qui aboutiroit au point de contingence (416.), & l'autre qui n'y aboutiroit pas par l'hypothèſe, ce qui eſt impoſſible (379.).

### *Corollaire II.*

419. Les arcs de circonférence compris entre une corde & une tangente paralleles, ſont égaux; car ayant mené du point de contingence E (*fig.* 25.) le diamétre EF, ce diamétre ſera perpendiculaire à la tangente AB: donc il le ſera auſſi ſur la corde GH, parallele à la tangente: donc (412.) il partagera la corde GH, & l'arc GEH en deux également: donc on aura EG=EH.

### *Corollaire III.*

420. Les arcs de circonférence compris entre deux tangentes paralleles, ſont égaux (*fig.* 25.); car ſi du point de contingence F on éleve une perpendiculaire ſur la tangente CD, cette perpendiculaire paſſera par le centre (418.): donc elle ſera un diamétre; mais ce diametre ſera auſſi (395.) perpendiculaire à la tan-

gente AB parallele à la premiere CD: donc il aboutira (418.) au point de contingence E: donc les deux tangentes paralleles ſeront perpendiculaires aux extrêmités d'un même diamétre: or tout diamétre partage la circonférence en deux également (363.): donc les arcs compris entre deux tangentes paralleles ſont égaux.

*Corollaire IV.*

421. Les arcs de circonférence compris entre deux cordes paralleles, *par ex:* GH, IK, ſont égaux: car l'arc.EGIF=EHKF, comme nous venons de le prouver; donc retranchant d'une part les arcs EG. & EH qui ſont égaux (419.), & retranchant de l'autre les arcs IF & KF, qui ſont encore égaux (419.), les reſtes, ou les arcs GI & HK compris entre les deux cordes paralleles, ſeront égaux.

THÉORÊME IV.

422. *On ne peut mener qu'une ſeule Tangente à l'extrêmité d'un même rayon.*

DÉMONST. La tangente eſt perpendiculaire à l'extrêmité du rayon: or à l'extrêmité d'une ligne on ne peut mener (379.) qu'une ſeule perpendiculaire: donc, &c.

*Corollaire.*

423. Donc par le point de contingence il n'eſt pas poſſible de faire paſſer entre la tangente & la circonférence aucune ligne droite, telle que AB (*fig.* 24.) Car cette ligne droite ſeroit oblique par rapport au rayon: donc menant du centre une perpendiculaire CH ſur AB, on aura CH $<$ CA: donc le point H ſera en dedans du cercle, & par conſéquent la ligne AB coupe la circonférence, & ne paſſe pas entre la tangente & la circonférence.

THÉORÊME V.

424. *Entre la tangente & la circonférence on peut faire paſſer par le point de contingence une infinité de Courbes*, (fig. 26.).

Démonst. Si l'on prolonge le rayon EC juſqu'en D, & que du point D comme centre; & de l'intervalle DE on décrive la courbe FEG, je dis que cette courbe paſſera entre la tangente & la circonférence, ſans couper ni l'une ni l'autre; & que prolongeant toujours de même le rayon, on pourra décrire ſemblablement tant de courbes que l'on voudra.

I°. Elle ne coupera point la tangente, puiſque le rayon DE de cette courbe eſt terminé au point de contingence.

II°. Elle ne coupera pas la circonférence; car ſi elle la coupoit, *par ex*: au point O, le point O devenant commun à la petite & à la grande circonférence, on auroit CE=CO: or cela n'eſt pas, mais plutôt on a CE<CO; car CE & CO étant, par rapport à la grande circonférence, deux ſécantes intérieures menées d'un même point pris au-deſſous du centre D de cette circonférence; nous avons prouvé (405.) que la ligne CE qui, ptolongée, paſſeroit par le centre D, eſt plus courte que CO, qui n'y paſſeroit point: donc le point O eſt hors de la petite circonférence.

## PARAGRAPHE II.

### *Des Angles.*

Les angles ont une origine; ils peuvent être de différente qualité: ils ſont ſuſceptibles d'évaluation; c'eſt ce que nous allons faire voir.

### Nombre I.

### *De l'Origine des Angles.*

### *HYPOTHESE I.*

425. Si le rayon AD (*fig.* 27.) qui dans ſa révolution décrit par ſon extrêmité D une circonférence de cercle, eſt ſuppoſé laiſſer, par-tout où il paſſe,

des traces, ou lignes AC, AB, AI, &c. deux de ces *traces*, ou *lignes*, ou *rayons* AC, AD, intercepteront un *eſpace*, laiſſeront une *ouverture*, auront entr'eux une *inclinaiſon*, que l'on peut évaluer & comparer.

## *DÉFINITIONS.*

### I.

426. Cet *eſpace*, cette *ouverture*, cette *inclinaiſon* plus ou moins grande, que laiſſent entr'eux deux rayons, ou lignes AC, AD, s'appelle *Angle*.

### II.

427. Les rayons AC, AD s'appellent les *Côtés* de l'angle; le point A où les côtés ſe rencontrent, s'appelle le *Sommet* de l'angle; l'arc CD compris entre les côtés, & décrit du ſommet A, pris comme centre, s'appelle la *Meſure* de l'angle.

### III.

428. L'angle qui eſt meſuré par un arc qui eſt le quart de la circonférence, s'appelle *Angle droit*; tel eſt l'angle BAD (*fig.* 27.), ou ABC (*fig.* 28.).

### IV.

429. L'angle qui eſt meſuré par un arc moindre que le quart de la circonférence, s'appelle *Angle aigu*; tel eſt l'angle CAD (*fig.* 27.), ou l'angle DEF (*fig.* 29.).

### V.

430. L'angle qui eſt meſuré par un arc plus grand que le quart de la circonférence, s'appelle *Angle obtus*; tel eſt l'angle IAD (*fig.* 27.), ou l'angle GHO (*fig.* 30.).

### VI.

431. La différence d'un angle aigu avec l'angle droit s'appelle *complément* de cet angle, & ſa différence avec deux angles droits, s'appelle *ſupplément*

de cet angle ; *par ex* : l'angle IAB (*fig.* 27.) eſt le complément de l'angle IAH, & l'angle IAD eſt ſon ſupplément ; en général on appelle *complément* ou *ſupplément* d'un angle, ce qu'il faut lui ajouter pour qu'il devienne égal ou à un angle droit, ou à deux angles droits.

Obſervez que, lorſque l'angle eſt déſigné par trois lettres, la lettre du milieu déſigne toujours le ſommet de l'angle ; & lorſqu'on déſigne l'angle par une ſeule lettre, on prend toujours celle qui déſigne le ſommet.

## *HYPOTHESE II.*

432. Si dans la ligne AD (*fig.* 27.) ou bien dans la ligne CB (*fig.* 31.), tandis que l'extrêmité B décrit une circonférence, vous ſuppoſez que les points O, E, & tant d'autres qu'il vous plaira, décrivent auſſi des circonférences ; ces circonférences auront toutes le même centre C, & s'appellent, par cette raiſon, circonférences *concentriques*.

### *Corollaire I.*

433. Toutes les lignes droites, tirées du centre commun des circonférences concentriques, & qui traverſeront ces circonférences, opéreront dans ces circonférences, ou dans les arcs de ces circonférences, les mêmes diviſions, comme de moitié, de tiers, de quart, & de tant de parties ſemblables que l'on voudra. Car le rayon CB dans ſa révolution a déſigné & marqué par ſon point E autant de parties dans la petite circonférence, qu'il en a déſignées par ſon extrêmité B dans la grande circonférence, avec cette différence ſeulement, que ces parties ſont plus petites dans l'une, & plus grandes dans l'autre ; mais elles ſeront pourtant ſemblables.

### *Corollaire II.*

434. Donc toute circonférence, grande ou petite,

peut être partagée en un égal nombre de parties ſemblables ; car toutes les circonférences, grandes ou petites, ayant une courbure uniforme, peuvent toujours être ſuppoſées concentriques.

*Corollaire III.*

435. C'eſt pourquoi les Géométres ont diviſé la circonférence du cercle, quel qu'il ſoit, en 360 parties égales, que l'on appelle *degrés* ; chaque degré en 60 parties égales, que l'on appelle *minutes* ; chaque minute en 60 *ſecondes* ; chaque ſeconde en &c. or l'angle eſt d'autant plus grand, ou plus petit, que l'arc compris entre ſes côtés contient plus, ou moins de ces parties égales, *degrés* ou *minutes*, ou *ſecondes*, &c.

I°. L'angle droit eſt meſuré par le quart de la circonférence, c'eſt-à-dire, que ſa valeur eſt de 90 degrés.

II°. L'angle obtus eſt meſuré par un arc de circonférence plus grand que le quart, c'eſt-à-dire, que ſa valeur paſſe 90 degrés.

III°. L'angle aigu eſt meſuré par un arc moindre que le quart de la circonférence ; c'eſt-à-dire, que ſa valeur eſt au-deſſous de 90 degrés.

*Corollaire IV.*

436. Chacun des ces arcs AB, IO, DE, (*fig.* 31.) compris entre les mêmes rayons, peut être indifféremment pris pour la meſure de l'angle ACB ; car chacun de ces arcs contient un même nombre de degrés ; puiſque les rayons CA, CB ont opéré les mêmes diviſions dans les circonférences concentriques : donc chacun d'eux eſt propre pour meſurer l'*ouverture*, ou l'*écart*, ou l'*inclinaiſon* des lignes CA, CB, qui eſt la même dans toute la longueur de ces lignes.

*Corollaire V.*

437. D'où il ſuit que la *grandeur*, ou *quantité* de l'angle ne dépend ni de la longueur des côtés, ni de

la grandeur de l'arc intercepté entre les côtés; mais seulement du nombre de degrés que contient l'arc, petit ou grand, compris entre ses côtés, & décrit du sommet de l'angle pris pour centre.

*Corollaire VI.*

438. Pour connoître la mesure d'un angle, *par ex:* CAD (*fig.* 23.), il faut concevoir qu'il a son sommet au centre du cercle, & alors l'arc de circonférence CBD, compris entre ses côtés, sera sa mesure.

*Corollaire VII.*

439. Tous les angles droits sont égaux, puisqu'ils sont mesurés chacun par le quart de la circonférence.

## NOMBRE II.

### *De la Qualité des Angles.*

La qualité des angles dépend de la position des lignes, par la rencontre desquelles ils sont formés.

### THÉORÊME I.

440. *Une ligne droite, qui est perpendiculaire sur une autre ligne droite, forme avec elle deux Angles, dont chacun est droit* (fig. 32.).

DÉMONST. La ligne CD, perpendiculaire sur AB, ne penche pas par conséquent plus d'un côté que de l'autre: donc l'angle CDA = CDB: or si du point D, comme centre, on décrit une circonférence; il est évident que les deux angles CDA + CDB sont mesurés par la demi-circonférence: donc chacun d'eux est mesuré par le quart de la circonférence: donc chacun de ces angles est droit, ou est = 90 degrés.

*Corollaire I.*

441. Si vous prolongez la ligne CD jusqu'en E (*fig.* 33.), alors les deux lignes CE, AB, formeront autour du point D quatre angles droits.

*Corollaire II.*

442. Si une ligne perpendiculaire coupe deux paralleles, elle opérera les mêmes effets, & formera les mêmes angles, & de la même maniere, ſur la ſeconde parallele que ſur la premiere: c'eſt pourquoi elle formera autour des deux points d'interſection huit angles droits (*fig.* 39.).

La même choſe arrivera, ſi la perpendiculaire coupe, 3, 4, 5, &c. lignes paralleles, c'eſt-à-dire, qu'elle formera les mêmes angles, & de la même maniere, ſur toutes les autres paralleles, que ſur la premiere, comme on le voit (*fig.* 40.).

THÉORÊME II.

443. *Une ligne droite qui tombe obliquement ſur une autre droite, forme avec elle deux Angles, l'un aigu, & l'autre obtus, dont la ſomme vaut deux angles droits* (fig. 34.).

DÉMONST. Si du point D, comme centre, on décrit une circonférence, il eſt évident que la ſomme des angles CDA + CDB aura pour meſure la demi-conférence: donc cette ſomme vaudra 180 degrés, ou deux angles droits. Mais la ligne CD étant oblique, penche plus du côté de A que de B: donc on aura l'angle CDA < CDB: donc le premier ſera aigu, & le ſecond obtus.

*Corollaire I.*

444. Si vous prolongez la ligne CD pour avoir CE (*fig.* 35.), alors les deux lignes CE & BA formeront autour du point d'interſection D quatre angles, deux aigus & deux obtus, dont la ſomme vaudra quatre angles droits.

*Corollaire II.*

445. Dans le cas où deux lignes s'entrecoupent en un même point C (*fig.* 36.), les angles oppoſés au ſommet C, *par ex.*: les angles DCB, ACE, ſont

égaux : car ſi du ſommet commun C, pris comme centre, on décrit une circonférence, l'arc DB, meſure de l'angle DCB, ſera égal à l'arc AE, meſure de l'angle oppoſé; en effet l'arc EAD = ADB, parce qu'ils ſont chacun la moitié de la circonférence : donc ſi l'on retranche de l'un & l'autre la portion commune AD, les reſtes ſeront égaux; c'eſt-à-dire, l'on aura AE = DB.

*Corollaire III.*

446. Si pluſieurs lignes DC, FC, AC (*fig.* 37.) tombent ſur un même point C d'une ligne BA, la ſomme de tous les angles formés autour du point C vaudra deux angles droits; car ils ſeront tous meſurés par la demi-circonférence du cercle qui ſeroit décrite du point C comme centre.

*Corollaire IV.*

447. Si vous prolongez les lignes DC, FC, HC (*fig.* 38.), pour avoir pluſieurs lignes qui s'entrecoupent toutes au point C, la ſomme de tous les angles formés de part & d'autre autour du point C, vaudra quatre angles droits; car elle ſera meſurée par la circonférence entiere.

## THÉORÊME III.

448. *Une ligne droite qui traverſe obliquement deux Paralleles, formera préciſément les mêmes Angles ſur la ſeconde Parallele que ſur la premiere.*

C'eſt-à-dire, que tous les angles reſpectifs & *correſpondans*, formés ſur les deux paralleles par la ligne oblique & ſécante, ſeront égaux (*fig.* 41.).

DÉMONST. Les angles correſpondans ſont ceux qui ſont formés du même côté de la ſécante, l'un en dedans, l'autre en dehors des paralleles, *par ex* : *f* & *b*, *h* & *d*: or l'on aura *f* = *b*, *h* = *d*, &c. Car ces angles ſont formés par l'inclinaiſon de l'oblique ſur les deux paralleles MO, NL : or l'inclinaiſon de l'oblique eſt la même ſur les deux paralleles, parce

qu'une ligne qui tombe obliquement ſur l'une des paralleles, tombe dans le même degré d'obliquité ſur l'autre parallele : donc elle y opere les mêmes effets, & y forme les mêmes angles.

*Corollaire I.*

449. Donc les angles *alternes internes* ſont égaux entr'eux. Car les angles alternes internes ſont ceux qui ſont formés de différens côtés de la ſécante entre les deux paralleles, l'un en bas, l'autre en haut ; *par ex : f* & *c*, *e* & *d*, &c : or on aura, *par ex : f* = *c* ; car *f* = *b*, puiſqu'ils ſont correſpondans, & *b* = *c*, parce qu'ils ſont oppoſés au ſommet : donc *f* = *c*.

*Corollaire II.*

450. Les Angles *alternes externes* ſont auſſi égaux entr'eux. Car les angles alternes externes ſont ceux qui ſont hors des paralleles & de différent côté de la ſécante, l'un en haut, l'autre en bas ; *par ex : h* & *a* : or l'on a *h* = *a* ; car *h* = *d*, parce qu'ils ſont correſpondans, & *d* = *a*, parce qu'ils ſont oppoſés au ſommet ; donc *h* = *a*.

*Corollaire III.*

451. Dans ce même cas les angles *adjacens* valent deux angles droits. Car les angles adjacens ſont ceux qui ſont du même côté de la ſécante en dedans des paralleles ; *par ex : f* & *d* ; or on a la ſomme *f* + *d* = 180 degrés, ou deux angles droits ; car *f* + *h* = 180 degrés (443.), & *h* = *d*, parce qu'ils ſont correſpondans : donc *f* + *d* = 180 degrés.

Tout ce que nous venons de dire dans le théorême & les corollaires précédens, aura auſſi lieu, ſi la ſécante traverſe trois, quatre, cinq, &c. paralleles ; c'eſt-à-dire, qu'elle formera les mêmes angles & de la même maniere ſur les autres paralleles que ſur la premiere, comme on peut le voir (*fig.* 42.).

## THÉORÊME IV.

452. *Réciproquement ſi les Angles correſpondans, formés par une Sécante qui traverſe deux lignes, ſont égaux, ces deux lignes ſont paralleles entr'elles* (fig. 41.).

DÉMONST. Par l'hypothèſe les angles correſpondans *f* & *b* ſont égaux : donc ils ſont formés par des lignes également inclinées ſur la ſécante AB : donc les lignes MO, NL, ſont également inclinées ſur la ſécante AB, & par conſéquent (400.) elles ſont paralleles entr'elles.

### *Corollaire.*

453. De ce théorême on déduit toutes les propoſitions inverſes des corollaires tirés du troiſiéme théorême ; ſçavoir,

I°. Si les angles alternes internes ſont égaux, les lignes traverſées par la ſécante ſeront paralleles ; car par l'hypothèſe $f = c$ : or $c = b$ (445) : donc $b = f$ ; donc les angles correſpondans $b$, $f$, ſont égaux, & par conſéquent les lignes MO, NL qui forment ces angles avec la ſécante AB, ſont paralleles entr'elles.

II°. Si les angles alternes externes ſont égaux ; les lignes traverſées par la ſécante ſeront paralleles ; ce qui ſe prouve de la même maniere.

III°. Si les angles adjacens valent deux angles droits, les lignes traverſées par la ſécante ſeront encore paralleles ; car par l'hypothèſe $f + d = 180$ degrés, ou deux angles droits : or (443) $d + b = 180$ degrés : donc $f = b$ : donc les angles correſpondans $f$ & $b$ ſont égaux, & par conſéquent les lignes MO, NL, traverſées par la ſécante, ſont paralleles.

## NOMBRE III.

### *De l'Evaluation des Angles.*

Evaluer un angle, c'eſt déterminer l'arc de circonférence qui lui ſert de meſure ; c'eſt pourquoi

pour évaluer un angle, il faut le conſidérer par rapport au cercle: or l'angle conſidéré par rapport au cercle peut avoir différentes poſitions & prendre différens noms.

## *DÉFINITIONS.*

### I.

454. Un angle dont le ſommet eſt au centre, ou qui eſt formé par deux rayons, s'appelle *Angle central*; tel eſt l'angle CAD (*fig.* 43.).

### II.

455. Un angle dont le ſommet eſt à la circonférence, & qui eſt formé par deux cordes, s'appelle *Angle inſcrit*; tel eſt l'angle CBD (*fig.* 43.). S'il eſt formé par une corde & une tangente, ou par une corde & une ſécante extérieure, il s'appelle angle du *Segment*, *par ex:* CAB (*fig.* 50.), & CBA (*fig.* 51.): s'il eſt formé par la circonférence & une tangente, il s'appelle angle de *Contingence*; tel eſt l'angle CEAB (*fig.* 50.).

### III.

456. Un angle dont le ſommet eſt hors de la circonférence, s'appelle *Angle circonſcrit*: tels ſont les angles BAC (*fig.* 52.), DAE (*fig.* 53.), EAC, (*fig.* 54.).

### IV.

457. Un angle dont le ſommet eſt en dedans de la circonférence, mais ailleurs qu'au centre, s'appelle angle *excentrique*; tel eſt l'angle DAE (*fig.* 55.).

### *Remarque.*

458. L'angle *central* eſt toujours meſuré par l'arc de circonférence qu'il comprend entre ſes côtés; c'eſt pourquoi il n'y a nulle difficulté à l'évaluer. Mais lorſque l'angle a ſon ſommet ailleurs qu'au centre du cercle, alors il n'eſt pas meſuré par l'arc qu'il

comprend entre ſes côtés ; mais ſeulement par une portion de cet arc, & c'eſt cette portion qu'il faut déterminer, pour évaluer l'angle.

### THÉORÊME I.

459. *L'angle de contingence eſt un angle infiniment petit.*

DÉMONST. La circonférence du cercle ne s'éloigne qu'infiniment peu de ſa tangente au point de contingence : donc à ce point de contingence elle ne forme avec la tangente qu'un angle infiniment petit.

### THÉORÊME II.

460. *L'Angle formé par le rayon, ou par le diamétre, avec la tangente, eſt un angle droit* (fig. 24, 25 & 26.).

DEMONST. Car la tangente eſt perpendiculaire (416.) à l'extrêmité du rayon.

*Corollaire.*

461. Donc l'angle formé par le rayon, ou par le diamétre, avec la circonférence du cercle, eſt un angle droit ; car il eſt égal à l'angle formé par le diamétre & la tangente, puiſque l'un & l'autre ne different entr'eux que de la quantité de l'angle de contingence, qui eſt une quantité infiniment petite.

On conclut de-là que tous les rayons & tous les diamétres ſont perpendiculaires à la circonférence du cercle.

### THÉORÊME III.

462. *L'Angle inſcrit a pour meſure la moitié de l'arc compris entre ſes côtés.*

DÉMONST. Il y a trois cas : ou bien l'un des côtés de l'angle paſſe par le centre (*fig.* 44.) ; ou bien les deux côtés interceptent le centre (*fig.* 45) ; ou bien le centre eſt hors des deux côtés (*fig.* 46.).

I°. Si l'un des côtés paſſe par le centre, ſoit mené le diamétre FE, parallele au côté DA, & l'on aura

l'angle inſcrit DAB=FCB angle central, & qui lui eſt correſpondant; donc ils ont même meſure: or la meſure de l'angle central FCB eſt l'arc FB; mais l'arc FB=AE=DF (421.): donc l'arc FB=DF: donc l'arc FB, meſure de l'angle inſcrit, eſt la moitié de l'arc DFB, intercepté entre les côtés de l'angle inſcrit: donc, &c.

II°. Si les deux côtés interceptent le centre, ſoit mené du ſommet de l'angle le diamétre AF: or l'angle BAF aura pour meſure la moitié de l'arc BF, comme nous venons de le prouver. Par la même raiſon l'angle DFA a pour meſure la moitié de l'arc FD: donc la ſomme des angles BAF + FAD, ou l'angle total BAD aura pour meſure la moitié de la ſomme des arcs BF + FD = BD.

III°. Si le centre eſt hors des deux côtés, ſoit mené du ſommet de l'angle le diamétre AF, & l'angle FAD aura pour meſure la moitié des arcs FB+BD, comme il vient d'être prouvé: or l'angle FAB a pour meſure la moitié de l'arc FB: donc retranchant de la meſure de l'angle total celle de l'angle FAB, il reſtera pour meſure de l'angle BAD la moitié de l'arc BD.

*Corollaire I.*

463. L'angle *inſcrit* eſt ſous-double de l'angle *central*, appuyé ſur le même arc CD (*fig.* 43.): car l'angle central a pour meſure l'arc entier ſur lequel il eſt appuyé; au lieu que l'angle inſcrit n'a pour meſure que la moitié de ce même arc.

*Corollaire II.*

464. Donc l'angle A appuyé ſur le diamétre EB (*fig.* 47.), eſt un angle droit, puiſqu'il a pour meſure la moitié de la demi-circonférence ſur laquelle il eſt appuyé.

*Corollaire III.*

465. Donc auſſi les angles inſcrits A, B, C (*fig.*

49.), appuyés ſur le même diamétre, ſont tous égaux, puiſqu'ils ſont tous droits. En général tous les angles inſcrits, appuyés ſur un même arc, ſont égaux.

*Corollaire IV.*

466. Donc un angle inſcrit CAD (*fig.* 48.), appuyé ſur un arc plus grand que la demi-circonférence, eſt obtus ; & un angle CAE, appuyé ſur arc plus petit que la demi-circonférence, eſt aigu.

## THÉORÊME IV.

467. *L'Angle du Segment, formé par une corde & une tangente, a pour meſure la moitié de l'arc ſoutenu par la corde* (fig. 50.).

DÉMONST. Ayant mené la ligne CD, parallele à la tangente AB, on aura (449) l'angle du ſegment BAC=ACD, angle inſcrit: or la meſure de l'angle inſcrit ACD eſt (462.) la moitié de l'arc AD: mais l'arc AD=AC (419.) donc la meſure de l'angle du ſegment eſt la moitié de l'arc AD, ou de l'arc AC ſoutenu par la corde.

En ſuivant les principes ci-deſſus, il ſera aiſé de faire voir que l'angle du ſegment, formé par une corde & une ſécante extérieure, eſt meſuré par la demi-ſomme des arcs ſoutenus par la corde & par le prolongement de la ſécante en dedans du cercle (*fig.* 51.).

## THÉORÊME V.

368. *L'Angle circonſcrit a pour meſure la moitié de la différence des arcs concave & convexe, interceptés entre ſes côtés.*

DÉMONST. Il y a trois cas: ou bien l'angle circonſcrit eſt formé par deux tangentes (*fig.* 52.); ou par deux ſécantes (*fig.* 53.); ou par une tangente & une ſécante (*fig.* 54.).

I°. Dans le premier cas ſoit mené du point de contingence

contingence D la ligne DE, parallele à la tangente AB, & l'on aura (448) l'angle circonſcrit BAC = EDC angle du ſegment : donc ils auront même meſure ; or la meſure de l'angle du ſegment EDC eſt la moitié de l'arc ED ; mais l'arc ED eſt la différence, ou l'excès de l'arc concave FED ſur l'arc convexe FD ; car on a FED—FE=ED : or (419.) FE=FD : donc FED—FD=ED : donc, &c.

II°. Dans le ſecond cas ſoit menée du point B la ligne BC, parallele au côté AD, & l'on aura l'angle circonſcrit DAE=CBE angle inſcrit, & qui lui eſt correſpondant : donc ils auront même meſure. Or l'angle inſcrit CBE a pour meſure la moitié de l'arc CE, lequel eſt la différence des arcs concave & convexe ; car puiſque DC=OB (421.), il s'enſuit que DCE—OB=CE.

III°. Dans le troiſiéme cas, ſoit menée du point B la ligne BD, parallele à la tangente AE, & l'on prouvera de la même maniere que la meſure de l'angle EAC eſt la moitié de l'arc DC=EDC—EB, différence entre les arcs concave & convexe.

### THÉORÊME VI.

469. *La Meſure de l'Angle excentrique eſt la moitié de la ſomme des arcs interceptés de part & d'autre, en deſſus & en deſſous entre ſes côtés prolongés* (figures 55 & 56.).

DÉMONST. Ayant mené du point B la ligne BF, parallele au côté AE, on aura l'angle excentrique DAE=DBF angle inſcrit & qui lui eſt correſpondant : donc ils auront même meſure ; ſçavoir, la moitié de l'arc DEF : or puiſque (419.) EF=BG, il s'enſuit que l'arc DEF = DE + BG ſomme des arcs interceptés entre les côtés prolongés en deſſus & en deſſous.

## ARTICLE II.

### *De l'Aſſortiment des Lignes ou des Figures.*

On aſſortit les lignes en les joignant par leurs ex-

trêmités, pour renfermer un eſpace. Des lignes, qui par leur rencontre renferment un eſpace, forment une figure. Les figures elles-mêmes peuvent s'aſſortir ou s'aſſembler, en les joignant par leurs angles. Nous parlerons 1°. de la conſtitution des figures; 2°. de l'aſſortiment ou aſſemblage des figures.

## PARAGRAPHE I.

### *De la Conſtitution des Figures.*

I°. Deux lignes qui ſe rencontrent, forment un angle: pour former une figure, il faut au moins trois lignes, qui par leur rencontre renferment un eſpace.

II°. Ces lignes qui ſe rencontrent, s'appellent les côtés de la figure: ces côtés par leur inclinaiſon forment des *Angles*; des angles & des côtés pris enſemble réſultent les *Figures*.

III°. Les figures prennent différens noms ſuivant le nombre de leurs côtés.

Une figure de trois côtés s'appelle *Triangle*,
de quatre côtés, *Quadrilatere*,
de cinq côtés, *Pentagone*,
de ſix côtés, *Exagone*,
de ſept côtés, *Eptagone*,
de huit côtés, &c. *Octogone*, *&c.*

En général toute figure qui a plus de trois côtés, s'appelle *Polygone*; ſi elle a un nombre infini de côtés, elle s'appelle *Polygone infinitaire*, ou *Cercle*.

IV°. Comme toutes les lignes ſe rapportent à deux, ſçavoir, à la ligne *droite*, & à la ligne *circulaire*; de même toutes les figures peuvent ſe rapporter à deux, ſçavoir, au *triangle*, & au *cercle*: au *triangle*, en diminuant le nombre des côtés de la figure; au *cercle*, en augmentant le nombre des côtés. Le triangle & le cercle ſont donc les deux extrêmes de toutes les figures poſſibles, qui par cette raiſon participent, & des propriétés du triangle, &

de celles du cercle. C'eſt pourquoi nous allons parler des figures, 1°. conſidérées par rapport au triangle: 2°. conſidérées par rapport au cercle.

## NOMBRE I.

### *Des Figures conſidérées par rapport au Triangle.*

### *DÉFINITIONS.*

I.

470. Le triangle prend différens noms, ſuivant la qualité de ſes côtés, & s'appelle,

| | |
|---|---|
| s'il a les trois *côtés* égaux, | *Equilatéral*, |
| s'il a deux *côtés* égaux, | *Iſocele*, |
| s'il a les trois *côtés* inégaux, | *Scalene.* |

Voyez les figures 57, 58, 59.

II.

471. Le triangle prend encore différens noms, ſuivant la qualité de ſes angles, & s'appelle,

| | |
|---|---|
| s'il a un angle droit, | *Rectangle*, |
| s'il a tous ſes angles aigus, | *Acutangle*, |
| s'il a un angle obtus, | *Obtuſangle*, |

III.

472. Le quadrilatere prend auſſi différens noms ſuivant la qualité de ſes angles & de ſes côtés, & s'appelle,

*Parallélogramme*, lorſqu'il a ſes côtés oppoſés paralleles (*fig.* 60.).

*Trapeze*, s'il n'a que deux côtés paralleles (*fig.* 61.).

*Trapezoïde*, s'il n'a aucun de ſes côtés paralleles.

*Parallélogramme rectangle*, ou ſimplement *Rectangle*, s'il a tous ſes angles droits (*fig.* 62.)

*Quarré*, s'il a tous ſes angles & tous ſes côtés égaux (*fig.* 63.)

*Lozange*, ou *Rhombe* s'il a tous ſes côtés égaux, & ſeulement les angles oppoſés égaux (*fig.* 64.)

IV.

473. Dans une figure l'angle formé par l'inclinaiſon de deux côtés adjacens, s'appelle *Angle au périmetre.* L'angle formé par un côté & le prolongement du côté adjacent, s'appelle *Angle extérieur.* L'angle formé par deux lignes tirées du centre de la figure à deux angles adjacens du périmétre, s'appelle *Angle au centre;* & on appelle *Centre*, le point qui tient le juſte milieu dans la ſurface de la figure.

V.

474. Une ligne AC, ou AD (*fig. 66.*) tirée du ſommet d'un angle du périmétre, à l'un des angles oppoſés, s'appelle *Diagonale.*

THÉORÊME I.

475. *Les trois angles d'un triangle pris enſemble, valent deux Angles droits, ou* 180 *degrés* (fig. 65.)

DÉMONST. Si l'on fait paſſer une circonférence de cercle par les ſommets des trois angles du triangle CAB, ce qui eſt toujours poſſible (355.); l'angle en A étant inſcrit, a pour meſure (462.) la moitié de l'arc CB; l'angle en B par la même raiſon a pour meſure la moitié de l'arc CA; & l'angle en C a pour meſure la moitié de l'arc AB: donc la ſomme des trois angles a pour meſure la moitié de la circonférence entiere, ou 180 degrés; donc, &c.

*Corollaire I.*

476. Donc connoiſſant deux angles dans un triangle, il ſera facile de connoître le troiſiéme; parce qu'il ſera toujours le ſupplément des deux autres.

*Corollaire II.*

477. Donc un triangle ne peut pas avoir deux angles droits, encore moins deux angles obtus; car alors la ſomme des trois angles vaudroit plus de deux angles droits.

*Corollaire III.*

478. Lorſque deux angles d'un triangle ſont égaux

à deux angles d'un autre triangle, le troiſiéme angle eſt auſſi égal de part & d'autre.

*Corollaire IV.*

479. Les quatre angles à la circonférence du quadrilatere valent quatre angles droits; les cinq angles à la circonférence du pentagone valent ſix angles droits; les ſix angles à la circonférence de l'exagone valent huit angles droits, & ainſi du reſte (*fig.* 64, 66, 67.)

En général la ſomme des angles à la circonférence d'un polygone quelconque vaut autant de fois deux angles droits, ou 180 degrés, qu'il y a de côtés dans le polygone, moins deux. Car ſi d'un angle du polygone on mene des diagonales à tous les autres angles, ces diagonales formeront dans le polygone autant de triangles qu'il y a de côtés dans le polygone, moins deux côtés; & la ſomme des angles à la circonférence ne ſera pas diſtinguée de la ſomme des angles de ces triangles. Or la ſomme des angles dans chaque triangle vaut (475.) deux angles droits: donc la ſomme des angles de tous ces triangles, & par conſéquent la ſomme des angles à la circonférence du polygone, vaut autant de fois deux angles droits, qu'il y a de côtés dans le polygone, moins deux.

*Corollaire V.*

480. On peut dire auſſi que la ſomme des angles à la circonférence du polygone vaut autant de fois deux angles droits, moins quatre, qu'il y a de côtés dans le polygone.

C'eſt pourquoi ſi l'on nomme $s$ la ſomme des angles à la circonférence du polygone, $r$ l'angle droit, $n$ le nombre des côtés du polygone; la ſomme des angles à la circonférence ſera repréſentée par cette formule générale, $s=2rn-4r$.

THÉORÊME II.

481. *Dans un triangle l'Angle extérieur* ACD, *ou*

d, *eſt égal aux deux Angles intérieurs oppoſés* o & m (fig. 68.)

Demonst. Les deux angles intérieurs avec l'angle $n$ valent deux angles droits, c'eſt-à-dire, $n+o+m=180$ degrés (475.) : pareillement (443.) $n+d=180$ degrés : donc $n+d=n+o+m$ ; donc, retranchant de part & d'autre la quantité commune $n$, on aura $d=o+m$.

*Corollaire I.*

482. Dans un triangle tous les angles extérieurs pris enſemble valent quatre angles droits. Car chaque angle extérieur du triangle avec l'angle adjacent vaut (443.) deux angles droits : donc les trois angles extérieurs avec les intérieurs valent tous enſemble ſix angles droits ; donc ſi on en retranche deux angles droits, qui ſont la valeur des angles intérieurs, il reſtera quatre angles droits pour la valeur des angles extérieurs.

*Corollaire II.*

483. Tous les angles extérieurs à la circonférence du polygone, pris enſemble, valent quatre angles droits (*fig.* 69, 70, 71) ; car la ſomme des angles, tant intérieurs qu'extérieurs du polygone, vaut autant de fois deux angles droits, qu'il y a de côtés dans le polygone, c'eſt-à-dire qu'elle eſt

$$s=2rn ;$$

d'où, ſi l'on retranche $2rn-4r$, qui eſt la valeur des angles intérieurs, on aura

$$s=2rn-2rn+4r=4r,$$

pour la valeur des angles extérieurs.

*Corollaire III.*

484. Donc ſi l'on diviſe le poligone en triangles, non par des diagonales, comme ci-deſſus ; mais par des rayons tirés du centre à chaque angle de la circonférence, la ſomme des angles extérieurs ſera égale à la ſomme des angles formés autour du

centre (*fig.* 71.): car chacune de ces ſommes eſt égale à quatre angles droits.

### THÉORÊME III.

485. *Dans un Triangle le plus grand Angle eſt oppoſé au plus grand côté ; le plus petit Angle, au plus petit côté* ( fig. 47. ).

DÉMONST. Si l'on inſcrit le triangle à un cercle, il eſt évident que le plus grand angle A ſera appuyé ſur un plus grand arc, lequel ſera ſoutenu par une plus grande corde EB, laquelle eſt le côté oppoſé à l'angle A: on prouve de même que le plus petit angle eſt oppoſé au plus petit côté.

*Corollaire I.*

486. Donc dans un triangle les angles oppoſés à des côtés égaux, ſont égaux, & réciproquement: car le triangle étant inſcrit à un cercle, les angles égaux ſont appuyés ſur des arcs égaux, leſquels ſeront ſoutenus par des cordes égales, leſquelles ſeront les côtés oppoſés aux angles égaux.

*Corollaire II.*

487. Donc dans le triangle *équilatéral* les trois angles ſont égaux: dans le triangle *iſocele* les deux angles ſur la baſe ſont égaux: dans le triangle *ſcalene* les trois angles ſont inégaux.

### THÉORÊME IV.

488. *Dans un triangle iſocele*, par ex: CAB (fig. 75.) *une perpendiculaire, menée du ſommet ſur la baſe, diviſe en deux également ; 1°. la baſe ; 2°. l'angle compris entre les deux côtés égaux.*

DÉMONST. Si du ſommet A, où ſe réuniſſent les deux côtés égaux, & de l'intervalle AC, ou AD, on décrit une circonférence de cercle, il eſt évident que la baſe DC du triangle iſocele ſera une corde du cercle, & que la perpendiculaire AN, menée du ſommet du triangle ſur cette baſe, ſera une perpendiculaire menée du centre du cercle ſur une corde: donc

(412.) elle diviſera en deux également ; 1°. la corde DC, laquelle eſt baſe du triangle iſocele ; 2°. l'arc CND, qui eſt la meſure de l'angle DAC, & par conſéquent l'angle DAC ſera lui-même diviſé en deux également.

Ce que nous venons de démontrer du triangle iſocele, convient à plus forte raiſon au triangle équilatéral.

## THÉORÊME V.

489. *Si dans un triangle quelconque on tire une Ligne parallele à la baſe du triangle, les Angles reſpectifs, ou correſpondans, formés ſur les deux baſes paralleles, ſeront égaux* (fig. 72.).

DÉMONST. L'angle en D eſt égal à l'angle en B, parce qu'ils ſont correſpondans (448.) : par la même raiſon l'angle en E eſt égal à l'angle en C : donc, &c.

### *Remarque.*

490. La propoſition inverſe eſt auſſi vraie ; c'eſt-à-dire, que, ſi les angles formés ſur les deux baſes ſont égaux, ces baſes ſont paralleles : car les angles en D & B ſont correſpondans, parce qu'ils ſont formés du même côté de la ſécante AB : or ils ſont égaux par l'hypothèſe : donc les lignes DE, BC ſont également inclinées ſur la ſécante ; donc elles ſont paralleles.

### *Corollaire.*

491. Ayant mené dans un triangle une ligne parallele à la baſe, on aura deux triangles, l'un plus grand, & l'autre plus petit, tels que tous les angles de l'un ſeront égaux aux angles correſpondans de l'autre (*fig.* 62.) comme il eſt évident. Ces triangles ADE, ABC s'appellent triangles *équiangles.*

### *HYPOTHESE.*

492. Si dans le petit triangle DAE, on ſuppoſe que les côtés AD, AE, viennent à s'allonger, &

que la baſe DE deſcende parallelement à elle-même, juſqu'à ce qu'elle ſe confonde avec la baſe BC, alors les deux triangles non-ſeulement ſont *équiangles*, mais ſont auſſi *égaux*; puiſqu'alors les deux triangles ne ſont point diſtingués l'un de l'autre, mais qu'ils conviennent parfaitement l'un avec l'autre.

*Remarque I.*

493. Le cas où deux triangles poſés l'un ſur l'autre, conviennent parfaitement, s'appelle *Superpoſition*: or toutes les fois que la ſuperpoſition eſt poſſible, on conclut l'égalité des deux triangles.

*Remarque II.*

494. De ſix choſes qui ſont dans le triangle, ſçavoir, trois angles & trois côtés, il ſuffit d'en conſidérer cinq, ſçavoir, trois côtés & deux angles; parce que deux angles étant donnés dans un triangle (476.) le troiſiéme eſt auſſi donné.

## THÉORÊME VI.

495. *Deux triangles* ACB, *acb* (fig. 73.) *qui ont tous leurs côtés homologues égaux, ſont égaux entr'eux.*

DÉMONST. Des points A & B, comme centres, décrivez les arcs DCE, FCG, qui ſe coupent au ſommet C; ſi vous poſez le côté *ab* ſur le côté AB, le point *a* tombera ſur le point A, & le point *b* ſur B, à cauſe de *ab*=AB: or à cauſe de *ac*=AC le côté *ac* aboutira quelque part dans l'arc DCE; & pareillement à cauſe de *bc*=BC, la ligne *bc* aboutira quelque part dans l'arc FCG: mais les côtés *ac*, *bc* ſe réuniſſent à un même point: donc ils aboutiront tous deux au même point C, interſection des deux arcs: donc les côtés *ac*, *bc* du triangle *abc* conviendront parfaitement avec les côtés AC, BC de l'autre triangle, & par conſéquent tout le triangle *abc* conviendra parfaitement avec tout le triangle ABC: donc on aura *abc*=ABC.

## THÉORÊME VII.

496. *Deux triangles qui ont deux angles égaux de part & d'autre, & le côté compris entre ces angles égaux, égal de part & d'autre, ſont égaux entr'eux* (fig. 73.)

DÉMONST. Soit l'angle A=*a*, l'angle B=*b*, & le côté AB=*ab* : il eſt évident, ſi vous poſez le côté *ab* ſur AB, qu'à cauſe de l'égalité des angles en A & *a*, en B & *b*, le côté *ac* tombera ſur AC, & *bc* ſur BC; donc ils ſe réuniront au même point C : donc tout le triangle *abc* conviendra parfaitement avec tout le triangle ABC : donc on aura *abc*=ABC.

## THÉORÊME VIII.

497. *Deux triangles qui ont deux côtés égaux, & l'angle compris entre ces côtés, égal de part & d'autre, ſont égaux entr'eux* (fig. 73.).

DEMONST. Soit le côté AC=*ac*, le côté BC=*bc*, & l'angle C=*c* : ſi vous poſez le côté AC ſur *ac*, & BC ſur *bc*, ces côtés tomberont exactement les uns ſur les autres à cauſe de l'angle C=*c*; & parce qu'ils ſont ſuppoſés égaux, le point *a* tombera ſur le point A, & *b* ſur B : donc le côté *ab*, qui meſure la diſtance des points *a* & *b*, ſera égal & tombera exactement ſur AB : donc le triangle *abc* conviendra parfaitement avec le triangle ABC : donc on aura *abc*= ABC.

## THÉORÊME IX.

498. *Deux triangles qui ont deux côtés égaux, & un angle oppoſé à l'un de ces côtés, égal de part & d'autre, ſont égaux, pourvu que le ſecond angle oppoſé à l'autre côté ſoit de même eſpéce de part & d'autre* (fig. 74.)

DÉMONST. Soit le côté *ab*=AB, le côté *ac*=AC, & l'angle *b*=B : ſi les angles *c*, C, oppoſés aux autres côtés égaux *ab*, AB, ſont de même eſpéce, ou tous deux aigus, ou tous deux obtus, je dis que les deux triangles ſeront égaux. Poſez le point *b* ſur

le point B, & le côté *ab* ſur AB; les deux côtés *ab*, AB conviendront parfaitement, puiſqu'ils ſont égaux; & la baſe *bc* tombera ſur la baſe BC, à cauſe de l'angle *b*=B; mais de plus le point *c* tombera ſur le point C: car ayant mené la perpendiculaire AD, la ligne AC tombera du même côté de la perpendiculaire que la ligne *ac*, à cauſe des angles en *c* & C de même eſpéce. En effet ſi la ligne AC tomboit de l'autre côté de la perpendiculaire, & devenoit AE, alors l'angle en E ſeroit obtus, & par conſéquent ne ſeroit plus de même eſpéce que l'angle en *c*: donc les lignes *ac*, AC tomberont du même côté de la perpendiculaire AD: mais ces deux lignes ſont des obliques égales, menées d'un même point A: donc (382) elles ont un même éloignement de perpendicule, & par conſéquent le point *c* tombera ſur le point C.

*Corollaire I.*

499. Donc des cinq choſes que l'on peut conſidérer dans un triangle, ſçavoir, trois côtés & deux angles, ſi trois d'une part ſont égales aux trois correſpondantes de l'autre part, la *ſuperpoſition* des triangles ſera poſſible, & l'on pourra conclure que les deux triangles ſeront parfaitement égaux.

*Corollaire II.*

500. Deux figures quelconques, qui peuvent être partagées en un même nombre de triangles égaux, ſont dès-lors égales.

## NOMBRE II.

### *Des Figures conſidérées par rapport au Cercle.*

Les figures conſidérées par rapport au cercle, ſont les figures conſidérées en tant qu'elles ont un *centre* & un *périmétre*, ou *circonférence* autour de ce centre, & des propriétés relatives à ce centre & à cette circonférence.

## *DÉFINITIONS.*

I.

501. Une figure eſt dite *inſcrite* dans un cercle, lorſque tous ſes angles ont leur ſommet à la circonférence du cercle. Elle eſt dite *circonſcrite*, lorſque tous ſes côtés touchent la circonférence du cercle.

II.

502. Une figure eſt dite être *réguliere*, lorſque tous ſes côtés ſont égaux, & que tous ſes angles ſont égaux.

*Corollaire I.*

503. Puiſque dans une figure réguliere tous les angles ſont égaux, il s'enſuit qu'on trouvera la valeur de l'angle à la circonférence, en diviſant la ſomme des angles par le nombre des angles. C'eſt pourquoi appellant $x$ l'angle à la circonférence, & la ſomme des angles à la circonférence étant (480.) $2rn-4r$, on aura $x=\frac{2rn-4r}{n}$: donc

I°. Dans le triangle équilatéral on aura

$$x=\frac{2rn-4r}{n}=\frac{540-360}{3}=\frac{180}{3}=60 \text{ degrés.}$$

II°. Pour le quarré on aura

$$x=\frac{2rn-4r}{n}=\frac{720-360}{4}=\frac{360}{4}=90.$$

III°. Pour le pentagone on aura

$$x=\frac{2rn-4r}{n}=\frac{900-360}{5}=\frac{540}{5}=108.$$

IV°. Pour l'exagone on aura

$$x=\frac{2rn-4r}{n}=\frac{1080-360}{6}=\frac{720}{6}=120.$$

& ainſi de tous les autres polygones réguliers.

*Corollaire II.*

504. Deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés; *par ex*: deux exagones réguliers ſont toujours *équiangles*. Car la ſomme des angles eſt la même dans l'un & l'autre exagone; ſavoir, de huit

angles droits : or dans chaque exagone les ſix angles ſont égaux entr'eux, puiſque l'un & l'autre exagone eſt régulier : donc chacun des angles eſt la ſixiéme partie de huit angles droits dans l'un & l'autre exagone : donc les angles de l'un ſont égaux aux angles de l'autre, c'eſt-à-dire, que les deux polygones ſont équiangles.

### THÉORÊME I.

505. *Si dans un Polygone régulier on tire du ſommet des angles, des Lignes* DA, FA, HA (fig. 71), *qui partagent chacun de ſes angles en deux également, ces Lignes priſes du ſommet juſqu'au point de rencontre, ſeront toutes égales entr'elles.*

DÉMONST. I°. On aura la ligne DA = FA ; car l'angle total en D eſt égal à l'angle total en F ; puiſque le polygone eſt ſuppoſé régulier : donc l'angle *n*, qui eſt la moitié du premier, eſt égal à l'angle *o*, qui eſt la moitié du ſecond : donc dans le triangle DAF les deux côtés DA & FA ſont (486.) égaux.

II°. Dans le triangle AFH on a par la même raiſon que ci-deſſus l'angle *m* = *r* : donc (486.) on aura le côté FA = HA.

III°. On prouvera la même choſe & de la même maniere pour toutes les autres lignes IA, KA, &c.

### *Corollaire I.*

506. Le point A eſt appellé le *centre* du polygone ; & les lignes tirées de ce centre aux ſommets des angles du polygone s'appellent *rayons obliques*, leſquels ſont tous égaux entr'eux, comme on vient de le prouver.

### *Corollaire II.*

507. Si du centre du polygone on tire des perpendiculaires ; *par ex :* AM, AN, (*fig.* 75.) ſur les côtés, ces perpendiculaires s'appellent *rayons droits* : or tous les rayons droits ſont auſſi égaux entr'eux ; car prenant deux rayons droits menés ſur deux côtés

tés adjacens, ils formeront avec le rayon oblique deux triangles rectangles MAC, CAN, qui ſont évidemment égaux entr'eux.

*Corollaire III.*

508. Dans un polygone régulier le rayon oblique, *par ex:* AF (*fig.* 71.), partage l'angle à la circonférence; ſavoir, l'angle HFD en deux parties égales: cela eſt évident par la conſtruction (505.)

*Corollaire IV.*

509. Donc l'angle du centre eſt ſupplément de l'angle à la circonférence du polygone; car dans le triangle DAF, l'angle A au centre eſt ſupplément (475.) des deux angles $o+n$: or dans le polygone régulier $o+n$=FDC angle à la circonférence, puiſque chaque angle à la circonférence eſt partagé en deux parties égales par le rayon: donc, &c.

*Corollaire V.*

510. Donc l'angle au centre eſt égal à l'angle extérieur du polygone régulier; car l'un & l'autre ſont ſupplémens d'un même angle; ſavoir, de l'angle à la circonférence du polygone.

*Corolloire VI.*

511. Dans le polygone régulier le rayon droit diviſe l'angle au centre, ſavoir l'angle CAB (*fig.* 75.) & le côté du polygone oppoſé à cet angle, en deux également; car le triangle DAC eſt iſocele: donc (488.) la perpendiculaire ou le rayon droit AN diviſe en deux également, & l'angle DAC, & le côté DC.

THÉORÊME II.

512. *Tout polygone régulier donné, peut être inſcrit à un cercle* (fig. 75 & 77.)

DÉMONST. Car, puiſque tous les rayons obliques ſont égaux, ſi du centre du polygone, & de l'intervalle d'un rayon oblique on décrit une circonférence, elle paſſera par tous les ſommets des angles, & le polygone ſera inſcrit au cercle.

*Corollaire.*

513. De tous les polygones réguliers inſcrits à un même cercle, celui qui aura le plus de côtés, aura un plus grand périmétre : car plus le polygone aura de côtés, plus ſon périmétre approchera de la circonférence du cercle, qui eſt plus grande qu'aucun des polygones inſcrits.

## THÉORÊME III.

514. *Tout polygone régulier donné, peut être circonſcrit à un cercle* (fig. 76 & 77.)

DÉMONST. Car, puiſque tous les rayons droits ſont égaux ; ſi du centre du polygone, & de l'intervalle d'un rayon droit, on décrit une circonférence, tous les côtés du polygone toucheront la circonférence, & le polygone ſera circonſcrit.

*Corollaire.*

515. De tous les polygones réguliers circonſcrits à un même cercle, celui qui aura le plus de côtés, aura un plus petit périmétre : car plus le polygone aura de côtés, plus ſon périmétre approchera de la circonférence du cercle, qui eſt plus petite qu'aucun des polygones circonſcrits.

## THÉORÊME IV.

516. *Dans l'Exagone régulier inſcrit, le côté eſt égal au Rayon oblique, ou au Rayon du cercle* (fig. 75.)

DÉMONST. Dans le triangle BAC, l'angle A au centre eſt de 60 degrés, parce qu'il eſt ſupplément de l'angle à la circonférence (509.) lequel dans l'exagone régulier eſt de 120 degrés ; les deux angles ſur la baſe BC ſont égaux, puiſqu'ils ſont chacun la moitié de l'angle à la circonférence, & ſont par conſéquent chacun de 60 degrés : donc dans le triangle BAC tous les angles ſont égaux : donc le triangle BAC eſt équilatéral (487.) : donc le côté BC = AB rayon oblique du polygone.

*Corollaire I.*

517. Mais dans les polygones pris au-deſſous de l'exagone le côté eſt plus grand que le rayon ; & l'excès du côté ſur le rayon ſera d'autant plus grand, que le polygone aura moins de côtés : car ſi l'on inſcrit à un même cercle tous les polygones réguliers qui ſont au-deſſous de l'exagone, moins le polygone aura de côtés, plus ſon côté ſurpaſſera celui de l'exagone, lequel eſt égal au rayon du cercle.

*Corollaire II.*

518. Dans les polygones pris au-deſſus de l'exagone, le côté eſt plus petit que le rayon; & l'excès du rayon ſur le côté ſera d'autant plus grand, que le polygone aura plus de côtés : car ſi l'on inſcrit tous les polygones réguliers pris au-deſſus de l'exagone à un même cercle, il eſt évident que plus le polygone aura de côtés, plus ſon côté ſera ſurpaſſé par celui de l'exagone, qui eſt égal au rayon du cercle.

THÉORÊME V.

519. *Dans le triangle équilatéral le Rayon oblique eſt double du Rayon droit* (fig. 78.)

DÉMONST. Soit le triangle équilatéral DEF inſcrit, & circonſcrit à des cercles décrits du centre commun C ; le rayon droit CB eſt perpendiculaire au côté, ou à la corde EF : donc la corde EF eſt auſſi perpendiculaire ſur le rayon droit. Mais ayant mené les cordes égales EA, AF, ces cordes ſeront les côtés d'un exagone régulier : donc (516.) elles ſeront chacune égales au rayon : donc CE = EA : donc dans la perpendiculaire EF le point E eſt également diſtant des points C & A : donc auſſi (375.) le point B ſera également diſtant des points C & A : donc on aura CB = BA, c'eſt-à-dire, que le

le rayon oblique CE, ou CA, eſt double du rayon droit CB.

*Corollaire I.*

520. Dans le quarré, dans le pentagone, dans l'exagone, &c. régulier, le rayon oblique eſt moins que double du rayon droit. En général plus le polygone aura de côtés, plus la différence entre le rayon oblique & le rayon droit ſera petite : car plus le polygone aura de côtés, moins la circonférence inſcrite à ce polygone différera de la circonférence circonſcrite au même polygone, & par conſéquent la différence de leurs rayons ſera plus petite ; or les rayons de ces circonférences ſont le rayon oblique & le rayon droit du polygone : donc, &c.

*Corollaire II.*

521. Donc dans le polygone *infinitaire*, ou dans le cercle, les rayons obliques ſont égaux aux rayons droits ; ou ce qui eſt le même, tous les rayons ſont égaux : car plus le nombre des côtés du polygone eſt grand, plus la différence entre le rayon oblique & le rayon droit ſera petite, comme nous venons de le voir : donc le nombre des côtés dans le cercle étant infini, la différence entre le rayon droit & le rayon oblique ſera infiniment petite ou nulle.

## PARAGRAPHE II.

*De l'Aſſortiment, ou Aſſemblage des Figures.*

I°. On aſſortit les lignes en les joignant par leurs extrêmités ; on aſſortit les figures en les joignant par leurs angles.

II°. Pour aſſortir les figures, il eſt néceſſaire que les angles des figures ſe réuniſſent, & puiſſent s'adapter de façon qu'ils ne laiſſent aucun vuide entre eux, ou qu'ils rempliſſent exactement l'eſpace qui eſt autour du point où on veut les réunir.

III°. Les angles des figures s'appellent *Angles plans*,

parce qu'ils terminent des ſurfaces planes : or, pour que pluſieurs angles plans réunis puiſſent remplir exactement l'eſpace qui eſt autour d'un point donné, il faut que leur ſomme vaille préciſément quatre angles droits ; comme il eſt évident par ce qui a été dit ailleurs (447.)

### THÉORÊME I.

522. *Il n'y a que trois ſortes de Polygones réguliers de même eſpéce, dont les angles plans puiſſent remplir exactement l'eſpace qui eſt autour d'un point donné* C ; *ſavoir, ſix triangles équilatéraux* (fig. 79.), *quatre quarrés* (fig. 80.) ; *& trois exagones réguliers* (fig. 81.)

DÉMONST. La ſomme des angles qui rempliſſent exactement l'eſpace qui eſt autour d'un point donné C, doit être de quatre angles droits, ou de 360 degrés : or

I°. Chaque angle du triangle équilatéral eſt de 60 degrés (503.) : donc ſix angles de triangles équilatéraux feront $6 \times 60 = 360$ degrés, ou quatre angles droits.

II°. Chaque angle du quarré eſt de 90 degrés ; donc quatre angles de quarré feront $4 \times 90 = 360$ degrés.

III°. Chaque angle de l'exagone régulier eſt de 120 degrés : donc trois angles d'exagone régulier feront $3 \times 120 = 360$ degrés.

### *Corollaire I.*

523. Au-deſſous de l'exagone régulier il n'y a que le pentagone régulier dont les angles ne puiſſent pas remplir exactement un eſpace : la raiſon eſt que chaque angle du pentagone régulier étant de 108 degrés, trois de ces angles font $3 \times 108 = 324$ degrés, ce qui vaut moins que 360 degrés ; & quatre de ces angles font $4 \times 108 = 432$, ce qui vaut plus que 360 degrés, ou quatre angles droits.

*Corollaire II.*

524. Au-deſſus de l'exagone régulier, il n'eſt point de polygones réguliers dont les angles puiſſent exactement remplir l'eſpace donné autour d'un point : car plus les polygones ont de côtés, plus leurs angles ſont grands ; l'angle de l'exagone régulier eſt de 120 : donc l'angle de tout polygone régulier, pris au-deſſus de l'exagone, ſera plus grand que 120 degrés, & par conſéquent trois de ces angles feront plus de 360 degrés.

C'eſt pour cette raiſon que, pour carreler une ſale, une chambre, &c. on ne peut employer que trois ſortes de carreaux réguliers de même eſpéce, ſavoir, les triangulaires, les quarrés & les exagonaux. Les derniers ſont ceux dont on ſe ſert plus volontiers, parce que leurs angles étant plus grands, ils ſont moins ſujets à ſe briſer.

THÉORÊME II.

525. *On peut encore remplir exactement un eſpace donné autour d'un point, en aſſortiſſant des polygones réguliers de différente eſpéce, comme on va le voir.*

DÉMONST. I°. Chaque angle du triangle *équilatéral* étant de 60 degrés, & chaque angle du *dodécagone* régulier étant de 150 degrés, un angle de triangle équilatéral avec deux angles de dodécagone régulier feront $60 + 150 + 150 = 360$ degrés, ou quatre angles droits.

II°. L'angle du quarré eſt de 90 degrés, & l'angle de l'*octogone* régulier eſt de 135 degrés : donc un angle du quarré avec deux angles d'octogone régulier feront $90 + 135 + 135 = 360$ degrés.

III°. Chaque angle de l'exagone régulier eſt de 120 degrés ; & chaque angle du triangle équilatéral eſt de 60 degrés : donc deux angles d'exagones réguliers avec deux angles de triangles équilatéraux font $120 + 120 + 60 + 60 = 360$ degrés.

## ARTICLE III.

### *Du Rapport des Lignes.*

Les poſitions ſemblables des lignes, les diviſions faites ſemblablement dans les lignes, mettent entr'elles des rapports, des proportions, des proportionnalités, dont la connoiſſance fait découvrir dans les figures pluſieurs propriétés. Ces lignes s'appellent *proportionnelles*, & les figures, à qui elles appartiennent, s'appellent *figures ſemblables*. Nous allons parler, 1°. des lignes proportionnelles; 2°. des figures ſemblables.

### PARAGRAPHE I.

### *Des Lignes proportionnelles.*

### *DÉFINITIONS.*

I.

526. On appelle lignes *proportionnelles* des lignes, *par ex :* A, B, *a*, *b*, qui ſont telles, que la premiere eſt à la ſeconde, comme la troiſieme eſt à la quatriéme, ou que A : B :: *a* : *b*.

II.

527. Deux lignes ſont dites être *réciproquement* proportionnelles à deux autres, lorſqu'elles ſont entr'elles comme les deux autres priſes dans un ordre renverſé ; *par ex :* lorſqu'au lieu de A : B :: *a* : *b*, on a au contraire A : B :: *b* : *a*.

III.

528. Deux lignes ſont dites être *réciproques* à deux autres, lorſque les deux premieres ſont les extrêmes d'une proportion, dont les deux dernieres ſont les moyens, ou lorſqu'on a A : *a* :: *b* : B.

IV.

529. Une ligne eſt dite diviſée en *moyenne & extrême raiſon*, lorſqu'elle eſt diviſée de façon que la toute A eſt à ſa grande partie B, comme la grande partie

B eſt à la plus petite C ; ou, ce qui eſt le même, lorſque la plus grande partie eſt moyenne proportionnelle entre la ligne entiere A & la plus petite partie C, ou qu'on a A : B :: B : C, ou :: A : B : C.

V.

530. On appelle *Médiane* la plus grande partie B d'une ligne A diviſée en moyenne & extrême raiſon. On l'appelle *médiane*, parce qu'elle eſt moyenne proportionnelle entre la ligne entiere A & la plus petite partie C.

THÉORÊME I.

531. *Si deux lignes telles que* AB *&* CD (fig. 82.) *compriſes entre deux paralleles, ſont coupées par une, ou pluſieurs paralleles intermédiaires, les portions correſpondantes dans les deux lignes ſeront* 1°. *proportionnelles aux lignes totales ;* 2°. *proportionnelles entr'elles.*

DÉMONST. I. Partie. Les portions correſpondantes ſeront proportionnelles aux lignes totales, parce qu'elles ſont ſemblablement diviſées : car ſi AE eſt le tiers, ou le quart de la ligne totale AB ; CF ſera auſſi le tiers, ou le quart de la ligne totale CD : donc les portions correſpondantes ſeront des parties ſemblables des lignes totales : donc elles ſeront entr'elles comme les lignes totales ; c'eſt pourquoi l'on aura les proportions,

AE : CF :: AB : CD ;
EG : FH :: AB : CD.

DÉMONSTRATION. II. Partie. Les parties correſpondantes ſeront proportionnelles entr'elles : car puiſqu'elles ſont proportionnelles aux lignes totales, & que l'on a AE : CF :: AB : CD,
EG : FH :: AB : CD ;
il s'enſuit que l'on aura
AE : CF :: EG : FH.
car deux rapports, qui ſont égaux chacun à un même troiſiéme rapport, ſont égaux entr'eux.

*Corollaire I.*

532. Si deux lignes *eb*, *fd*, compriſes entre deux paralleles, ſont autant inclinées que deux autres lignes AB, CD, compriſes auſſi entre deux paralleles (*fig.* 82.), les deux premieres ſeront proportionnelles aux deux autres : car prenant ſur la ligne AB la portion AI = *eb*, & menant la parallele OP, on aura CK = *fd*, parce que CK & *fd* ſont également inclinées dans des eſpaces paralleles égaux, & ſont par conſéquent (392.) égales : or nous venons de prouver que les portions AI, CK ſont proportionnelles aux lignes totales AB, CD, ou que

A : CK :: AB : CD ;

donc à la place de AI, CK, mettant leurs égales, *eb*, *fd*, on aura *eb* : *fd* :: AB : CD.

*Corollaire II.*

533. Si deux lignes ſe coupent entre deux paralleles, les parties de l'une ſeront proportionnelles aux parties de l'autre (*fig.* 83.) : car ayant tiré par le point d'interſection E une ligne parallele aux deux autres AB, CD, les portions EC, ED ſont autant inclinées dans leur eſpace parallele, que les portions EB, EA le ſont dans le leur ; puiſque ce ſont les mêmes lignes continuées : donc, &c.

THÉORÊME II.

534. *Si les deux côtés d'un Triangle ſont diviſés par une, ou pluſieurs lignes paralleles à la baſe, ils ſeront diviſés en parties proportionnelles* (fig. 84.).

DEMONSTRATION. Faiſant paſſer par le ſommet de l'angle A une ligne GH, parallele aux baſes *ed*, BC, les deux côtés AB, AC du triangle doivent être alors regardés comme deux lignes compriſes entre deux paralleles, & qui ſont coupées par une ou pluſieurs paralleles intermédiaires en parties proportionnelles entr'elles & aux lignes totales.

## THÉORÊME III.

535. *Si deux Triangles, l'un plus grand & l'autre plus petit, ſont équiangles, tous les côtés de l'un ſeront proportionnels aux côtés homologues de l'autre* (fig. 84 & 85.).

DÉMONSTRATION. En effet :

I°. Si l'on poſe le ſommet *a* du petit triangle ſur le ſommet A du grand triangle, alors les côtés du petit triangle ſeront couchés ſur les côtés du grand à cauſe de l'angle $a = A$, & la baſe *ed* du petit triangle ſera parallele à la baſe BC du grand (490.) : or dans ce cas ſi l'on fait paſſer par le ſommet commun A une ligne GH parallele à la baſe, les côtés AB, AC du grand triangle ſeront diviſés aux points *e*, *d*, par une ligne parallele à la baſe : donc (534) ils ſeront diviſés en parties proportionnelles ; c'eſt-à-dire, que l'on aura $Ae : Ad :: AB : AC$, dans laquelle proportion les côtés du petit triangle ſe trouvent proportionnels aux côtés homologues du grand triangle.

II°. Si l'on poſe le point *d* pris comme ſommet du petit triangle ſur le ſommet C du grand triangle, il eſt clair, par la même raiſon que ci-deſſus, que les côtés du petit triangle ſeront couchés ſur les côtés du grand, & que la baſe *ae* du petit triangle ſera parallele à la baſe du grand, & par conſéquent on prouvera, comme ci-deſſus, que l'on a

$$da : de :: CA : CB ;$$

& par conſéquent les trois côtés du petit triangle ſont proportionnels aux trois côtés homologues du grand.

### *Corollaire I.*

536. Si deux cordes AD, CB ſe coupent dans un cercle, les parties de l'une ſeront réciproques aux parties de l'autre (*fig.* 86.). En effet ayant mené les lignes AB, CD on aura deux triangles AEB, CED, qui ſeront équiangles : car les angles oppoſés au ſommet E ſont égaux (445) ; de plus les angles aux

points D & B ſont auſſi égaux, parce qu'ils ſont appuyés ſur le même arc CA ; par la même raiſon les angles aux points A & C ſont égaux : donc les deux triangles CED, AEB ſont équiangles : donc (535.) les côtés homologues ſont proportionnels, & l'on aura CE : AE :: ED : EB,
dans laquelle proportion les parties CE, EB d'une corde ſont réciproques aux parties AE, ED de l'autre.

*Corollaire II.*

537. Si l'une des cordes étoit diamétre, alors les portions, ou ſegmens du diamétre ſeroient réciproques aux portions, ou ſegmens de la corde.

*Corollaire III.*

538. Si la corde DE (*fig.* 87.) étoit perpendiculaire au diamétre AC, alors la portion DB ou BE de la corde, ſeroit moyenne proportionnelle entre les deux ſegmens du diamétre ; car par le corollaire précédent on a AB : BD :: BE : BC.
or la corde étant perpendiculaire au diamétre, on a (412.) BD = BE : donc on aura
AB : BD :: BD : BC, ou ∴ AB : BD : BC.

*Corollaire IV.*

539. Dans un cercle une ligne quelconque BD (*fig.* 92.) tirée d'un point de la circonférence perpendiculairement ſur le diamétre, eſt moyenne proportionnelle entre les deux ſegmens AD, DC du diamétre ; car cette perpendiculaire eſt la moitié d'une corde perpendiculaire au diamétre.

*Corollaire V.*

540. Si deux ſécantes extérieures EB, EC, (*fig.* 88.) partant d'un même point, vont ſe terminer à la circonférence concave du cercle ; les parties extérieures des ſécantes ſeront réciproquement proportionnelles aux ſécantes entieres ; c'eſt-à-dire, que l'on aura EB : EC :: ED : EA. Car ayant mené les cordes AC, BD, les triangles EBD, EAC ſe-

ront équiangles ; ayant l'angle en E commun, & les angles en B & C appuyés ſur le même arc AD : donc (535.) les côtés homologues ſont proportionnels, & l'on aura EB : EC :: ED : EA, dans laquelle proportion les parties extérieures EA, ED ſont réciproquement proportionnelles aux ſécantes entieres EB, EC.

*Corollaire VI.*

541. Si l'une des deux ſécantes devenoit tangente BD (*fig.* 90.) : alors la tangente ſeroit moyenne proportionnelle entre la ſécante entiere & ſa partie extérieure. Car ſuppoſons que la ſécante EB (*fig.* 88.) demeurant immobile, on en éloigne l'autre ſécante EC, en la faiſant tourner autour du point E ; alors les points C & D s'approcheront l'un de l'autre, les rapports du corollaire précédent reſtant les mêmes : or dès que la ligne EC devient tangente, les points D & C ſe confondent, & la ligne EC devient BD (*fig.* 90.) : donc alors la proportion de la figure 88, ſavoir,

EB : EC :: ED : EA,

deviendra pour la figure 90,

BA : BD :: BD : BE.

On peut auſſi prouver la même choſe par le moyen des triangles ſemblables BAE, EBD (*fig.* 89.)

*Corollaire VII.*

542. Si la partie intérieure EA de la ſécante BA (*fig.* 90.) eſt égale à la tangente BD, cette ſécante ſera diviſée en moyenne & extrême raiſon, au point E ; car par le corollaire précédent on a

BA : BD :: BD : BE.

or par l'hypothèſe BD = EA : donc ſubſtituant on aura

BA : EA :: EA : BE.

*Corollaire VIII.*

543. Le tout étant ſuppoſé, comme dans le corollaire précédent, ſi l'on prend dans la tangente

BD la portion BG=BE, la tangente ſera diviſée en moyenne & extrême raiſon au point G; car par le corollaire ſixiéme on a

BA:BD::BD:BE:

donc *ſubſtrahendo*, BA—BD:BD::BD—BE:BE: or BA—BD=BE=BG; pareillement BD—BE=GD: donc ſubſtituant on aura

BG:BD::GD:BG,

& *invertendo*, BD:BG::BG:GD.

C'eſt de-là que les Géométres déduiſent la méthode de diviſer une ligne en *moyenne & extrême raiſon*, comme nous le ferons voir dans la ſuite.

THÉORÊME V.

544. *Dans tout Triangle rectangle, ſi l'on abbaiſſe du ſommet de l'angle droit une perpendiculaire ſur le côté oppoſé* (que l'on appelle Hypothénuſe), *on aura trois lignes moyennes proportionnelles*; (fig. 91.)

I°. *Le grand côté* BC *entre l'hypothénuſe entiere* AC, *& le ſegment adjacent* DC; *c'eſt-à-dire, que l'on aura* ∴ AC:BC:DC.

II°. *Le petit côté* BA *entre l'hypothénuſe entiere* AC *& le ſegment adjacent* AD; *c'eſt-à-dire, que l'on aura* ∴ AC:AB:AD.

III°. *La perpendiculaire* BD *entre les deux ſegmens* AD & DC; *c'eſt-à dire, que l'on aura* ∴ AD:BD:DC.

DÉMONST. I. Partie. Le petit triangle ABD & le grand triangle ABC ſont équiangles; car ils ont chacun un angle droit, & de plus l'angle en A eſt commun à l'un & l'autre: donc le troiſiéme angle eſt auſſi égal de part & d'autre, ſavoir, l'angle *o=r*: donc les côtés homologues ſont proportionnels, & on aura la proportion, l'hypothénuſe AC du grand triangle eſt à l'hypothénuſe AB du petit triangle, comme le petit côté AB du grand triangle eſt au petit côté AD du petit triangle, ou

AC:AB::AB:AD, ou ∴ AC:AB:AD.

DÉMONST. II. Partie. Le moyen triangle BDC

& le grand triangle ABC ſont équiangles; car ils ont chacun un angle droit, & de plus l'angle en C eſt commun à l'un & à l'autre : donc le troiſiéme angle eſt auſſi égal de part & d'autre, ſavoir, l'angle $e=m$ : donc les côtés homologues ſont proportionnels : donc on aura la proportion, l'hypothénuſe AC du grand triangle eſt à l'hypothénuſe BC du moyen triangle, comme le grand côté BC du grand triangle eſt au grand côté DC du moyen triangle, ou

AC : BC :: BC : DC, ou ∴ AC : BC : DC.

Dém. III. Partie. Le petit triangle ABD & le moyen triangle BDC ſont équiangles; car ils ont chacun un angle droit; de plus l'angle $o=r$, & l'angle $e=m$ : donc les côtés homologues ſont proportionnels : donc le petit côté AD du petit triangle eſt à ſon moyen côté BD, comme le petit côté BD du moyen triangle eſt à ſon moyen côté DC, ou

AD : BD :: BD : DC, ou ∴ AD : BD : DC.

## Théorême VI.

545. *Si dans un Triangle iſocele* ACB (fig. 93.), *dont on ſuppoſe chaque angle ſur la baſe double de celui du ſommet, on mene une ligne* BD *qui diviſe l'un des angles de la baſe en deux également, cette ligne coupera le côté oppoſé* AC *en moyenne & extrême raiſon, dont la médiane ſera* CD ; *c'eſt-à-dire, que l'on aura la proportion* AC : CD :: CD : AD, ou ∴ AC : CD : AD.

Démonst. Les deux triangles ACB, ABD ſont équiangles; car l'angle en A eſt commun à l'un & à l'autre; de plus, par l'hypothèſe, l'angle $o=C$, & par conſéquent (478.) l'angle $m=B$ : donc les côtés homologues ſont proportionnels, & l'on aura

AC : AB :: AB : DA :

or AB = CD; car

I°. AB = BD, parce que le triangle DBA eſt iſocele, à cauſe de l'angle $m=B=A$, comme on vient de le prouver.

II°. Le côté BD=CD, parce que le triangle BCD eſt iſocele, à cauſe de l'angle C=*n* par l'hypothèſe : donc on aura AB=BD=CD : donc AB=CD : donc en ſubſtituant on aura

AC:CD::CD:DA, ou $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$ AC:CD:DA.

*Corollaire.*

546. Donc le côté du décagone régulier inſcrit dans un cercle, eſt égal à la *médiane* du rayon diviſé en moyenne & extrême raiſon. Car ſoit AB le côté d'un décagone régulier (*fig.* 93.), aux extrémités duquel tirez les rayons CA, CB, pour former le triangle ACB, dont l'angle C aura pour meſure la dixiéme partie de la circonférence, c'eſt-à-dire, ſera de 36 degrés : donc les deux autres angles A & B pris enſemble valent 144 degrés ; or ils ſont égaux, parce que le triangle ACB eſt iſocele : donc chacun des angles A & B eſt de 72 degrés : donc ſi l'on diviſe l'angle CBA en deux également par la ligne BD, cette ligne ED diviſera (545.) le rayon AC en moyenne & extrême raiſon ; or le côté AB eſt égal, comme on vient de le prouver, à DC, qui eſt la *médiane* du rayon diviſé en moyenne & extrême raiſon : donc, &c.

## PARAGRAPHE II.

*Des Figures ſemblables.*

I°. L'égalité des figures dépend de l'égalité & des angles reſpectifs & des côtés correſpondans ; mais leur ſimilitude dépend de l'égalité des angles reſpectifs & de la proportionnalité des côtés homologues : on appelle donc figures ſemblables celles qui ont tous leurs angles reſpectifs égaux, & tous leurs côtés homologues proportionnels.

II°. Dans les figures ſemblables il y a trois choſes, égalité, proportionnalité & ſimilitude : l'*égalité* tombe ſur les angles ; la *proportionnalité* ſur les côtés ; la *ſimilitude* ſur les figures.

III°. La ſimilitude des figures a des ſignes qui la font reconnoître, & des rapports qui en réſultent. Nous en allons parler.

## NOMBRE I.

*Des Signes de Similitude dans les Figures.*

Deux figures ſont ſemblables toutes les fois que par le moyen de rayons, ou de diagonales, ou de lignes quelconques ſemblablement tirées, elles peuvent être partagées en un égal nombre de triangles ſemblables: car deux quantités qui peuvent être diviſées en un même nombre de parties ſemblables, ſont ſemblables entr'elles. Il eſt donc néceſſaire ici de bien remarquer quels ſont les ſignes, ou les marques qui font reconnoître ſi deux triangles ſont ſemblables, ou non.

## THÉORÊME I.

547. *Deux triangles équiangles ſont toujours ſemblables.*

DEMONST. Deux triangles équiangles ont tous leurs angles reſpectifs égaux, comme il eſt évident, & tous leurs côtés homologues proportionnels, comme nous l'avons prouvé (535.): donc ils ſont ſemblables.

*Corollaire.*

548. Deux triangles qui ont deux angles égaux de part & d'autre, ſont dès lors ſemblables: car lorſqu'ils ont deux angles égaux de part & d'autre, le troiſiéme angle (478.) eſt auſſi égal de part & d'autre, & par conſéquent les triangles ſont équiangles, & dès-lors ſemblables.

## THÉORÊME II.

549. *Deux Triangles* abc, ABC, *qui ont leurs trois côtés homologues proportionnels, ſont dès-lors ſemblables* (fig. 94.).

Démonst. Sur le côté AB du grand triangle, prenez $Ad=ab$, & menez $do$ parallele à BC, & vous aurez (491.) le triangle $Ado$ équiangle, & par conſéquent (547.) ſemblable au triangle ABC: or le triangle $abc=Ado$. Car par la conſtruction on a $Ad:AB::Ao:AC::do:BC$, & par l'hypothèſe on a $ab:AB::ac:AC:bc:BC$; mais puiſque dans ces deux proportionnalités les conſéquens ſont les mêmes de part & d'autre, il eſt évident que l'on pourra conclure $ab:Ad::ac:Ao::bc:do$; or par la conſtruction $ab=Ad$: donc auſſi $ac=Ao$, & $bc=do$: donc le triangle $abc=Ado$, & eſt par conſéquent ſemblable au triangle ABC.

## Théorême III.

550. *Deux Triangles qui ont deux côtés homologues proportionnels, & l'angle intercepté entre ces côtés, égal de part & d'autre, ſont dès-lors ſemblables* (fig. 94.).

Démonst. Soient les côtés $ab$, $ac$ proportionnels aux côtés AB, AC, & l'angle $a=A$; ſur le côté AB du grand triangle, prenez $Ad=ab$, & menez $do$ parallele à BC, & vous aurez le triangle $Ado$ équiangle (491.), & par conſéquent ſemblable (547.) au triangle ABC: or le triangle $abc=Ado$. Car par la conſtruction $Ad:Ao::AB:AC$, & par l'hypothèſe $ab:ac::AB:AC$; donc $ab:ac::Ad:Ao$; or par la conſtruction $ab=Ad$: donc auſſi $ac=Ao$: donc les deux triangles $abc$, $Ado$ ont deux côtés homologues égaux; d'ailleurs les angles $a$, A, compris entre ces côtés, ſont ſuppoſés égaux: donc (497.) le triangle $abc=Ado$.

## Théorême IV.

551. *Deux Triangles qui ont deux côtés homologues proportionnels, & l'un des angles oppoſés à ces côtés, égal de part & d'autre, ſont ſemblables; pourvu que le ſecond angle oppoſé aux autres côtés proportionnels ſoit de même eſpéce* (fig. 94.).

Démonst. Dans les triangles *abc*, ABC, ſoient les côtés *ab*, *ac* proportionnels aux côtés AB, AC, & l'angle *b*=B; ſi de plus les angles en *c*, C, ſont de même eſpéce, je dis que les deux triangles *abc*, ABC ſont ſemblables. Car ayant pris, comme ci-deſſus, A*d*=*ab*, & mené la parallele *do*, on aura le triangle A*do* ſemblable au triangle ABC: or *abc* =A*do*; car on a par l'hypothèſe *ab*:*ac*::AB:AC, & par la conſtruction A*d*:A*o*::AB:AC: donc *ab*: *ac*::A*d*:A*o*: or *ab*=A*d*: donc *ac*=A*o*; donc dans les triangles *abc*, A*do* les deux côtés, *ab*, *ac* ſont égaux aux côtés homologues A*d*, A*o*; d'ailleurs l'angle *b*=B=*d*, & de plus l'angle *c* eſt de même eſpéce que l'angle C=*o*: donc (498.) le triangle *abc* =A*do*.

## Théorême V.

552. *Deux Polygones réguliers de même eſpéce, ou d'un même nombre de côtés, ſont toujours ſemblables* (fig. 97.).

Démonst. Si vous diviſez les deux polygones en triangles par des rayons tirés du centre aux angles de la circonférence; 1°. il y aura un même nombre de triangles dans l'un & dans l'autre, ſçavoir, autant que de côtés; 2°. tous les triangles de l'un ſeront ſemblables aux triangles correſpondans de l'autre; *par ex*: le triangle CAB ſera ſemblable au triangle *cab*. Car les côtés de ces triangles partagent dans chaque polygone l'angle à la circonférence en deux également (508.): or les polygones étant réguliers & d'un même nombre de côtés, tous les angles de l'un ſont égaux aux angles correſpondans de l'autre (504.): donc leurs moitiés ſont auſſi égales de part & d'autre, & l'on aura l'angle O=*o*, l'angle N=*n*: donc les triangles CAB, *cab* ſont équiangles (478.), & par conſéquent ſemblables.

*Corollaire I.*

553. Si du centre d'un polygone on mene des rayons aux angles de la circonférence (*fig.* 96.) & qu'on joigne ces rayons par des lignes continuement paralleles aux côtés du polygone, on aura deux polygones concentriques, qui ſeront ſemblables. Car ces deux polygones ſe trouveront partagés en un égal nombre de triangles correſpondans & ſemblables les uns aux autres; *par ex :* le triangle CNM eſt ſemblable au triangle CFE, & ainſi des autres, comme il eſt évident.

*Corollaire II.*

554. Si vous faites le polygone ABDEFG (*fig.* 97.) égal & ſemblable au polygone extérieur de la figure 96, & le polygone *abdefg* égal & ſemblable au polygone intérieur, & ſi vous les partagez en triangles par des rayons menés du centre; il eſt évident qu'on peut appliquer aux deux polygones de la figure 97, ce que nous avons dit des deux polygones concentriques (*fig.* 96.); & que les propriétés qui conviennent aux uns, conviennent auſſi aux autres. D'où il faut conclure en général;

I°. Que deux polygones ſemblables peuvent toujours être ſuppoſés concentriques.

II°. Que deux polygones ſemblables peuvent toujours être partagés en un même nombre de triangles ſemblables, par des rayons menés du centre aux angles de la circonférence.

III°. Que deux polygones ſemblables peuvent auſſi être ſemblablement diviſés, ou être partagés en un nombre égal de triangles ſemblables, par des diagonales (*fig.* 98.) ſemblablement tirées dans les polygones.

## NOMBRE II.

*Des Rapports réſultans de la Similitude des Figures.*

Les rapports qui réſultent de la ſimilitude des figures, ſont certaines proportions qui ſe trouvent entre

entre les périmétres, les côtés, les rayons, les diamétres, les lignes ſemblablement tirées dans les figures ſemblables.

### THÉORÊME I.

555. *Dans les Triangles ſemblables les côtés homologues ſont proportionnels aux hauteurs, c'eſt-à-dire, aux lignes tirées du ſommet perpendiculairement ſur la baſe* (fig. 95.)

DÉMONST. Les deux triangles rectangles BAD, *bad*, ſont équiangles, parce qu'ils ont chacun un angle droit aux points D & *d*, & l'angle *b* = B par l'hypothèſe; donc ils ſont ſemblables : donc leurs côtés homologues ſont proportionnels, & l'on aura

AB : *ab* :: AD : *ad* :

mais AD & *ad* ſont les hauteurs des triangles : donc, &c.

*Corollaire.*

556. Dans les triangles ſemblables les baſes ſont proportionnelles aux hauteurs; car les baſes ſont elles-mêmes des côtés : or les côtés ſont proportionnels aux hauteurs.

### THÉORÊME II.

557. *Dans les Polygones réguliers ſemblables, les côtés homologues ſont proportionnels aux rayons obliques* (fig. 97.)

DÉMONST. Les triangles ACB, *acb* ſont ſemblables, comme nous l'avons prouvé (552.) : donc leurs côtés homologues ſont proportionnels, & l'on aura

AB : AC :: *ab* : *ac* ;

c'eſt-à-dire, que les côtés AB, *ab* des polygones ſont entr'eux comme les rayons obliques AC, *ac*.

### THÉORÊME III.

558. *Dans les Polygones réguliers ſemblables, les côtés homologues ſont proportionnels aux rayons droits* (fig. 97.)

Demonst. Les triangles FCM, *fcm* ſont ſemblables, comme il eſt évident : donc leurs côtés homologues ſont proportionnels, & l'on aura

FM : CM :: *fm* : *cm* :

or FM, *fm* ſont les moitiés des côtés homologues FE, *fe* (511), & les moitiés ſont entr'elles comme les touts : donc on aura FE : *fe* :: CM : *cm*.

*Corollaire.*

559. Dans les polygones ſemblables, les rayons obliques ſont proportionnels aux rayons droits. Car les rayons obliques ſont (557.) proportionnels aux côtés homologues ; les côtés homologues ſont proportionnels aux rayons droits ; donc les rayons obliques ſont, &c.

Théorême IV.

560. *Dans les Polygones ſemblables les circonférences, ou périmétres ſont proportionnels aux côtés homologues* (fig. 97.)

Démonst. Déſignons les côtés du grand polygone par A, B, C, D, & les côtés du petit par *a*, *b*, *c*, *d* : les deux polygones étant ſemblables, leurs côtés homologues ſont tous proportionnels ; donc on aura la proportionnalité A : *a* :: B : *b* :: C : *c* :: D : *d* : or (232.) dans toute proportionnalité la ſomme des antécédens eſt à celle des conſéquens, comme un ſeul antécédent eſt à ſon conſéquent : donc on aura

A + B + C + D : *a* + *b* + *c* + *d* :: A : *a*.

Or la ſomme des antécédens donne la ſomme des côtés, ou le périmétre du grand polygone, & la ſomme des conſéquens donne la ſomme des côtés, ou le périmétre du petit polygone : donc, &c.

*Corollaire.*

561. Donc dans les polygones ſemblables les périmétres ſont entr'eux, & comme les rayons obliques, & comme les rayons droits.

THÉORÊME V.

562. *En général dans les Polygones ſemblables, les périmétres ſont entr'eux, comme les lignes ſemblablement tirées dans les deux polygones*; par ex : *comme les diagonales* AC, *ac*; *ou* AD, *ad* (fig. 98.)

DEMONST. Les triangles ABC, *abc*, ſont ſemblables (554) : donc on aura AB : *ab* :: AC : *ac* : or les périmétres des deux polygones ſemblables ſont entr'eux comme les côtés AB, *ab* : donc ils ſont auſſi entr'eux comme les diagonales AC, *ac*.

THÉORÊME VI.

563. *Si les côtés des Polygones ſemblables ſont ſuppoſés infiniment petits, & être en nombre infini; ou, ce qui eſt le même, ſi les Polygones ſemblables ſont ſuppoſés être des cercles, les circonférences ſeront entr'elles comme les rayons.*

DÉMONST. Cela ſe prouve par la même raiſon, que, dans les polygones finis & ſemblables, les périmétres ſont entr'eux comme les rayons.

*Corollaire.*

564. Donc les circonférences des cercles, 1°. ſont entr'elles comme les diamétres; 2°. ſont entr'elles comme les arcs ſemblables, ou comme les arcs d'un même nombre de degrés : car les tous ſont comme les parties ſemblables.

THÉORÊME VII.

565. *Dans les Circonférences de cercles les Arcs ſemblables ſont entr'eux comme les cordes qui les ſoutiennent* (fig. 99.)

DÉMONST. Ayant tiré du centre commun A des rayons aux extrêmités des cordes ED, CB, on aura deux triangles ſemblables ACB, AED, dans leſquels les côtés AC, AE, qui ſont rayons, ſont entr'eux comme les côtés, ou cordes CB, ED : or les arcs ſemblables ſont entr'eux comme leurs rayons : donc, &c.

# SECTION II.

## *Des Surfaces.*

I°. LA ligne eſt une étendue qui n'a qu'une dimenſion, que l'on appelle *Longueur ;* la ſurface eſt une étendue qui a deux dimenſions, que l'on appelle *Longueur* & *Largeur.*

II°. La ſurface eſt ou *plane*, ou *courbe.* On appelle ſurface *plane*, celle dont tous les points ſont de niveau, c'eſt-à-dire, ne ſont ni plus élevés, ni plus enfoncés les uns que les autres ; telle eſt la ſurface d'un miroir. On appelle ſurface *courbe*, celle dont tous les points ſont inégalement élevés, ou enfoncés ; telle eſt la ſurface d'une ſphere. Nous ne parlerons ici que des ſurfaces planes.

III°. La ſurface plane peut être conſidérée, ou comme *figure*, ou comme *quantité*, ou comme *plan.* La ſurface, conſidérée comme *figure*, eſt une étendue terminée par des angles & des côtés. La ſurface, conſidérée comme *quantité*, eſt le réſultat de deux dimenſions combinées entr'elles, qui rendent la ſurface plus ou moins grande, & par conſéquent ſuſceptible d'évaluation, de meſure & de comparaiſon. La ſurface, conſidérée comme *plan*, eſt une étendue dont toutes les parties ſont ſemblablement poſées à côté les uns des autres, & qui eſt conſidérée ſans aucun égard ni à ſa figure, ni à ſa quantité.

IV°. Nous avons conſidéré ci-devant les ſurfaces comme figures : nous allons parler maintenant des ſurfaces conſidérées ; 1°. comme quantités ; 2°. comme plans.

# CHAPITRE I.

## *Des ſurfaces conſidérées comme quantités.*

I°. Toute ſurface conſidérée comme *quantité*, réſulte de deux dimenſions combinées entr'elles, & qui ſont repréſentées par deux lignes que l'on appelle, ou bien la *hauteur* AB, & la *baſe* AD (*fig.* 100.); ou bien le *rayon* droit CM, & le *périmétre* ABD &c. (*fig.* 97.) La *hauteur* d'une ſurface ſe détermine par une ligne perpendiculaire menée du ſommet d'un des angles de la ſurface ſur la baſe prolongée, s'il le faut. Le *rayon droit* eſt une perpendiculaire menée du centre de la ſurface ſur l'un de ſes côtés.

II°. La ſurface, conſidérée comme *quantité*, peut être regardée comme compoſée d'*élémens*, dont la ſomme donne la quantité plus ou moins grande de la ſurface, que l'on appelle auſſi, par cette raiſon, *Aire* ou *Superficie*. Les élémens, que l'on peut conſidérer dans la ſurface, ſont des lignes ſemblablement tirées & poſées les unes ſur les autres, comme on voit (*fig.* 100 & 103.), ou des lignes menées d'un point commun, & poſées à côté les unes des autres, comme on voit (*fig.* 97.)

III°. Les Géométres ont coutume de conſidérer les lignes qui ſervent d'*élémens* à la ſurface, comme ayant une largeur infiniment petite, & dans ce cas on conſidere la ſurface comme compoſée de petites ſurfaces *élémentaires*, qui ont, ou une *hauteur* infiniment petite, lorſqu'elles ſont poſées les unes ſur les autres; ou une *largeur* infiniment petite, lorſqu'elles ſont poſées à côté les unes des autres.

IV°. Les ſurfaces, conſidérées comme *quantités*, ſont ſuſceptibles d'évaluation, de meſure & de rapports : nous en allons parler.

## ARTICLE I.

### *De l'Evaluation des Surfaces.*

#### PRINCIPE I.

566. Une ſurface peut être conçue décrite par le mouvement de ſa baſe AD (*fig.* 100.), laquelle monte parallelement à elle-même le long de la hauteur AB. Car en Géométrie on conçoit que la ligne eſt décrite par le mouvement d'un point ; la ſurface, par le mouvement d'une ligne ; & le ſolide, par le mouvement d'une ſurface.

#### PRINCIPE II.

567. Si la baſe AD, montant parallelement à elle-même le long de la ligne AB, eſt ſuppoſée laiſſer des traces par-tout où elle paſſe, ces traces pourront être regardées comme les élémens de la ſurface.

#### PRINCIPE III.

568. Une ſurface eſt égale à la ſomme de tous ſes élémens. Or 1°. ſi les élémens ſont tous égaux, la ſurface ſera un *Parallélogramme :* 2°. ſi les élémens décroiſſent uniformément, c'eſt-à-dire, d'une quantité toujours égale, ou ſelon une progreſſion arithmétique, juſqu'à ce qu'ils deviennent nuls, ou = 0, la ſurface ſera un *Triangle :* 3°. ſi les élémens croiſſent, ou décroiſſent dans un autre rapport, la ſurface ſera une figure de différente eſpéce, ſuivant la diverſité de ce rapport.

#### THEORÊME I.

569. *La ſurface d'un Parallélogramme eſt égale au produit de ſa baſe par ſa hauteur* (fig. 100.)

DEMONST. La ſurface du parallélogramme ABID peut être conçue formée & décrite par le mouve-

ment de la baſe AD, qui monte parallelement à elle-même le long de la hauteur AB : donc elle eſt égale à la ſomme des traces que laiſſe la baſe en montant le long de la hauteur : or la baſe en montant, laiſſe autant de traces, qu'il y a de points dans la hauteur : donc la ſurface du parallélogramme eſt égale à la baſe priſe autant de fois qu'il y a de points dans la hauteur ; c'eſt-à-dire, qu'elle eſt égale au produit de la *baſe* par la *hauteur*.

*Corollaire I.*

570. Les traces que laiſſe la baſe, en montant, repréſentent les élémens du parallélogramme, leſquels ſont tous égaux ; ils peuvent donc être repréſentés par les termes d'une progreſſion uniforme ; *par ex :* ∴ 8 · 8 · 8 · 8 · 8 · 8 · 8 · 8 · 8 · 8, dont le dernier terme 8 repréſente la *baſe*, & le nombre 10 des termes repréſente la hauteur du parallélogramme : donc, pour évaluer la ſurface du parallélogramme, il n'y a qu'à trouver la ſomme de tous les termes de cette progreſſion, laquelle eſt égale au produit du dernier terme 8 par le nombre 10 des termes, ou eſt $s = 8 \times 10$, & c'eſt l'expreſſion *numérique* de la ſurface du parallélogramme.

*Colloraire II.*

571. Si l'on diviſe la hauteur BA (*fig.* 100.) en trois parties égales B*e*, *ef*, *f*A, & la baſe en quatre parties égales A*b*, *bc*, *cd*, *d*D, & que par les points de diviſion on mene des lignes telles que *ep*, *fu*, &c. *bg*, *ci*, &c. la ſurface du parallélogramme, ſera compoſée de petits parallélogrammes élémentaires, dont le nombre ſera $3 \times 4 = 12$ ; c'eſt encore une expreſſion *numérique* de la ſurface du parallélogramme, laquelle ne differe de la précédente, qu'en ce que, dans le cas précédent, le parallélogramme eſt regardé comme compoſé de parallélogrammes élémentaires qui n'ont qu'une hauteur infiniment petite, ou

qui ſont des lignes; au lieu que dans le ſecond cas le parallélogramme eſt regardé comme compoſé de parallélogrammes qui ont tous une baſe & une hauteur finie.

*Corollaire III.*

572. Si l'on appelle la hauteur $a$, la baſe $b$ & le parallélogramme $p$, l'évaluation de la ſurface du parallélogramme ſera $p = ab$, & c'eſt l'expreſſion *algébrique* de ſa ſurface.

*Corollaire IV.*

573. La hauteur du parallélogramme étant la ligne AB, & la baſe étant la ligne AD, l'evaluation de ſa ſurface ſera P = AB × AD = ABID, qui eſt une figure; & c'eſt l'expreſſion *géométrique* du parallélogramme.

THEORÊME II.

574. *Un parallélogramme & un rectangle, de même baſe & de même hauteur, ſont égaux en ſurface* (fig. 101.)

DEMONST. En effet ſi l'on traverſe le parallélogramme & le rectangle par une infinité de paralleles à la baſe; les ſections que laiſſeront ces paralleles dans le parallélogramme & dans le rectangle, repréſenteront les traces que laiſſeroit la baſe, en montant, ſoit le long de la ligne CA pour former le rectangle CABD; ſoit le long de la ligne CE, pour former le parallélogramme CEFD. Or ces ſections ſont égales de part & d'autre en nombre & en grandeur: en nombre, parce que toutes les paralleles qui traverſent le parallélogramme, traverſent auſſi le rectangle: en grandeur, parce que chacune de ces ſections eſt égale à la baſe CD, qui eſt égale dans l'un & dans l'autre: donc, &c.

*Corollaire.*

575. D'où il ſuit en général, que deux parallélogrammes quelconques de même baſe & de même hauteur ſont égaux en ſurface (*fig.* 102.)

## THÉORÊME III.

576. *La ſurface du triangle eſt la moitié de celle d'un parallélogramme de même baſe & de même hauteur que lui* (fig. 103.).

DÉMONST. Car les élémens du triangle peuvent être repréſentés par les termes d'une progreſſion arithmétique continuée à l'infini, ſavoir, $\dddot{-}\ 0\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot\cdot\infty$, dans laquelle le premier terme zero repréſente le *ſommet* du triangle, le dernier terme $\infty$ repréſente la *baſe*, & le nombre $n$ des termes repréſentera la *hauteur* du triangle: donc la ſomme de tous les termes de cette progreſſion donnera l'évaluation de la ſurface triangulaire; or cette ſomme eſt, comme nous l'avons dit (256.) $s=\frac{\infty^2}{2}$.

Pareillement les élémens d'un parallélogramme de même hauteur & de même baſe que le triangle ſeront repréſentés par les termes d'une progreſſion uniforme $\dddot{-}\ \infty\cdot\infty\cdot\infty\cdot\infty\cdot\infty\cdot\infty\cdot\cdot\cdot\cdot\infty$, dont chaque terme eſt égal au dernier terme de la progreſſion arithmétique: donc l'expreſſion de la ſurface du parallélogramme ſera (570.) $s=\infty^2$.

Or la ſomme $s=\frac{\infty^2}{2}$ eſt la moitié de $s=\infty^2$; comme il eſt évident: donc la ſurface triangulaire eſt la moitié de celle d'un parallélogramme de même baſe & de même hauteur.

### *Corollaire I.*

577. Donc la ſurface du triangle eſt égale à la moitié du produit de ſa baſe par ſa hauteur, puiſqu'elle eſt la moitié de la ſurface d'un parallélogramme de même baſe & de même hauteur que lui; & par conſéquent l'expreſſion de la ſurface du parallélogramme étant $s=ab$, celle du triangle de même baſe & de même hauteur ſera $s=\frac{1}{2}ab$.

*Corollaire II.*

578. Deux triangles de même baſe & de même hauteur ſont égaux en ſurface : car ils ſont les moitiés de parallélogrammes de même baſe & de même hauteur, leſquels ſont égaux en ſurface, comme nous l'avons vu (575.)

THÉORÊME IV.

579. *La ſurface du Trapeze eſt égale au produit de ſa hauteur par la moitié de la ſomme de ſes baſes ſupérieure & inférieure* ( fig. 104 & 105.)

DÉMONST. Car le trapeze peut être conſidéré comme un triangle BOD tronqué, ou dont on a retranché le petit triangle COA : or ſi les élémens du triangle entier BOD ſont repréſentées par les termes de la progreſſion artihmétique

$$\dddot{-}0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10;$$

& ſi l'on ſuppoſe que les élémens du petir triangle COA ſont repréſentés par $\dddot{-}0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$, il s'enſuit qu'en retranchant le petit triangle COA du grand BOD, les élémens du trapeze ſeront repréſentés par le reſte des termes $6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$, dont le premier 6 repréſente la baſe ſupérieure, le dernier 10 repréſente la baſe inférieure, & le nombre exprime la hauteur du trapeze : or la ſomme des termes de cette progreſſion eſt égale, comme nous l'avons vu (217), à la ſomme des extrêmes multipliée par la moitié du nombre des termes ; ou, ce qui eſt le même, au nombre des termes multiplié par la moitié de la ſomme des extrêmes : donc, &c.

*Corollaire.*

580. La ſurface du trapeze eſt égale au produit de ſa hauteur par l'élément EF, qui tient le milieu arithmétique entre les baſes ſupérieure & inférieure (*fig.* 106.) Car la ſurface du trapeze eſt égale au produit de ſa hauteur par la moitié de la ſomme de

ſes baſes ſupérieure & inférieure : or l'élément du milieu eſt égal à la moitié de la ſomme des baſes ; car les élémens du trapeze, étant repréſentés par les termes de la progreſſion ∴ 6·7·8·9·10, la ſomme des baſes eſt 6+10=16, dont la moitié 8 repréſente l'élément du milieu.

## THÉORÊME V.

581. *La ſurface du Pentagone, de l'Exagone, de l'Eptagone, &c. en général d'un Polygone quelconque régulier, eſt égal au produit du rayon droit par la moitié du périmétre du Polygone* (fig. 97.)

DÉMONST. La ſurface du polygone régulier eſt égale à celle de tous les triangles que l'on peut y former, en tirant des rayons du centre aux angles du polygone. Or tous ces triangles ayant même hauteur & même baſe, à cauſe de la régularité du polygone, la ſomme de leurs ſurfaces eſt égale à celle d'un triangle unique qui auroit pour hauteur la hauteur commune de tous ces triangles, ſçavoir, le *rayon droit*, & pour baſe la ſomme des baſes de tous ces triangles, ſçavoir, le *périmétre* du polygone ; mais la ſurface de ce triangle unique eſt égale au produit de ſa hauteur par la moitié de ſa baſe : donc, &c.

### *Corollaire I.*

582. Donc deux polygones réguliers de même eſpéce, qui ont des périmétres & des rayons droits égaux, ſont égaux en ſurface.

### *Corollaire II.*

583. Mais ſi les polygones réguliers ont un égal périmétre & un nombre inégal de côtés, celui qui aura moins de côtés, aura moins de ſurface. Car la ſurface de chacun de ces polygones eſt égale au produit du rayon droit par la moitié du périmétre (581.) : donc le périmétre étant ſuppoſé égal dans

les polygones, la ſurface ſera d'autant plus petite, que le rayon droit ſera plus petit. Or, moins le polygone aura de côtés, plus ſon rayon droit ſera petit; *par ex :* le rayon droit du triangle ſera plus petit que celui du quarré d'un périmétre égal. Car s'il lui étoit égal, on pourroit circonſcrire (514.) ce triangle & ce quarré à un même cercle, & alors le périmétre du quarré, approchant plus de la circonférence du cercle, ſeroit plus petit (515.) que celui du triangle; ce qui eſt contre la ſuppoſition.

Ces figures qui ont un égal périmétre ſont appellées *Iſopérimétres.*

*Corollaire III.*

584. Si les figures *iſopérimétres* ont un même nombre de côtés; celles dont les côtés ſeront égaux, ou approcheront plus de l'égalité, auront plus de ſurface. En effet, le périmétre étant le même, ſuppoſons que la ſurface de chaque figure ſoit le produit de deux côtés, dont la ſomme ſoit 6: ſi l'on diviſe la ſomme 6,

I°. En parties égales 3 & 3, on aura pour la ſurface, le produit $3 \times 3 = 9$.

II°. Si l'on diviſe 6 en 2 & 4, on aura pour la ſurface, le produit $2 \times 4 = 8$, plus petit que 9.

III°. Si l'on diviſe 6 en 1 & 5, on aura le produit $1 \times 5 = 5$ plus petit que 8.

Donc plus les racines, ou les côtés approcheront de l'égalité, plus le produit ſera grand.

*Corollaire IV.*

585. C'eſt pourquoi le triangle *équilatéral* a plus de ſurface que le triangle *iſocele* iſopérimétre; & le triangle iſocele plus que le triangle *ſcalene* iſopérimétre. Pareillement le *quarré* a plus de ſurface que le *rectangle* iſopérimétre; & le rectagle plus que le *parallélogramme* iſopérimétre. Il faut dire la même choſe des autres figures.

## THÉORÊME VI.

586. *La ſurface du Cercle eſt égal au produit de ſon rayon par ſa demi-circonférence.*

DÉMONST. Le cercle n'étant qu'un polygone régulier d'une infinité de côtés, ſa ſurface eſt égale à celle d'une infinité de triangles, dont les ſommets ſeroient réunis au centre du cercle, & les baſes appuyées ſur les côtés infiniment petits du cercle, ou du polygone infinitaire. La ſurface de tous ces triangles eſt égale à la ſurface d'un triangle unique, qui auroit pour hauteur le rayon du cercle, & pour baſe une ligne égale à la circonférence du cercle: or la ſurface de ce triangle unique eſt égale au produit de ſa hauteur par la moitié de ſa baſe: donc, &c.

C'eſt pourquoi appellant la circonférence $c$, & le rayon $r$, l'expreſſion de la ſurface circulaire ſera $s = \frac{1}{2} rc$, ou $s = \frac{rc}{2}$.

### *Remarque I.*

587. Pour évaluer une ſurface plane, il faut donc multiplier l'un par l'autre deux élémens, ou deux lignes. Cette opération s'appelle multiplication *géométrique*, parce que les racines d'où réſultent le produit, ſont des lignes; de même que dans la multiplication *algébrique* les racines ſont des lettres, & dans la multiplication *numérique* les racines ſont des *chiffres*, ou *nombres*.

### *Remarque II.*

588. Lorſqu'on multiplie deux racines géométriques, ou deux lignes l'une par l'autre, pour avoir une ſurface:

1°. Si les deux lignes ſont inégales $a$, $b$, le produit qui en réſulte, eſt un *produit* plan, & donne un rectangle ABID, (*fig.* 100.), ou $s = ab$.

II°. Si les deux lignes que l'on multiplie, ſont égales $a$, $a$; ou, ce qui eſt le même, ſi on multiplie une ligne $a$ par elle-même, le produit qui en réſulte, eſt une *puiſſance*, & donne un quarré GACI (*fig.* 107.) & l'on a $s = aa = a^2$.

*Remarque III.*

589. Suppoſons que la ligne que l'on multiplie par elle-même, ou que l'on éleve au quarré, ſoit compoſée de deux parties, auquel cas la ligne ſera conſidérée comme un *binôme* géométrique: alors le quarré de cette ligne renfermera les mêmes portions que nous avons remarquées dans le binôme numérique, & dans le binôme algébrique: il en faut remarquer & le nombre & la qualité.

I°. Si la ligne AC (*fig.* 107.) eſt compoſée de deux parties AC & BC, ou eſt regardée comme étant un binôme géométrique, alors le quarré GACI de la ligne AB+BC, renfermera; 1°. le quarré de la premiere partie AB, ſavoir, ABED; 2°. le quarré de la ſeconde partie BC, ou de ſon égale EF, ſçavoir, HEFI; 3°. le double rectangle de l'une des parties par l'autre, ſçavoir, GDEH & BEFC.

II°. Si on repréſente ſous les expreſſions algébriques $a$ & $b$ les deux parties de la ligne AB + BC, la ligne ſera $a + b$, ce qui donne un binôme algébrique; & ſon quarré ſera $aa + 2ab + bb$, lequel renferme auſſi toutes les parties dont nous venons de parler ci-deſſus.

III°. Si l'on repréſente ſous les expreſſions numériques 3 & 4 les deux portions de la même ligne AB + BC, la ligne ſera $3 + 4 = 7$, ce qui donne un binôme numérique, & ſon quarré ſera 49, lequel renferme auſſi toutes les mêmes parties que ci-deſſus.

IV°. On voit par-là, que les puiſſances conſervent dans les parties qui les compoſent, les mêmes analogies dans le *numérique*, dans l'*algébrique*, & dans le *géométrique*.

## ARTICLE II.

### *De la Meſure des Surfaces.*

### THÉORÊME I.

590. *Un Polygone, d'un nombre quelconque de côtés, peut être réduit en un Polygone de même ſurface, & qui ait un côté de moins* (fig. 108.)

DÉM. Dans l'exagone ABCEFG, tirez la ligne BE, qui retranche le triangle BCE, & menez la ligne DC parallele à BE; cela poſé, ſi vous menez la ligne BD, vous aurez le pentagone AGFDB, qui ſera égal en ſurface à l'exagone. Car la ſurface AGFEB eſt commune au pentagone & à l'exagone. Reſte donc à prouver que le triangle EBD, reſte du pentagone, eſt égal au triangle BCE, reſte de l'exagone: or ces deux triangles ſont égaux, parce qu'ils ont même baſe BE, & qu'ils ont même hauteur, puiſqu'ils ſont compris entre mêmes paralleles BE, CD: donc, &c.

### THÉORÊME II.

591. *Un Polygone quelconque peut être réduit en un triangle qui lui ſoit égal en ſurface.*

DÉMONST. Par le théorême précédent un polygone quelconque peut être réduit en un polygone de même ſurface, & qui ait un côté de moins: donc un exagone peut être réduit en un pentagone de même ſurface; un pentagone, en un quadrilatere; & un quadrilatere, en un triangle de même ſurface: donc, &c.

### THÉORÊME III.

592. *Un triangle peut toujours être réduit en un parallélogramme de même ſurface que lui* (fig. 109.)

DÉMONST. Le triangle BCE étant donné, l'on peut faire le parallélogramme BADE ſur la même baſe, & dont la hauteur ſoit la moitié de celle du

triangle : or le triangle (576.) eſt la moitié d'un parallélogramme de même baſe & de même hauteur, & par conſéquent eſt égal en ſurface à un parallélogramme de même baſe & d'une hauteur ſous-double : donc, &c.

## THÉORÊME IV.

593. *Un Parallélogramme quelconque peut être réduit en un rectangle de même ſurface que lui* (fig. 110.)

DÉMONST. Le parallélogramme BADE étant donné, ſi des deux angles en A & en B on abbaiſſe les perpendiculaires AF, DG ſur la baſe prolongée, s'il le faut, on aura un rectangle FADG de même baſe & de même hauteur que le parallélogramme, & par conſéquent égal (574.) en ſurface au parallélogramme.

## THÉORÊME V.

594. *Un rectangle quelconque peut être réduit en un quarré de même ſurface que lui* (fig. 111.)

DEMONST. Le rectangle GDAF étant donné, ſi l'on prend une ligne moyenne proportionnelle entre la hauteur DG & la baſe GF du rectangle, ſçavoir, la ligne FE, & qu'on l'éleve au quarré ; le quarré de cette moyenne proportionnelle ſera égal en ſurface au parallélogramme. Car appellant $a$ la hauteur, $b$ la baſe du parallélogramme, & $x$ la moyenne proportionnelle, on aura $a : x :: x : b$, ou $\dfrac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot} a : x : b$ : donc $xx = ab$.

### *Corollaire I.*

595. Donc toute ſurface rectiligne eſt réductible en un quarré : mais le quarré ne peut pas lui-même être réduit en une figure plus ſimple. C'eſt pourquoi le quarré eſt la meſure la plus ſimple qu'ayent trouvé les Géométres pour évaluer les ſurfaces, & c'eſt pour cette raiſon qu'on évalue les ſurfaces planes en *toiſes*, ou *pieds*, ou *pouces* quarrés ; *par ex :*

*ex* : ſi l'on multiplie une hauteur de 3 pouces par une baſe de 4 pouces, la ſurface du parallélogramme qui en réſultera, eſt dite avoir $3 \times 4 = 12$ pouces quarrés, c'eſt-à-dire, qu'elle contiendra 12 parties égales, dont chacune aura un pouce de hauteur & un pouce de largeur ; d'où vient que *meſurer* & *quarrer*, *meſure* & *quadrature* ſont la même choſe.

*Corollaire II.*

596. C'eſt pourquoi toute ſurface rectiligne peut être meſurée géométriquement, parce que toute figure rectiligne eſt réductible en un quarré de même ſurface. Mais on ne peut pas meſurer géométriquement le cercle ; parce que le cercle ne peut pas être réduit en un quarré de même ſurface que lui.

*Remarque.*

597. On auroit la meſure, ou la quadrature du cercle, ſi on pouvoit meſurer géométriquement la circonférence du cercle, ou trouver une ligne droite égale à la circonférence du cercle. Car alors on pourroit réduire le cercle en un triangle qui auroit pour hauteur le rayon, & pour baſe une ligne égale à la circonférence du cercle (*fig.* 112.) ; ce triangle pourroit être réduit en un parallélogramme, & ce parallélogramme en un quarré.

On auroit trouvé la méthode de meſurer géométriquement la circonférence du cercle, ſi l'on connoiſſoit le rapport de la circonférence au diamétre ; parce que le diamétre étant une ligne droite que l'on peut par conſéquent meſurer, la circonférence qui auroit un rapport connu avec le diamétre, auroit dès-lors une meſure commune avec lui, & ſeroit par conſéquent meſurable : mais le rapport entre la circonférence & le diamétre du cercle eſt inconnu. Archiméde a prouvé que ce rapport étoit plus grand que celui de 21 : 7, & qu'il étoit plus

petit que celui de 22 : 7. Depuis Archiméde, Métius a prouvé que ce rapport étoit un peu plus petit que celui de 355 : 113 ; & ce rapport eſt un des plus exacts que l'on puiſſe employer dans la pratique. Pour plus grande commodité nous nous ſervirons du rapport de 22 à 7, lequel eſt ſuffiſant dans l'uſage & la pratique, qui n'exige point une ſi grande préciſion.

## ARTICLE III.

### *Du Rapport des Surfaces.*

I°. Les ſurfaces, de même que les lignes, ont un rapport entr'elles ; il y a cette différence, que le rapport, ou la raiſon qui eſt entre les lignes, eſt ſimple, parce qu'elles n'ont qu'une dimenſion ; au lieu que le rapport des ſurfaces eſt compoſé, parce qu'elles réſultent du produit de deux dimenſions.

II°. Le rapport des ſurfaces eſt, ou un rapport ſimplement compoſé, ou un rapport doublé ; il eſt ſimplement compoſé, lorſque les ſurfaces ne ſont point ſemblables ; il eſt rapport doublé, lorſqu'elles ſont ſemblables. Nous allons parler, 1°. du rapport des ſurfaces ; 2°. des conſéquences qui réſultent du rapport des ſurfaces.

## PARAGRAPHE I.

### *Du Rapport des Surfaces.*

### THÉORÊME I.

598. *Les Parallélogrammes ſont entr'eux en raiſon compoſée de la raiſon de leurs baſes & de celle de leurs hauteurs.*

DÉMONST. Chaque parallélogramme eſt égal au produit de ſa baſe par ſa hauteur (569.) : donc les parallélogrammes ſont entr'eux comme les produits de leurs baſes par leurs hauteurs ; or les produits (206.) ſont en raiſon compoſée des raiſons de leurs racines, qui ſont ici la baſe & la hauteur de chaque parallélogramme : donc, &c.

Si l'on appelle les parallélogrammes P, $p$, les hauteurs A, $a$, les baſes, B, $b$, on aura, comme nous l'avons prouvé (569.), P = AB, & $p = ab$: donc P : $p$ :: AB : $ab$, où, ce qui revient au même, $\frac{P}{p} = \frac{AB}{ab}$: or on aura évidemment

$$\frac{P}{p} = \frac{AB}{ab} = \frac{A \times B}{a \times b} = \frac{A}{a} \times \frac{B}{b};$$

où l'on voit que la raiſon $\frac{AB}{ab}$ qui eſt celle des parallélogrammes P, $p$, eſt compoſée des raiſons $\frac{A}{a}$; & $\frac{B}{b}$, qui ſont celles de leurs hauteurs & de leurs baſes.

*Corollaire I.*

599. Les triangles ſont en raiſon compoſée de celles de leurs baſes & de leurs hauteurs; car ils ſont les moitiés (576.) de parallélogrammes de même baſe & de même hauteur qu'eux; or les moitiés ſont en même raiſon que les tous: donc, &c.

*Corollaire II.*

600. Les polygones réguliers ſont entr'eux en raiſon compoſée de celle de leurs rayons droits, & de celle de leurs périmétres; car chaque polygone régulier eſt égal au produit de ſon rayon droit par ſon demi-périmétre (581.): donc deux polygones réguliers ſont entr'eux comme les produits de leurs rayons droits par leurs périmétres; or les produits ſont en raiſon compoſée de celles de leurs racines: donc, &c.

*Corollaire III.*

601. Deux cercles ſont en raiſon compoſée de leurs rayons & de leurs circonférences, ce qui ſe prouve de la même maniere que pour les parallélogrammes, les triangles, & les polygones.

*Corollaire IV.*

602. En général deux ſurfaces ſont toujours entr'elles en raiſon compoſée de celles de leurs *dimenſions*, de la multiplication deſquelles elles réſultent.

Ces dimenſions, de la multiplication deſquelles réſultent les ſurfaces, s'appellent *racines*, *produiſans*, *dimenſions homologues* des ſurfaces.

*Corollaire V.*

603. Si les ſurfaces ont une *racine* commune, ou une *dimenſion* qui ſoit égale de part & d'autre, elles ſeront entr'elles comme leurs dimenſions inégales, c'eſt-à-dire,

I°. Si deux parallélogrammes ont même hauteur, ils ſeront entr'eux comme leurs baſes; car on a P : *p* :: AB : *ab*; or par l'hypothèſe A = *a*, donc en ſubſtituant l'unité à la place de A & *a*, on aura P : *p* :: B : *b*.

II°. S'ils ont même baſe, ils ſont entr'eux comme leurs hauteurs; car P : *p* :: AB : *ab*; or, par l'hypothèſe, B = *b*: donc on aura P : *p* :: A : *a*.

*Corollaire VI.*

604. Si les dimenſions d'une ſurface ſont réciproques aux dimenſions homologues d'une autre ſurface, les deux ſurfaces ſeront égales; *par ex*: ſi la hauteur & la baſe d'un parallélogramme ſont réciproques à la hauteur & à la baſe d'un autre parallélogramme, les deux parallélogrammes ſeront égaux; car par l'hypothèſe A : *a* :: *b* : B: donc on aura AB = *ab*; or P : *p* :: AB : *ab*: donc on aura P = *p*.

THÉORÊME II.

605. *Deux Parallélogrammes ſemblables ſont en raiſon doublée de la raiſon de leurs baſes & de celle de leurs hauteurs.*

Démonst. Les parallélogrammes ſont en raiſon compoſée de celles de leurs baſes & de leurs hauteurs : donc ſi la raiſon des baſes eſt égale à celle des hauteurs, cette raiſon compoſée deviendra doublée ; or quand les parallélogrammes ſont ſemblables, la raiſon des baſes eſt égale à celle des hauteurs ; car, dans les parallélogrammes ſemblables, les baſes ſont proportionnelles aux hauteurs, ou A : *a* :: B : *b* : donc, &c.

*Corollaire I.*

606. Les parallélogrammes ſemblables ſont entr'eux comme les quarrés de leurs hauteurs, ou comme les quarrés de leurs baſes, ou en général comme les quarrés de leurs côtés homologues, c'eſt-à-dire, que l'on aura P : *p* :: AA : *aa*, ou bien P : *p* :: BB : *bb*. Car ils ſont entr'eux en raiſon doublée de la raiſon de leurs baſes & de celle de leurs hauteurs : or une raiſon doublée eſt égale (206.) à celle qu'ont entr'eux les quarrés des termes de l'une ou de l'autre raiſon compoſante : donc, &c.

C'eſt pourquoi, lorſque les parallélogrammes ſont ſemblables, on a toujours la proportionnalité

P : *p* :: AB : *ab* :: AA : *aa* :: BB : *b*.

*Corollaire II.*

607. Les triangles ſemblables ſont en raiſon doublée de celles de leurs baſes & de leurs hauteurs : ils ſont auſſi entr'eux comme les quarrés de leurs baſes, ou comme les quarrés de leurs hauteurs ; ou en général comme les quarrés de leurs côtés homologues. Car les triangles ſemblables ſont les moitiés de parallélogrammes ſemblables : or les moitiés, & en général les parties ſemblables, ſont entr'elles comme les tous : donc, &c.

Théorême III.

608. *Les Polygones réguliers ſemblables ſont entre eux en raiſon doublée de celle de leurs périmétres, ou circonférences, & de celle de leurs rayons droits.*

Démonst. Les polygones réguliers ſont entre eux (600.) en raiſon compoſée de leurs périmétres & de leurs rayons droits ; or, quand les polygones réguliers ſont ſemblables, cette raiſon compoſée devient doublée ; car, dans les figures ſemblables, les dimenſions homologues ſont proportionnelles : donc, &c.

*Corollaire I.*

609. Les polygones réguliers ſemblables, 1°. ſont entr'eux comme les quarrés de leurs périmétres, ou comme les quarrés de leurs rayons droits, ou comme les quarrés de leurs rayons obliques ; 2°. ſont entr'eux comme les quarrés de leurs côtés homologues ; 3°. en général les polygones réguliers ſemblables ſont entr'eux comme les quarrés des lignes ſemblablement tirées dans les polygones.

*Corollaire II.*

610. Les ſurfaces des cercles ſont entr'elles comme les quarrés de leurs diamétres, ou comme les quarrés de leurs rayons : car les cercles ſont des polygones infinitaires ſemblables, auxquels convient tout ce que nous venons de dire des polygones finis.

*Corollaire III.*

611. En général toutes les ſurfaces ſemblables ſont entr'elles, non-ſeulement comme les quarrés faits ſur les côtés homologues, mais auſſi comme les figures quelconques ſemblables conſtruites ſur les côtés homologues, ou ſur des lignes quelconques ſemblablement tirées dans les ſurfaces ſemblables : car les figures ſemblables quelconques, conſtruites ſur les côtés homologues, ſont entr'elles comme les quarrés faits ſur ces mêmes côtés homologues.

*Corollaire IV.*

612. Réciproquement les quarrés des côtés homologues, ou en général les figures quelconques

ſemblables, conſtruites ſur les côtés homologues, ſont entr'elles comme les ſurfaces ſemblables auxquelles appartiennent ces côtés homologues. Car c'eſt une même choſe de dire que les ſurfaces ſemblables ſont comme les quarrés des côtés homologues, ou que les quarrés des côtés homologues ſont entr'eux, comme les ſurfaces ſemblables elles-mêmes.

## PARAGRAPHE II.

### *Des Conſéquences qui réſultent du Rapport des Surfaces.*

### THÉORÊME I.

613. *Le Triangle équilatéral circonſcrit au cercle eſt quadruple du Triangle équilatéral inſcrit au même cercle* (fig. 113.)

DÉMONST. Les ſurfaces de ces triangles ſont (609.) entr'elles comme les quarrés de leurs rayons droits; or les rayons droits de ces triangles ſont comme 1 & 2, parce que CA ou ſon égal CE eſt double de CB; donc les ſurfaces ſont comme 1 & 4.

### THÉORÊME II.

614. *Dans un Triangle rectangle le Quarré fait ſur l'hypothénuſe eſt égal à la ſomme des Quarrés faits ſur les deux autres côtés* (fig. 114.)

DÉMONST. Ayant abbaiſſé la perpendiculaire GO du ſommet de l'angle droit, on a trois triangles AGB, AGO, OGB, rectangles & ſemblables, comme nous l'avons prouvé (544.), & qui ont pour hypothénuſes les trois côtés du grand triangle. Or les quarrés faits ſur les trois hypothénuſes ſont entr'eux comme les trois triangles ſemblables (612.); mais le grand triangle AGB eſt égal à la ſomme des deux autres AGO + OGB : donc le quarré fait ſur l'hypothénuſe AB du grand triangle eſt égal à

la ſomme des quarrés faits ſur les deux autres hypothénuſes AG & GB, leſquelles ſont côtés du triangle rectangle AGB : donc, &c.

*Corollaire I.*

615. Si l'on nomme $a$ l'hypothénuſe AB, $b$ le côté AG, $c$ le côté GB, l'expreſſion du quarré fait ſur l'hypothénuſe ſera $aa = bb + cc$ : celle de l'hypothénuſe AB ſera $a = \sqrt{bb+cc}$ ; celle du côté GB ſera $c = \sqrt{aa-bb}$, & celle du côté AG ſera $b = \sqrt{aa-cc}$.

*Corollaire II.*

616. Lorſque dans les expreſſions $a = \sqrt{bb+cc}$, $c = \sqrt{aa-bb}$, $b = \sqrt{aa-cc}$, la ſomme ou la différence des quarrés, qui eſt ſous le ſigne radical, ſera un quarré parfait ; on pourra toujours, dans un triangle rectangle dont on connoît déjà deux côtés, connoître le troiſiéme, *par ex :* ſuppoſant que les deux côtés connus ſont 3 & 4, leurs quarrés ſeront 9 & 16, dont la ſomme 25 ſera le quarré de l'hypothénuſe, & la racine 5 ſera l'hypothénuſe elle-même.

*Corollaire III.*

617. Mais lorſque dans les expreſſions $a = \sqrt{bb+cc}$, &c. la ſomme ou la différence des quarrés qui eſt ſous le ſigne radical, n'eſt pas un quarré parfait ; alors, connoiſſant deux côtés dans le triangle rectangle, on ne pourra pas pour cela connoître le troiſiéme ; *par ex :* ſuppoſant que les deux côtés connus ſont 2 & 3, en ajouant leurs quarrés 4 & 9, on aura 13 pour le quarré de l'hypothénuſe : or le nombre 13 n'étant un point quarré parfait, n'a point de racine quarrée ; l'hypothénuſe ne peut donc être exprimée numériquement, ou par un nombre ; mais ſeulement par $\sqrt{13}$.

*Corollaire IV.*

618. Ces expreſſions $\sqrt{13}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, & autres

ſemblables, ſont ce qu'on appelle quantités *incommenſurables*, quantités *irrationnelles*, *racines ſourdes*, parce qu'elles ne peuvent être exprimées par aucun nombre poſſible : ces quantités $\sqrt{13}$, $\sqrt{3}$, &c. expriment donc toujours en Géométrie le côté d'un triangle rectangle, qui eſt incommenſurable avec les deux autres.

*Corollaire V.*

619. Si dans un cercle on mene aux extrêmités du diamétre deux cordes qui faſſent avec le diamétre un triangle rectangle (*fig.* 118.), connoiſſant le diamétre & une des cordes, il ſera aiſé, par l'application du théorême précédent, de déterminer la valeur préciſe de l'autre corde, lorſqu'elle ſera commenſurable avec le diamétre ; ou ſa valeur approchée, lorſqu'elle ſera incommenſurable avec le diamétre. C'eſt par ce moyen que les Géométres déterminent la valeur de toutes les cordes du cercle, depuis celle qui ſoutient l'arc d'un degré, juſqu'à celle qui ſoutient l'arc de 90 degrés.

*Corollaire VI.*

620. La diagonale du quarré eſt incommenſurable avec le côté. Car la diagonale du quarré eſt toujours l'hypothénuſe d'un triangle rectangle CAD (*figures* 115.) : donc on a $\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2$ ; mais le triangle CAD étant iſocele, on a CD = AC, & par conſéquent $\overline{CD}^2 = \overline{AC}^2$ : donc on aura $\overline{AD}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{CD}^2 = 2\overline{CD}^2$ : or la quantité $2\overline{CD}^2$ n'eſt pas un quarré parfait : s'il l'étoit, on pourroit trouver la valeur de $\sqrt{2\overline{CD}^2}$, ce qui eſt impoſſible, à cauſe du nombre 2 qui n'a point de racine quarrée ; car $\sqrt{2}$ n'eſt pas commenſurable : donc la diagonale, &c.

*Corollaire VII.*

621. La diagonale & le côté du quarré ſont incommenſurables dans leur premiere puiſſance ; mais

leurs quarrés ſont commenſurables : leurs cubes ou troiſiémes puiſſances ſont incommenſurables ; mais leurs quarrés-quarrés, ou quatriémes puiſſances, ſont commenſurables. Car la diagonale étant exprimée par $\sqrt{2}$, ſon quarré $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ eſt commenſurable ; ſa troiſiéme puiſſance $2\sqrt{2}$ eſt incommenſurable ; ſa quatriéme puiſſance $2 \times 2 = 4$ eſt commenſurable ; ſa cinquiéme puiſſance $4 \times \sqrt{2}$ eſt incommenſurable.

De ſorte qu'on peut dire en général qu'une racine quarrée étant incommenſurable, toutes ſes puiſſances paires ſont commenſurables ; mais que ſes puiſſances impaires ſont toutes incommenſurables.

## THÉORÊME III.

622. *Une Figure quelconque, faite ſur l'hypothénuſe, eſt égale à la ſomme des Figures ſemblables conſtruites ſur les côtés.*

DEMONST. Cela ſuit évidemment du théorême précédent ; car ces figures étant ſemblables, ſont entr'elles (611.) comme les quarrés faits ſur leurs côtés homologues, leſquels côtés homologues ſont les côtés du triangle rectangle : or le quarré, conſtruit ſur l'hypothénuſe eſt égal à la ſomme des quarrés conſtruits ſur les autres côtés : donc, &c.

### *Corollaire I.*

623. Si l'on conſtruit ſur les côtés d'un triangle rectangle des demi-cercles, qui ayent pour diamétres les côtés du triangle rectangle, le demi-cercle fait ſur l'hypothénuſe, ſera égal aux deux autres demi-cercles conſtruits ſur les côtés (*fig.* 116.) Car ces demi-cercles ſont entr'eux comme les quarrés de leurs diamétres (610.), & par conſéquent comme les quarrés faits ſur les côtés du triangle rectangle : or le quarré fait ſur l'hypothénuſe (614.) eſt égal, &c. donc, &c.

*Corollaire II.*

624. Si ſur les côtés d'un triangle rectangle & iſocele on conſtruit des demi-cercles, comme on voit (*figure* 117.), & que du ſommet de l'angle droit on abaiſſe une perpendiculaire, les deux lunules AODGA, AEBFA terminées par les demi-circonférences, ſeront chacune égales aux triangles correſpondans CAD, CAB.

Car le demi-cercle BEAOD conſtruit ſur l'hypothénuſe BD eſt égal à la ſomme des demi-cercles conſtruits ſur les côtés AB, AD: or ces deux demi-cercles, conſtruits ſur les côtés, ſont égaux entr'eux, parce que leurs diamétres AB, AD ſont ſuppoſés égaux: donc chacun de ces petits demi-cercles eſt égal à la moitié du grand demi-cercle BEAOD: donc on aura DAGD = CAOD, & retranchant la portion commune DAOD, on aura la lunule DOAGD = GAD, triangle correſpondant à la lunule.

Ces lunules s'appellent les *Lunules d'Hypocrate*, parce que c'eſt lui qui le premier ait évalué la ſurface de ces lunules, en découvrant qu'elles étoient égales chacune à un triangle.

## THÉORÊME IV.

625. *Deux Surfaces ſemblables, dont les dimenſions homologues ſont commenſurables, pourront toujours être repréſentées par des nombres quarrés.*

DÉMONST. Les ſurfaces ſemblables ſont entr'elles comme les quarrés de leurs dimenſions homologues: or ces dimenſions homologues étant ſuppoſées commenſurables, leurs quarrés ſont toujours repréſentés par des nombres quarrés. Car ſi les dimenſions homologues ſont comme 1 & 2, les quarrés de ces dimenſions ſeront comme 1 & 4; ſi les dimenſions homologues ſont comme 1 & 3, les quarrés ſeront comme 1 & 9: donc, &c.

Et par conſéquent les dimenſions homologues des

ſurfaces ſemblables ſont toujours entr'elles comme les racines de deux quarrés.

### Théorême V.

626. *Une Racine quarrée eſt toujours moyenne proportionnelle entre l'unité & le quarré.*

Démonst. Le quarré eſt en raiſon doublée de ſa racine (206.) : donc il eſt toujours repréſenté par le troiſiéme terme d'une progreſſion géométrique quelconque $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$ 1 · 2 · 4 · 8, ou $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$ 1 · 3 · 9 · 27, ou, &c. Car nous avons prouvé (242) que dans une progreſſion géométrique, le premier & le troiſiéme terme ſont en raiſon doublée des deux premiers : or, dans toute progreſſion géométrique, le premier terme étant l'unité, le ſecond eſt la racine, & le troiſiéme eſt le quarré ; mais de plus le ſecond terme eſt moyen proportionnel entre le premier & le troiſiéme : donc, &c.

*Corollaire.*

627. Par conſéquent lorſqu'un quarré eſt donné, pour en trouver la racine, il n'y a qu'à chercher une moyenne proportionnelle entre l'unité & le quarré donné.

### Théorême VI.

628. *Un Quarré double d'un autre Quarré donné eſt une quantité impoſſible arithmétiquement.*

Démonst. Suppoſons que le quarré donné ſoit $a^2$ : le quarré qui en ſeroit double ſera $2a^2$ ; donc pour conſtruire le quarré $2a^2$, il faudroit trouver une moyenne proportionnelle entre 1 & $2a^2$, ou, ce qui revient au même, il faudroit trouver la racine quarrée de $2a^2$ : or cette racine ne peut être autre que la quantité $\sqrt{2a^2}$, ou $a\sqrt{2}$, laquelle n'eſt pas commenſurable, comme il eſt évident : donc, &c.

C'eſt pourquoi, ſi l'on propoſoit de faire un quarré

double d'un autre quarré donné, le problême ſera irréſoluble arithmétiquement.

## THÉORÊME VII.

629. *Un Quarré double d'un autre Quarré donné eſt poſſible géométriquement.*

DÉMONST. I°. Faiſant un triangle rectangle iſocele, dont un côté ſoit le côté du quarré donné, il arrivera que le quarré conſtruit ſur l'hypothénuſe de ce triangle, ſera double du quarré donné.

II°. Faiſant la ligne AB (*fig.* 87.) de deux pieds, ou de deux pouces, ou de, &c., & le prolongement BC d'un pied, ou d'un pouce; la ligne BD élevée perpendiculairement du point B de réunion, juſqu'à la rencontre de la circonférence qui paſſeroit par les extrêmités A, C, ſera moyenne proportionnelle entre AB & BC, & le quarré conſtruit ſur cette moyenne proportionnelle, ſera le quarré double cherché.

III°. Si l'on inſcrit le quarré donné dans un cercle, & qu'à ce cercle on circonſcrive un autre quarré, le quarré circonſcrit ſera double du quarré inſcrit (*fig.* 119.). Car le quarré fait ſur la diagonale, ou l'hypothénuſe OE, eſt double du quarré fait ſur le côté OF, puiſque le triangle OEF eſt rectangle & iſocele: or le quarré circonſcrit eſt égal au quarré fait ſur la diagonale OE, puiſque BD = IM = OE, & le quarré inſcrit eſt le même que le quarré conſtruit ſur le côté OF: donc, &c.

Il ſuit donc, qu'une racine quarrée qui eſt incommenſurable arithmétiquement, ou qui ne peut être repréſentée par aucun nombre poſſible, eſt toujours commenſurable géométriquement, c'eſt-à-dire, peut être repréſentée par une ligne. Ainſi le problême de la duplication du quarré, qui eſt irréſoluble arithmétiquement, peut toujours être réſolu géométriquement, & même par la ſeule Géo-

métrie ſimple ; ſçavoir, en ne ſe ſervant que de la regle & du compas.

*Corollaire.*

630. Un nombre triple, quintuple, ſextuple, &c. d'un nombre quarré, n'eſt pas un quarré parfait; mais un nombre quadruple d'un nombre quarré eſt un quarré parfait. En un mot, un nombre quarré, multiplié par un nombre non quarré, n'eſt pas un quarré parfait : mais un nombre quarré, multiplié par un nombre quarré, eſt toujours un quarré parfait.

## CHAPITRE II.

*Des Surfaces conſidérées comme Plans.*

I°. LA ſurface conſidérée comme plan, eſt celle dont tous les points ſont ſemblablement poſés entre ſes extrêmités, c'eſt-à-dire, qui ne ſont pas plus élevés les uns que les autres. Ainſi l'on dit que deux figures ſont dans un même plan, lorſqu'elles ſont ſemblablement poſées, ou que le plan ſur lequel une figure eſt couchée, eſt le même que celui ſur lequel l'autre figure eſt poſée.

II°. On peut auſſi définir le plan, une ſurface telle qu'une ligne droite qui lui eſt appliquée en tout ſens, convienne avec elle.

III°. La formation, les poſitions reſpectives & les aſſortimens que nous avons démontrés pour les lignes droites, ont auſſi lieu pour les plans. La formation des plans détermine leur nature & leur différence avec les lignes droites, ce qui donne leur *notion*. La poſition reſpective des plans donne la maniere d'être d'un plan par rapport à un autre plan,

d'où naît leur *ſection*. L'aſſortiment des plans conſiſte dans la rencontre, & dans la réunion de pluſieurs plans par leurs angles, d'où réſultent les angles que l'on appelle *ſolides*. Nous parlerons, 1°. de la notion des plans; 2°. de la ſection des plans; 3°. de l'aſſortiment des plans.

## ARTICLE I.

### *Notion des Plans.*

#### *Axiôme I.*

631. On peut concevoir un plan prolongé de tout côté, autant que l'on voudra, mais toujours dans la même poſition.

#### *Axiôme II.*

632. Un plan eſt la plus petite ſurface que l'on puiſſe concevoir entre ſes extrêmités : ainſi la ſurface plane eſt plus petite que la ſurface courbe, compriſe entre les mêmes extrêmités.

#### *Axiôme III.*

633. La rencontre, ou commune ſection d'une ligne avec un plan eſt un *point* ; celle d'un plan avec un plan eſt une *ligne* ; celle d'un plan avec un ſolide eſt une *ſurface*.

#### *Axiôme IV.*

634. Si deux points d'une droite ſont ſur un plan, la droite y eſt toute entiere : car ſi elle n'y étoit pas toute entiere, elle ne conviendroit point avec ce plan, & par conſéquent ce plan ne ſeroit plus un plan.

### *HYPOTHESE.*

635. Si vous concevez que le triangle rectangle ACB (*fig.* 120.) tourne autour du côté AC, pris comme axe, la baſe CB dans la révolution décrira un plan GFEBK, &c. auquel ſera perpendiculaire la ligne AC.

## Théorême I.

636. *Pour déterminer la position d'un Plan, il faut trois points qui ne soient pas en ligne droite.*

Démonst. Pour déterminer la position d'un plan décrit par la base CB du triangle ACB, il faut que cette base CB ait commencé à se mouvoir, & que son extrêmité B ait passé au point K; ce qui ne peut se faire sans que vous ayez trois points C, B, K, lesquels ne sont point en ligne droite.

### *Corollaire I.*

637. Un triangle détermine toujours la position d'un plan: car cette position est toujours déterminée par trois points, lesquels étant joints par trois droites donnent un triangle.

### *Corollaire II.*

638. Deux plans qui ont trois points communs & non posés en ligne droite, conviennent parfaitement: parce qu'ils ont la même position, laquelle ne dépend que de trois points.

## Théorême II.

639. *Une Ligne* AC *perpendiculaire à un Plan, est aussi perpendiculaire à toutes les droites menées sur ce plan, & qui passent par le point, ou le pied* C *de la perpendiculaire* (fig. 120.)

Démonst. Les lignes CK, CI, CH, &c. menées sur le plan par le pied C de de la perpendiculaire, ne sont autre chose que les traces que laisse la ligne CB, lorsque dans la révolution du triangle rectangle ACB elle décrit le plan: or cette ligne CB pendant la révolution reste toujours perpendiculaire à la ligne CA: donc, &c.

### *Corollaire I.*

640. Tous les points de la perpendiculaire AC (*fig.* 120.) sont également éloignés chacun de tous les

les points de la circonférence BKIH, &c. décrite par l'extrêmité B de la ligne CB, comme il eſt évident. Donc ſi du point C, qui eſt celui où la ligne AC tombe ſur le plan, on décrit (*fig.* 121.) une circonférence de cercle, il arrivera ;

I°. Qu'une ligne AC ſera perpendiculaire ſur le plan, toutes les fois que ſon extrêmité A ſera également éloignée de tous les points de la circonférence décrite.

II°. Qu'une ligne CM ſera oblique ſur le plan, lorſque ſon extrêmité M ne ſera pas également éloignée de tous les points de la circonférence décrite.

III°. Qu'une ligne CM oblique ſur un plan, pourra cependant être perpendiculaire ſur une ligne telle que FI, menée ſur le plan par le point C, pourvu que ſon extrêmité M ſoit également éloignée des deux extrêmités F & I.

*Corollaire II.*

641. Lorſqu'une ligne CM (*fig.* 121.) eſt oblique ſur un plan, ſon obliquité eſt eſtimée par la plus grande inclinaiſon qu'elle puiſſe avoir ſur l'un des rayons du cercle décrit du point C comme centre. Or

I°. Cette obliquité ſe trouve, en menant du point M une perpendiculaire MB ſur le plan, & en menant le rayon CB qui joigne les points C & B ; car ce rayon ſera la ligne ſur laquelle MC aura le plus d'inclinaiſon.

II°. Lorſqu'une ligne eſt oblique par rapport à une autre ligne, cette ligne CB s'appelle *éloignement de perpendicule* ; mais lorſque l'on conſidere l'obliquité d'une ligne par rapport à un plan, cette ligne CB s'appelle *projection de l'oblique.*

THÉORÊME III.

642. *D'un même point C pris dans un Plan, on ne peut élever qu'une ſeule perpendiculaire, & d'un même*

*point* A *pris hors du plan, on ne peut abbaiſſer qu'une ſeule perpendiculaire ſur le plan* (fig. 121.)

Demonst. I. Partie. Du point C donné, élevez la perpendiculaire CA, & décrivez la circonférence BKI, &c. l'extrêmité A ſera, comme nous l'avons vu (640.), également diſtante de tous les points de la circonférence décrite. Or ſi du même point C on pouvoit élever une ſeconde perpendiculaire, telle, *par ex:* que la ligne CM, ſon extrêmité M ſeroit également éloignée (640.) de tous les points de la circonférence BKI, &c. Donc le point M ſe confondroit avec le point A, & les deux lignes CM, CA ne feroient plus qu'une ſeule & même ligne.

Dém. II. Partie. D'un point A donné, abbaiſſez une perpendiculaire AC ſur le plan, & du point C pris comme centre, décrivez la circonférence BKI, &c. (*fig.* 120.) les extrêmités A & C de la perpendiculaire ſeront également éloignées (640.) chacune de tous les points de la circonférence décrite. Or ſi du point A on pouvoit abbaiſſer ſur le plan une ſeconde perpendiculaire telle que AB, le point B ſeroit (640.) également éloigné de tous les points de la circonférence BKI, &c. Donc le point B ſe confondroit avec le point C, & les deux lignes AC, AB ne feroient plus qu'une ſeule & même ligne.

### Théorême IV.

643. *Deux droites perpendiculaires à un même Plan, ſont paralleles entr'elles.*

Demonst. Si vous menez ſur le plan une ligne droite qui joigne les deux perpendiculaires, vous aurez deux lignes qui ſeront perpendiculaires à une troiſiéme, & par conſéquent paralleles entr'elles.

## ARTICLE II.

### *De la Section des Plans.*

I°. Un plan élevé ſur un plan, eſt dit être *perpen-*

*diculaire* ſur ce plan, lorſqu'il ne penche pas plus d'un côté que de l'autre.

II°. Un plan eſt oblique par rapport à un autre plan, lorſqu'il penche plus d'un côté que de l'autre.

III°. Deux plans ſont *paralleles*, lorſque dans tous leurs points correſpondans ils ſont à égale diſtance l'un de l'autre; ou, lorſqu'étant ſuppoſés prolongés à l'infini, ils ne ſe rencontreroient jamais.

## THÉORÊME I.

644. *Si un Plan coupe un autre Plan, leur commune ſection ſera une ligne droite.* (fig. 122.)

DÉMONST. Soient les deux plans AD, BC qui ſe coupent; les extrêmités de leur ſection, ſoient les points E & F; entre ces deux extrêmités menez une ligne droite ſur le plan AD, & une ligne droite ſur le plan BC, je dis que ces deux lignes ne ſeront qu'une ſeule & même ligne droite EF, commune aux deux plans: car d'un point à un autre point on ne peut mener qu'une ſeule droite (335.)

## THÉORÊME II.

645. *Lorſqu'un Plan eſt perpendiculaire à un autre Plan, la perpendiculaire abbaiſſée d'un point quelconque* C *du premier plan ſur le ſecond, tombera toujours ſur la commune ſection* AB *des deux Plans.* (fig. 123.)

DÉMONST. Si cette perpendiculaire tomboit ſur le point F hors de la ſection AB, du point C abbaiſſez CD perpendiculairement à la ſection (ce qui eſt toujours poſſible, puiſque le premier plan eſt perpendiculaire au ſecond): il y auroit donc deux perpendiculaires abbaiſſées d'un même point ſur un même plan, ce qui eſt impoſſible (642.)

### *Corollaire.*

646. Réciproquement ſi d'un point pris dans la ſection on éleve une perpendiculaire, cette perpen-

diculaire ſera dans le plan coupant. Car ſi elle étoit hors du plan coupant, de ce même point de la ſection on pourroit donc élever deux perpendiculaires, l'une hors du plan coupant par l'hypothèſe, & une autre dans le plan coupant ; ( celle-ci étant toujours poſſible, à cauſe de la perpendicularité du plan coupant ) & il y auroit par conſéquent deux perpendiculaires élevées d'un même point pris dans un plan, ce qui eſt impoſſible (642.)

## THÉORÊME III.

647. *Si le premier Plan eſt incliné ſur le ſecond, la perpendiculaire abbaiſſée d'un point quelconque du premier plan ſur le ſecond, tombera hors de la commune ſection.*

DÉMONST. Si cette perpendiculaire tomboit ſur un point de la ſection; par cette ſection faiſons paſſer un plan perpendiculaire, & de ce point élevons une perpendiculaire dans le plan perpendiculaire: il y auroit donc deux perpendiculaires élevées d'un même point pris dans un même plan, ce qui eſt impoſſible (642.)

### *Corollaire I.*

648 Si un plan eſt incliné ſur un autre plan, l'angle qu'ils forment par leur inclinaiſon, eſt meſuré par l'arc de cercle qui ſeroit décrit entre les deux plans, d'un point de la ſection pris comme centre, & dont les rayons ſeroient perpendiculaires à la ſection commune.

### *Corollaire II.*

649. Deux plans inclinés l'un ſur l'autre formeront des angles, auront des poſitions, en un mot auront les mêmes propriétés que deux lignes droites inclinées l'une ſur l'autre; c'eſt-à-dire, 1°. les deux angles formés de part & d'autre vaudront deux angles droits; 2°. les angles oppoſés au ſommet,

ou plutôt à la ſection, ſeront égaux ; 3°. ſi pluſieurs plans s'entrecoupent & ont une même ſection, tous les angles formés autour de la ſection commune, vaudront quatre angles droits.

*Corollaire III.*

650. Si deux plans paralleles ſont coupés par un troiſiéme plan, ſoit perpendiculaire, ſoit oblique, 1°. les angles correſpondans ſeront égaux ; 2°. les angles alternes internes ſeront égaux ; 3°. les angles alternes externes ſeront égaux ; 4°. les angles adjacens équivaudront à deux angles droits.

## THÉORÊME IV.

651. *La Section commune* AB *de deux plans perpendiculaires ſur un troiſiéme plan, eſt perpendiculaire à ce plan* (fig. 124.)

DÉMONST. Si du point B où les trois plans ſe rencontrent, on éleve une perpendiculaire, cette perpendiculaire ſera dans le plan EF (646.), parce qu'il eſt perpendiculaire ſur le troiſiéme plan ; elle ſera auſſi dans le plan GH, parce que ce plan eſt pareillement perpendiculaire au troiſiéme plan : donc cette perpendiculaire ſera dans les deux plans ; mais elle ne peut appartenir aux deux plans, ſans être dans leur commune ſection BA : donc, &c.

## THÉORÊME V.

652. *Lorſque deux Plans ſont paralleles, la ligne qui eſt perpendiculaire à l'un des plans, eſt auſſi perpendiculaire à l'autre.*

DÉMONST. Si elle n'étoit pas perpendiculaire au ſecond plan, ce ſecond plan ſeroit incliné ſur cette perpendiculaire, & par conſéquent pencheroit ſur le premier plan, & ne lui ſeroit pas parallele.

## THÉORÊME VI.

653. *Les Sections* AB, CD *de deux plans paralleles*

*coupés par un troiſiéme plan, ſont paralleles entr'elles* (fig. 125.)

Démonst. Si elles n'étoient point paralleles entr'elles, étant prolongées elles ſe rencontreroient, & par conſéquent les deux plans où elles ſont, ſe rencontreroient auſſi, ce qui eſt impoſſible, puiſqu'ils ſont paralleles.

## Théorême VII.

654. *Deux Lignes droites* AF, BG, *coupées par des Plans paralleles, ſont coupées proportionnellement* (fig. 126.)

Démonst. Menez la droite FB, & joignez les interſections, en menant les droites AB, CD, FG.

I°. Le plan du triangle ABF coupe les trois plans paralleles: donc les ſections AB, CE ſont paralleles (653.), & les parties AC, CF ſeront proportionnelles aux parties BE, EF (534.), & l'on aura

AC : CF :: BE : EF.

II°. Le plan du triangle GBF, ſoit qu'il ſoit le même, ſoit qu'il ſoit autre que le plan du triangle ABF, coupe les trois plans paralleles, & par conſéquent les ſections ED, FG ſeront paralleles: donc les parties BD, DG ſeront proportionnelles à BE, EF, ou BE : EF :: BD, DG.

III°. Par conſéquent on aura la proportionnalité

AC : CF :: BE : EF :: BD : DG :

donc on aura AC : CF :: BD : DG.

## Théorême VIII.

655. *Si un Plan coupe un Solide, la Section faite dans ce Solide ſera elle-même un plan.*

Démonst. Cette ſection ſera une ſurface (633.) or cette ſurface ſera la plus petite qui puiſſe être compriſe entre les extrêmités de la ſection: donc elle ſera une ſurface plane, ou un plan.

*Corollaire I.*

656. Cette ſection repréſentera différentes figures planes, ſelon que le ſolide qui ſera coupé par le plan, ſera de différente eſpéce ; ou que la ſection aura été faite dans différente direction.

*Corollaire I I.*

657. Si deux, ou pluſieurs plans coupent un même ſolide, ils donneront des ſections qui ſeront autant de plans, auxquels conviendra tout ce que nous avons démontré ci-deſſus par rapport à la ſection des plans. Ces différentes ſections ont des propriétés remarquables, & qui ſervent de principes à beaucoup de vérités concernant la coupe des pierres, la Gnomonique, le traité de la Sphere, l'Aſtronomie, &c.

## ARTICLE III.

### *De l'Aſſortiment des Plans pour former les Angles ſolides.*

I°. Lorſque les plans ſe rencontrent, ſoit perpendiculairement, ſoit obliquement, ils font une *ſection* : lorſqu'ils ſe joignent par leurs angles, & que la ſomme de ces angles eſt de quatre angles droits, ils forment un *plan continu* : lorſqu'ils ſe joignent par leurs angles, & que la ſomme de ces angles eſt moindre que quatre angles droits, alors ils forment un *angle ſolide*.

II°. On appelle *angle ſolide* un eſpace terminé par pluſieurs angles *plans*, qui ont un ſommet commun ; telle eſt la pointe d'une pyramide. L'angle ſolide eſt par rapport au ſolide, ce que l'angle plan eſt par rapport à la ſurface : il y a cette différence que pour former un angle plan, deux lignes ſuffiſent ; mais pour former un angle ſolide, il faut au moins trois angles plans qui ayent un ſommet commun ; car deux plans ne peuvent renfermer un eſpace.

## THÉORÊME I.

658. *Lorſqu'un Angle ſolide* A (fig. 127.) *eſt formé par trois Angles plans* DAC, DAB, BAC, *deux de ces Angles, quels qu'ils ſoient, ſont plus grands que le troiſiéme.*

DÉMONST. L'angle plan BAC eſt plus petit que la ſomme des angles plans BAD + DAC; car entre les extrêmités AB, AC, aucune ſurface n'eſt plus petite que le plan BAC (632.): donc le plan BAC eſt plus petit que le plan anguleux BAD + DAC; de même qu'une ligne droite eſt plus courte que la ligne anguleuſe compriſe entre les mêmes points.

## THÉORÊME II.

659. *Tous les Angles plans, qui peuvent former un Angle ſolide, pris enſemble, ſont plus petits que quatre angles droits* (fig. 128.)

DÉMONST. Soit une pyramide pentagonale dont la baſe BFEDC ſoit diviſée en cinq triangles, dont les ſommets ſe réuniſſent au point G. Cela poſé, la ſurface convexe de la pyramide eſt compoſée de cinq triangles, dans chacun deſquels la ſomme des angles vaut 180 degrés: pareillement la baſe de la pyramide eſt compoſée de cinq triangles, dans chacun deſquels la ſomme des angles vaut 180 degrés; donc la ſomme des angles des cinq premiers triangles eſt égal à la ſomme des angles des cinq derniers triangles. Mais les angles ſur les baſes des cinq premiers triangles, qui ſont les faces triangulaires, ſont plus grands que les angles ſur la baſe des cinq autres triangles; ou que les angles à la circonférence du pentagone. Car par la propoſition précédente, à cauſe de l'angle ſolide, *par ex:* C, on aura les angles ACB + ACD plus grands que BCD: donc les angles au ſommet A de la pyramide ſont moindres que les angles formés autour du point

G du pentagone ; or les angles autour du point G valent quatre angles droits : donc la ſomme des angles formés autour du ſommet A, vaut moins que quatre angles droits.

On peut s'aſſurer d'une autre maniere de la vérité de ce théorême, en concevant que les côtés de la baſe pentagonale reſtant les mêmes, le point G s'éleve au-deſſus du plan du pentagone, ce qui ne ſe peut faire ſans que les lignes BG, CG, &c. ne s'allongent & ne s'inclinent les unes ſur les autres : or les lignes BG, CG, &c. ne peuvent s'allonger & s'incliner les unes ſur les autres, les côtés BC, CD, &c. reſtant les mêmes, ſans que les angles autour du point G ne diminuent : donc leur ſomme deviendra moindre que quatre angles droits.

*Corollaire I.*

660. Trois angles de triangles équilatéraux peuvent former un angle ſolide. Car chaque angle du triangle équilatéral, étant de 60 degrés, trois de ces angles font $3 \times 60 = 180$ degrés, ce qui eſt moindre que quatre angles droits.

Par la même raiſon, quatre, cinq de ces mêmes angles peuvent former un angle ſolide.

Mais ſix angles de triangles équilatéraux ne peuvent plus former un angle ſolide, car $6 \times 60 = 360$ degrés, ou quatre angles droits.

*Corollaire II.*

661. Chaque angle du quarré étant de 90 degrés ; trois angles de quarré font $3 \times 90 = 270$ degrés, moindres que quatre angles droits : donc ils peuvent former un angle ſolide.

Mais quatre angles de quarré font $4 \times 90 = 360$ degrés, ou quatre angles droits : donc ils ne peuvent pas former un angle ſolide.

*Corollaire III.*

662. Chaque angle du pentagone régulier étant

de 108 degrés, trois de ces angles feront $3 \times 108 = 324$ degrés, ce qui eſt moindre que quatre angles droits : donc trois angles de pentagone régulier peuvent former un angle ſolide.

Mais quatre angles de pentagone régulier faiſant $4 \times 108 = 432 > 360$ degrés, ne peuvent pas par conſéquent faire un angle ſolide.

*Corollaire IV.*

663. Chaque angle d'exagone régulier étant de 120 degrés, trois de ces angles font $3 \times 120 = 360$ degrés, ou quatre angles droits : donc ils ne peuvent former un angle ſolide.

A plus forte raiſon on ne peut pas former d'angles ſolides avec trois angles de polygone régulier qui ſeroit au-deſſus de l'exagone ; car plus les polygones ont de côtés, plus les angles formés par ces côtés ſont grands.

## SECTION III.

### *Des Solides.*

I°. UN point qui ſe meut, décrit une *ligne* : une ligne en ſe mouvant décrit une *ſurface* : une ſurface qui ſe meut décrit un *ſolide*.

II°. Lorſqu'une ſurface plane, ou un plan ſe meut pour décrire un ſolide, les lignes qui terminent le plan, décrivent la ſurface du ſolide, & l'intérieur ou la ſurface du plan donne la ſolidité.

III°. Une ſurface peut être conſidérée de deux manieres, ou comme *figure*, ou comme *quantité* : comme figure, lorſqu'on la conſidere par rapport à ſes angles & à ſes côtés ; comme quantité, lorſqu'on l'enviſage comme une étendue plus ou moins grande, ſuſceptible d'évaluation, de meſure & de comparaiſon. De même le ſolide peut auſſi être con-

ſidéré ſous deux points de vue différens, ou comme corps *figuré*, ou comme corps *ſolide*. On le regarde comme corps figuré, lorſqu'on l'enviſage par rapport aux ſurfaces planes & aux angles ſolides qui terminent ſon volume : on le conſidere comme corps ſolide, lorſqu'on le regarde comme un volume réſultant de trois dimenſions, lequel eſt ſuſceptible d'évaluation, de meſure & de comparaiſon. Nous allons enviſager les ſolides ſous ces deux points de vue différens.

## CHAPITRE I.

### *Des Solides conſidérés comme Corps figurés.*

I°. ON appelle *corps figurés*, des corps ou ſolides terminés par des angles ſolides & des ſurfaces planes. Les corps figurés ſont dans la claſſe des ſolides, ce que les polygones ſont dans la claſſe des figures.

II°. On diſtingue deux ſortes de corps figurés, comme on diſtingue deux ſortes de polygones ; ſçavoir, des *réguliers* & des *irréguliers*. Les corps réguliers ſont ceux dont toutes les faces planes ſont égales entr'elles & tous les angles ſolides ſont égaux entr'eux. On appelle au contraire corps irréguliers, ceux dont, ou toutes les faces ne ſont point égales, ou tous les angles ſolides ne ſont point égaux. Nous allons parler 1°. des corps figurés en général, 2°. des corps réguliers.

### ARTICLE I.

#### *Des Corps figurés en général.*

On peut former un polygone de deux manieres, ou en joignant des lignes par leurs extrêmités pour former des angles plans ; ou en faiſant mouvoir une ligne parallélement à elle-même. De même on con-

çoit que les corps ſe peuvent former de deux manieres: ou en joignant des ſurfaces planes par leurs angles pour en former des angles ſolides; ou en faiſant mouvoir une ſurface. La premiere ſe fait par l'aſſortiment des plans; la ſeconde par le mouvement d'un plan.

## *HYPOTHESE I.*

664. Concevez que le plan EFGH (*fig.* 131.) monte parallelement à lui-même le long de la ligne EA, en ſorte que le point E parcoure ſucceſſivement tous les points de la ligne EA, & que ce plan laiſſe des traces par tout où il paſſe: il eſt évident qu'il en réſultera le corps AG, que l'on appelle en général *Priſme*.

## *DÉFINITIONS.*

### I.

665. Un *priſme* eſt un corps qui dans toute ſa longueur à une égale groſſeur, qui eſt entouré de faces qui ſont des parallélogrammes, & eſt compris ſous deux baſes, l'une ſupérieure ABCD, & l'autre inférieure EFGH, qui ſont des figures paralleles, ſemblables & égales.

### II.

666. Si le plan générateur eſt un parallélogramme, alors le priſme eſt appellé *Parallélipipede*. Si le plan générateur eſt un parallélogramme rectangle, & ſi la ligne AE eſt perpendiculaire à la baſe, alors le parallélipipede s'appelle *Parallélipipede* rectangle. Si le plan générateur eſt un quarré, & qu'il s'éleve à une hauteur égale au côté du quarré, alors il s'appelle *Cube* ou *Exaedre*.

### III.

667. Le priſme s'appelle *triangulaire*, *quadrangulaire*, *pentagonal*, *exagonal*, &c. ſelon que le plan générateur eſt un *Triangle*, un *Rectangle*, un *Pentagone*, un *Exagone*, &c.

IV.

668. Une ligne tirée du centre de la baſe ſupérieure au centre de la baſe inférieure, s'appelle l'*Axe* du priſme. Une ligne tirée d'un des angles du priſme perpendiculairement ſur la baſe (prolongée, s'il le faut) s'appelle la *Hauteur* du priſme.

V.

669. Un priſme eſt appellé *droit*, lorſque ſon axe eſt perpendiculaire aux baſes, & alors l'axe n'eſt pas diſtingué de la hauteur; il eſt appellé *oblique*, lorſque l'axe n'eſt pas perpendiculaire aux baſes, & alors l'axe eſt diſtingué de la hauteur.

VI.

670. Si le plan générateur eſt un polygone d'un nombre infini de côtés, ou eſt un cercle, alors le priſme deviendra un *priſme infinitaire*, ou un *cylindre*. Le cylindre peut donc être regardé comme un priſme enrouré de faces qui ſont des parallélogrammes d'une largeur infiniment perite.

*Corollaire I.*

671. L'eſpece du priſme dépend de la qualité de ſa baſe, laquelle eſt une figure qui peut varier depuis le triangle juſqu'au cercle. Or comme la plus ſimple de toures les figures eſt le *triangle*, & la plus compoſée eſt le *cercle*; de même le plus ſimple de tous les priſmes, eſt le priſme *triangulaire*, & le plus compoſé eſt le *priſme infinitaire*, ou le *cylindre*. Le priſme triangulaire & le cylindre ſont donc les extrêmes, ou les termes enrre leſquels ſe trouvent compris toutes les eſpeces de priſmes poſſibles; de même que le *triangle* & le *cercle* ſont les extrêmes ou les termes enrre leſquels toutes les figures rectilignes poſſibles ſont compriſes.

*Corollaire II.*

672. Dans l'hypothèſe que nous venons de faire, on peut regarder les traces que laiſſe le *plan généra-*

*teur*, en montant parallélement à lui-même pour former le priſme, comme étant elles-mêmes autant de petits priſmes élémentaires d'une hauteur infiniment petite: c'eſt pourquoi

I°. On peut regarder le priſme comme un compoſé d'une infinité de priſmes qui n'ont qu'une hauteur infiniment petite, & qui ſont poſés les uns ſur les autres. Les priſmes élémentaires peuvent auſſi être regardés comme des tranches, ou comme des plans ſemblables & égaux d'une épaiſſeur infiniment petite.

II°. On peut dire la même choſe du parallélipipede.

III°. Le cylindre peut être regardé comme réſultant de la ſomme d'une infinité de petits cylindres d'une hauteur infiniment petite & poſés les uns ſur les autres. Ces petits cylindres élémentaires peuvent auſſi être regardés comme des cercles, ou des plans circulaires égaux, & d'une épaiſſeur infiniment petite.

*Corollaire III.*

673. Comme toute figure réguliere peut être inſcrite ou circonſcrite à un cercle, de même tout priſme (dont les baſes ſeront ſuppoſées régulieres) peut être inſcrit ou circonſcrit à un cylindre: or

I°. De deux ou pluſieurs priſmes circonſcrits à un même cylindre, celui dont la baſe aura plus de côtés, ſera plus petit: car plus la baſe du priſme aura de côtés, plus elle approchera du cercle (515.) qui eſt la baſe du cylindre, & par conſéquent plus auſſi le priſme approchera du cylindre qui eſt toujours plus petit qu'aucun des priſmes circonſcrits.

II°. De deux ou pluſieurs priſmes inſcrits à un même cylindre, celui dont la baſe aura plus de côtés, ſera le plus grand. La preuve en eſt évidente après ce que nous venons de dire.

## *HYPOTHESE II.*

674. Si le plan générateur, qui monte parallélement à lui-même, eſt un polygone fini, dont chaque côté pendant le mouvement décroiſſe toujours uniformément, juſqu'à ce qu'il devienne nul ou = o; alors le ſolide ſe terminera en pointe, & s'appelle *Pyramide.*

## *DÉFINITIONS.*

I.

675. La pyramide eſt donc un ſolide terminé d'une part par une *Baſe*, & de l'autre par un *Point*, & environné de faces qui ſont des triangles dont les ſommets ſe réuniſſent tous en un même point, que l'on appelle *Sommet* de la pyramide.

II.

676. La pyramide s'appelle *tronquée*, lorſqu'on en a retranché le ſommet; ou lorſque faiſant paſſer par une des faces de la pyramide un plan parallélement à la baſe, on en a retranché une petite pyramide.

III.

677. La pyramide s'appelle *triangulaire*, *quadrangulaire*, *pentagonale*, &c. ſelon que le plan générateur eſt un *Triangle*, un *Quarré*, un *Pentagone*, &c. Dans chacune de ces pyramides, la ligne tirée du ſommet au centre de la baſe, (que nous ſuppoſons être un polygone régulier,) s'appelle l'*Axe* de la pyramide.

IV.

678. La pyramide eſt appellée *droite*, lorſque ſon axe eſt perpendiculaire ſur la baſe; & elle eſt appellée *oblique*, lorſque cet axe eſt oblique ſur la baſe. Elle eſt appellée *réguliere*, lorſqu'elle eſt droite, & que la baſe eſt un polygone régulier.

V.

679. Une ligne tirée du ſommet de la pyramide perpendiculairement ſur la baſe, (prolongée, s'il le faut,) s'appelle la *Hauteur* de la pyramide. Si la pyramide eſt droite, & ſi la baſe eſt un polygone régulier, une ligne tirée du ſommet de la pyramide perpendiculairement ſur un des côtés de la baſe, s'appelle l'*Apothême* de la pyramide.

V I.

680. Si le plan générateur eſt un cercle dont la circonférence décroiſſe uniformément, à meſure qu'elle monte parallélement à elle-même; alors la pyramide devient une *pyramide infinitaire*, ou un *Cône*: le cône peut donc être regardé comme une pyramide entourée de faces qui ſont des triangles d'une baſe infiniment petite.

V I I.

681. Le cône, de même que la pyramide, a ſa *Hauteur*, ſon *Axe*, ſon *Apothême*: il eſt appellé *droit*, lorſque ſon axe eſt perpendiculaire ſur la baſe; il eſt appellé *oblique*, lorſque cet axe eſt oblique ſur la baſe; & il eſt appellé *tronqué*, lorſqu'on en a retranché le ſommet.

*Corollaire I.*

682. La plus ſimple de toutes les pyramides, eſt la pyramide *triangulaire*, & la plus compoſée eſt la pyramide *infinitaire* ou le *cône*. La pyramide triangulaire & le cône ſont donc les extrêmes ou les termes entre leſquels toutes les eſpeces de pyramides poſſibles ſe trouvent compriſes; de même que le priſme triangulaire & le cylindre ſont les extrêmes ou les termes qui comprennent tous les priſmes poſſibles.

*Corollaire II.*

683. Dans l'hypothèſe que nous venons de faire, on peut regarder les traces que laiſſe le plan générateur,

rateur, comme autant de plans polygones qui ont une épaiſſeur infiniment petite, & qui ſont poſés les uns ſur les autres: c'eſt pourquoi

I°. La pyramide peut être regardée comme compoſée d'élémens qui ſoient des plans polygones d'une épaiſſeur infiniment petite, & dont les côtés décroiſſent uniformément depuis la baſe juſqu'au ſommet de la pyramide, ou ils deviennent nuls ou = o.

II°. Le cône peut être regardé comme compoſé de pluſieurs cercles poſés les uns ſur les autres, & dont les circonférences décroiſſent uniformément depuis la baſe juſqu'au ſommet du cône, ou elles deviennent nulles, ou = o.

*Corollaire III.*

684. Comme tout priſme, dont les baſes ſont ſuppoſées régulieres, peut être inſcrit ou circonſcrit à un cylindre de même hauteur que lui; de même toute pyramide dont la baſe ſera une figure réguliere, pourra être inſcrite ou circonſcrite à un cône de même hauteur qu'elle: or

I°. De deux ou pluſieurs pyramides circonſcrites à un même cône, celle-là approchera plus du cône & ſera plus petite, dont la baſe aura plus de côtés; ce qui eſt évident après ce que nous avons dit du priſme circonſcrit au cylindre.

II°. Pareillement de deux ou pluſieurs pyramides inſcrites à un même cône; celle-là approchera plus du cône & ſera plus grande, dont la baſe aura plus de côtés.

*HYPOTHESE III.*

685. Concevez qu'un polygone: *par ex*; LABIF, &c. (*fig.* 142.) tourne autour d'un diamétre IL, ou d'une diagonale quelconqee menée d'un des angles du polygone à l'angle oppoſé; ce polygone dans ſa révolution formera un ſolide, que l'on appelle en général *Sphéroïde*, lequel reçoit différens noms ſelon l'eſpece du plan ou polygone générateur.

## *DÉFINITIONS.*

I.

686. Si le plan générateur eſt un quarré, ou un lozange qui tourne autour d'une de ſes diagonales priſe comme *axe* du mouvement, le ſphéroïde qui ſera formé par cette révolution, s'appelle *fuſeau.*

II.

687. Si le plan générateur eſt un pentagone régulier, qui ſoit ſuppoſé tourner autour d'un diamétre mené d'un des angles du polygone perpendiculairement ſur le côté oppoſé, le ſolide formé par cette révolution, s'appelle *ſphéroïde pentagonal.*

III.

688. En général le ſphéroïde s'appellera *pentagonal*, *exagonal*, *décagonal*, &c. ſelon que le plan générateur ſera un *pentagone*, un *exagone*, un *décagone*, &c. régulier.

IV.

689. Si le plan générateur eſt un polygone d'un nombre infini de côtés, ou eſt un cercle (*fig.* 143.) que l'on ſuppoſe tourner autour d'un de ſes diamétres IS, alors le ſphéroïde décrit ſera un ſphéroïde *infinitaire*, ou une *ſphere.*

*Corollaire I.*

690. Le plus ſimple des ſphéroïdes eſt le *fuſeau*; le plus compoſé eſt la *ſphere.* Le fuſeau & la ſphere ſont donc les extrêmes ou les termes entre leſquels ſe trouvent compris tous les ſphéroïdes poſſibles; de même que tous les priſmes ſe trouvent compris entre le *priſme triangulaire* & le *cylindre*, & toutes les pyramides entre la *pyramide triangulaire*, & le *cône.*

*Corollaire II.*

691. On peut regarder le ſphéroïde comme compoſé de pluſieurs tranches poſées les unes ſur les au-

tres, leſquelles ſont ou des cylindres, ou des cônes tronqués, ou des cônes.

*Corollaire III.*

692. Comme tout priſme dont les baſes ſont ſuppoſées régulieres, peut être inſcrit ou circonſcrit à un cylindre; comme toute pyramide dont la baſe eſt ſuppoſée réguliere, peut être inſcrite ou circonſcrite à un cône; de même tout ſpéroïde dont le plan générateur ſera un polygone régulier pourra être inſcrit ou circonſcrit à une ſphere : or

I°. De deux ou pluſieurs ſphéroïdes circonſcrits à une même ſphere, celui dont le polygone générateur aura plus de côtés, ſera le plus petit : car ſi l'on conçoit pluſieurs polygones circonſcrits à un même cercle, & qu'on les faſſe tourner autour d'un diamétre commun pour former la ſphére & les ſphéroïdes, il eſt évident que le polygone qui aura le plus de côtés approchera le plus du cercle, & ſera le plus petit (515.); par conſéquent le ſphéroïde décrit par le polygone d'un plus grand nombre de côtés approchera le plus de la ſphere, & ſera le plus petit; puiſque la ſphere eſt plus petite qu'aucun des ſphéroïdes circonſcrits.

II°. Par une raiſon contraire de tous les ſphéroïdes inſcrits à une même ſphere, celui dont le polygone générateur aura plus de côtés, ſera le plus grand, parce qu'il approchera le plus de la ſphere, laquelle eſt plus grande qu'aucun des ſphéroïdes qui lui ſont inſcrits.

*Remarque.*

693. Le mouvement de révolution dont nous venons de faire uſage dans cette hypothéſe, ſert en général à faire concevoir la formation de tous les corps circulaires; en effet,

I°. Si le plan générateur eſt un triangle rectangle ABC (*fig.* 140.) le ſolide décrit par la révolution

de ce triangle, ſera un *cône* CAF, ou EAF, (*fig.* 139.)

II°. Si le plan générateur eſt un trapeze CA*o*B (*fig.* 141.) qui ſoit ſuppoſé tourner autour du côté *o*B, le ſolide décrit ſera un *cône tronqué* CADF.

III°. Si le plan générateur eſt un rectangle CABI (*fig.* 138.) qui ſoit ſuppoſé tourner autour du côté AB, le ſolide décrit par ce mouvement, ſera un *cylindre* CDFI.

IV°. Si le plan générateur eſt un polygone d'un nombre fini de côtés (*fig.* 142.) qui ſoit ſuppoſé tourner autour de l'axe IL, alors le ſolide décrit ſera un *ſphéroïde.*

V°. Si le plan générateur eſt un polygone d'un nombre infini de côtés, ou eſt un cercle (*fig.* 143.) que l'on ſuppoſe tourner autour d'un de ſes diamétres IS, alors le ſolide décrit ſera une *ſphere.*

## *HYPOTHESE IV.*

694. Si l'on joint enſemble des ſurfaces planes par leurs angles pour former des angles ſolides; & ſi l'on renferme un eſpace ou un volume ſous ces ſurfaces, on repréſentera des ſolides que l'on appelle *polyedres*, leſquels prennent différens noms ſuivant le nombre & l'eſpéce des ſurfaces que l'on aura fait concourir.

Il eſt à propos de former ſoi-même ces différens polyedres avec du carton.

## *DÉFINITIONS.*

I.

695. Si vous aſſortiſſez quatre triangles égaux & équilatéraux par leurs angles, vous renfermerez par cet aſſortiment un eſpace ou un volume, & vous aurez un polyedre, que l'on appelle *tétraedre* (*fig.* 129.)

II.

696. Si vous joignez de la même maniere huit

triangles égaux & équilatéraux, cet aſſortiſſement repréſentera un polyedre, que l'on appelle *octaedre* (*fig.* 130.)

III.

697. Si vous réuniſſez enſemble vingt triangles égaux & équilatéraux, il en réſultera un polyedre, que l'on appelle *Icoſaedre* (*fig.* 132.)

IV.

698. Si, au lieu de triangles, vous prenez des quarrés, & ſi vous aſſortiſſez enſemble, & de la maniere ci-deſſus, ſix quarrés égaux, vous aurez un polyedre que l'on appelle *Exaedre* ou *Cube*, (*fig.* 131.)

V.

699. Si, au lieu de quarrés, vous prenez des rectangles, & ſi vous entourez un eſpace avec ces rectangles, de façon que ceux qui ſeront oppoſés, ſoient égaux: ſi de plus vous donnez à cette enveloppe des baſes qui ſoient des polygones paralleles, ſemblables & égaux; il en réſultera un polyedre, que l'on appelle en général *priſme*, (*fig.* 136, 137 & 148.)

VI.

700. Si, au lieu des rectangles, vous prenez des pentagones, & ſi vous aſſortiſſez enſemble douze pentagones réguliers & égaux, de maniere à former des angles ſolides, vous aurez un polyedre que l'on appelle *Dodécaedre* (*fig.* 134.)

Nous verrons bientôt qu'en prenant des exagones, & en général des polygones au-deſſus de l'exagone, on ne peut plus former aucune eſpece de polyedres par l'aſſortiment des plans.

*Corollaire I.*

701. Le plus ſimple de tous les polyedres eſt le *tétraedre*, qui eſt compris ſous quatre faces & ſous quatre angles ſolides: car pour renfermer un volume, il faut au moins quatre ſurfaces planes &

quatre angles ſolides : de même que, pour avoir un polygone, il faut au moins trois côtés & trois angles. Au contraire le plus compoſé de tous les polyedres eſt la *ſphere* ; parce que, ſi l'on augmente à l'infini le nombre des faces du polyedre (en le ſuppoſant régulier), auquel cas ces faces deviennent infiniment petites, alors le polyedre devient *infinitaire*, ou devient une *ſphere*.

Le *tétraedre* & la *ſphere* ſont donc les extrêmes ou les termes, entre leſquels ſe trouvent compris tous les polyedres poſſibles ; de même que le *triangle* & le *cercle* ſont les extrêmes de toutes les figures poſſibles ; de même que le *priſme triangulaire* & le *cylindre* ſont les extrêmes de tous les priſmes poſſibles ; de même auſſi que la *pyramide triangulaire* & le *cône* ſont, &c.

*Corollaire II.*

702. Si, du ſommet de chaque angle du polyedre, on ſuppoſe des lignes menées dans l'intérieur du polyedre, de façon qu'elles ſe rencontrent toutes en un même point ; ces lignes partageront le polyedre en pluſieurs pyramides, dont les ſommets ſe réuniront en un point commun, que l'on appelle le *centre* du polyedre : d'où il ſuit

I°. Que le polyedre peut être regardé comme compoſé de pyramides, dont les ſommets ſe réuniſſent au centre du polyedre, & dont les baſes ſont appuyées ſur les faces du polyedre.

II°. Que la ſphere peut être regardée comme un polyedre régulier compoſé d'une infinité de pyramides toutes égales, dont les ſommets ſe réuniſſent au centre de la ſphere, & dont les baſes ſont appuyées ſur les faces infiniment petites du polyedre infinitaire, ou de la ſphere.

*Corollaire III.*

703. Comme toute figure réguliere peut être inſ-

crite ou circonſcrite à un cercle, de même tout polyedre régulier pourra être inſcrit ou circonſcrit à une ſphere de même diamétre : or

I°. De deux ou pluſieurs polyedres inſcrits à une même ſphere, le plus grand ſera celui qui aura un plus grand nombre de faces ; parce qu'il approchera plus de la ſphere, laquelle eſt plus grande qu'aucun des polyedres inſcrits.

II°. Au contraire, de tous les polyedres circonſcrits à une même ſphere, le plus petit ſera celui qui aura un plus grand nombre de faces ; parce que plus le polyedre aura de faces, plus il approchera de la ſphere, laquelle eſt plus petite qu'aucun des polyedres circonſcrits.

*Corollaire général.*

704. Il eſt aiſé de voir après tout ce que nous venons de dire :

I°. Que les ſolides pris en général peuvent être diviſés en quatre eſpeces, ou diſtribués en quatre claſſes, qui ſeront celles des *priſmes*, celle des *pyramides*, celle des *ſphéroïdes*, & celle des *polyedres*.

II°. Que dans chaque claſſe il y a deux termes ou extrêmes, entre leſquels ſe trouvent compris tous les ſolides de cette claſſe : ſçavoir le *priſme triangulaire* & le *cylindre*, dans la claſſe des priſmes ; la *pyramide triangulaire* & le *cône*, dans la claſſe des pyramides ; le *fuſeau* & la *ſphere*, dans la claſſe des ſphéroïdes ; le *tétraedre* & la *ſphere*, dans la claſſe des polyedres.

III°. Que dans chaque claſſe, les ſolides peuvent être conſidérés comme compoſés d'élémens analogues à leur claſſe ; leſquels ſeront ou pourront être regardés, ou comme des plans d'une épaiſſeur infiniment petite, couchés les uns ſur les autres, ou même comme des ſolides d'une hauteur infiniment petite, poſés les uns ſur les autres : ou comme des ſolides finis, poſés à côté les uns des autres, & réunis en un même point commun ou centre : ou comme des ſoli-

des d'une baſe infiniment petite, & aboutiſſans auſſi à un même centre.

## ARTICLE II.

### *Des Corps réguliers.*

I°. Nous entendons par corps réguliers, ceux-là ſeulement dont la régularité eſt parfaite, c'eſt-à-dire, dont tous les angles ſolides ſont égaux entr'eux, & toutes les faces ſont égales entr'elles.

II°. La maniere la plus ſimple de concevoir que les corps réguliers ſont formés, eſt en aſſortiſſant des plans de même eſpéce, & égaux pour former des angles ſolides : de même que pour former un polygone régulier, la maniere la plus ſimple eſt de joindre des lignes égales par leurs extrêmités, de façon qu'elles faſſent entr'elles par-tout des angles égaux.

III°. En aſſortiſſant des lignes égales par leurs extrêmités, vous pouvez toujours former des polygones réguliers; ainſi tous les polygones depuis le plus ſimple, qui eſt le *triangle*, juſqu'au plus compoſé, qui eſt le *cercle*, peuvent être réguliers: mais il n'en eſt pas de même des corps figurés, & nous allons voir qu'entre tous les corps figurés, depuis le plus ſimple, qui eſt le *tétraedre*, juſqu'au plus compoſé, qui eſt la *ſphere*, il ne peut y avoir que cinq ſortes de corps réguliers, ſçavoir, le *Tétraedre*, compris ſous quatre triangles égaux & équilatéraux (*fig.* 129.); l'*Octaedre* compris ſous huit triangles égaux & équilatéraux (*fig.* 130.); l'*Icoſaedre*, compris ſous vingt triangles égaux & équilatéraux (*fig.* 132.); l'*Exaedre* ou le *Cube* compris ſous ſix quarrés égaux (*fig.* 131.); & le *Dodécaedre* compris ſous douze pentagones réguliers égaux (*fig.* 134.)

### THÉORÊME I.

705. *Il n'y a que cinq eſpeces de corps réguliers qui*

*puiſſent être formés par l'aſſortiment des ſurfaces planes de même eſpece ; ſçavoir, le* Tétraedre, *l'*Octaedre, *l'*Icoſaedre, *l'*Exaedre, *& le* Dodécaedre.

Démonst. Pour former un polyedre en joignant des ſurfaces planes, il eſt néceſſaire que ces ſurfaces réunies par leurs angles puiſſent former un angle ſolide, qui eſt moindre que 360 degrés. Or

I°. Trois angles de triangles égaux & équilatéraux peuvent former un angle ſolide (660.): Trois de ces triangles joints enſemble peuvent donc faire un angle ſolide, tel que ſont ceux du *Tétraedre.*

II°. Quatre angles de ces triangles peuvent encore former un angle ſolide (660.): or l'angle ſolide de l'*Octaedre* eſt formé par les angles de quatre triangles égaux & équilatéraux.

III°. Cinq angles de ces mêmes triangles peuvent encore faire (660.) un angle ſolide: or l'angle de l'*Icoſaedre* eſt formé par cinq de ces triangles.

Mais ſix angles de triangles équilatéraux ne peuvent pas former un angle ſolide (660.); c'eſt pourquoi il ne peut y avoir que trois eſpeces de polyedres réguliers formés par des triangles équilatéraux.

IV°. Trois angles de quarré peuvent faire un angle ſolide (661.): or l'angle du *Cube* ou de l'*Exaedre* eſt compoſé de trois angles de quarré. Mais quatre angles de quarré ne peuvent pas faire un angle ſolide (661.); c'eſt pourquoi on ne peut former avec des quarrés d'autre ſolide que le cube.

V°. Trois angles de pentagones réguliers peuvent former un angle ſolide (662.): or chaque angle du *Dodécaedre* eſt formé par trois angles de pentagones réguliers. Mais quatre angles de pentagones réguliers ne peuvent pas former d'angle ſolide; c'eſt pourquoi on ne peut former avec des pentagones réguliers d'autre ſolide que le dodécaedre.

VI°. Trois angles d'exagones réguliers ne peuvent pas former un angle ſolide (663.); ainſi on ne peut

point former de polyedres réguliers avec des exagones.

*Remarque.*

706. Ces ſurfaces planes qui, jointes par leurs angles, & repliées les unes ſur les autres, repréſentent le ſolide, donnent exactement la ſurface du ſolide. Or, ſi l'on conçoit que ces ſurfaces ſoient développées, ou poſées ſur un même plan à côté les unes des autres, elles s'appellent le *Développement* de la ſurface du ſolide; & ſi l'on replie & que l'on enveloppe les ſurfaces qui donnent le développement, on renfermera ſous ces ſurfaces un eſpace, une capacité préciſément égale au volume du polyedre.

THÉORÊME II.

707. *Chaque corps régulier a pour développement une ſurface compoſée d'un certain nombre de polygones égaux réguliers & de même eſpéce, que l'on peut tracer & évaluer.*

DÉMONST. I°. Si vous faites le triangle équilatéral BAC (*fig.* 129.); & ſi vous diviſez également les trois côtés aux points D, E, F, en tirant les lignes DE, DF, EF, vous aurez le développement du *Tétraedre*, qui ſera compoſé de quatre triangles plans égaux & équilatéraux, leſquels repliés pour ſe réunir, repréſenteront le *Tétraedre*.

II°. Si vous joignez enſemble deux développemens de tétraedre, en leur donnant le côté commun AB (*fig.* 130.) vous aurez le développement de l'*Octaedre*, lequel eſt compoſé de huit triangles égaux & équilatéraux.

III°. Si entre deux paralleles AB, CD (*fig.* 132.) vous tracez dix triangles égaux & équilatéraux; & ſi ſur les baſes de ces triangles vous tracez encore de part & d'autre des triangles égaux & équilatéraux, vous aurez le développement de l'*Icoſaedre*, lequel

eſt compoſé de vingt triangles égaux & équilatéraux.

IV°. Si vous faites le quarré ABCD (*fig.* 131.); & ſi ſur chaque côté de ce quarré vous faites encore des quarrés égaux & ſemblables au premier, & ſi vous ajoutez le quarré EGHF, conſtruit ſur le côté EF, vous aurez le développement du *Cube*, ou de l'*Exaedre*, qui eſt compoſé de ſix quarrés égaux.

V°. Si vous faites deux pentagones réguliers & égaux A & B (*fig.* 134.), & ſi ſur chaque côté de chacun des pentagones vous conſtruiſez pareillement des pentagones égaux, rendez le côté DC commun, & vous aurez le développement du *Dodécaedre*, compoſé de douze pentagones réguliers & égaux.

## THÉORÊME III.

708. *Tout ſolide en général a pour développement une ſurface que l'on peut tracer & évaluer.*

DÉMONST. I°. Si vous prenez un parallélogramme rectangle *a m n e* (*fig.* 136.) & ſi vous diviſez les baſes ſupérieure & inférieure en quatre parties alternativement égales & inégales, ces parallélogrammes repliés les uns ſur les autres, repréſenteront le contour ou la ſurface latérale d'un ſolide; & dépliés, en feront le développement: ce ſolide s'appelle *Parallélipipede*.

II°. Si vous diviſez un parallélogramme rectangle en trois, en quatre, en cinq, ſix, ſept, huit, &c. parallélogrammes égaux, ces parallélogrammes repliés repréſenteront encore la ſurface latérale d'un ſolide; & dépliés, en feront le développement: ce ſolide s'appelle *Priſme* (*fig.* 137.)

III°. Si vous le diviſez en une infinité de parallélogrammes qui n'aient chacun qu'une baſe infiniment petite, ces parallélogrammes repliés repréſenteront une ſurface convexe, dont le parallélogramme lui-même ſera le développement, & le ſolide auquel appartient ce développement, s'appelle *Cylindre* (*fig.* 138.)

IV°. Si vous prenez un nombre quelconque de triangles iſoceles & égaux, & ſi vous leur donniez le ſommet commun A (*fig.* 133.) vous aurez le développement d'un ſolide, que l'on appelle *Pyramide.*

V°. Si vous prenez un ſecteur de cercle (*fig.* 135.) vous aurez le développement de la ſurface convexe d'un ſolide, que l'on appelle *Cône.*

VI°. Chacun de ces ſolides a des baſes qui ſont deux rectangles pour le *Parallélipipede*; deux polygones pour le *Priſme*; deux cercles pour le *Cylindre*; un polygone pour la *Pyramide*; & un cercle pour le *Cône.* Or ſi, au développement de la ſurface latérale, vous ajoutez les figures qui ſervent de baſes à ces ſolides, vous aurez le développement de la ſurface totale, & ce développement replié repréſentera le ſolide tout entier.

*Corollaire I.*

709. Des cinq corps réguliers dont nous venons de parler, on peut dériver & faire naître d'autres corps, qui ſeront des polyedres: ſçavoir, en tronquant les angles du corps régulier, ce qui augmentera le nombre des angles ſolides, & celui des faces du polyedre.

*Corollaire II.*

710. Si l'on tronquoit les angles d'un polyedre régulier à l'infini, les angles deviendroient nuls, & les faces ſeroient infiniment petites, & alors le polyedre régulier deviendroit une ſphere.

*Corollaire III.*

711. Tout polygone régulier a, comme nous l'avons dit, un centre qui eſt également éloigné de tous les ſommets des angles & de tous les côtés: de même auſſi tout corps régulier a un centre qui eſt éga-

lement diſtant de tous les ſommets des angles ſolides, & de toutes les faces du corps régulier.

Or dans le corps régulier, comme dans le polygone régulier, une ligne tirée du centre perpendiculairement ſur une des faces, s'appelle *rayon droit*, & une ligne tirée du centre au ſommet d'un des angles ſolides, s'appelle *rayon oblique*, lequel n'eſt pas diſtingué du rayon de la ſphere circonſcrite.

*Corollaire IV.*

712. Comme dans un polygone régulier inſcrit à un cercle, on peut déterminer la valeur juſte ou approchée du côté du polygone, en déterminant le rapport que ce côté aura avec le rayon du cercle circonſcrit; de même dans un corps régulier inſcrit à une ſphere, on peut déterminer la valeur, ſoit juſte, ſoit approchée du côté du corps régulier, en le comparant avec le rayon de la ſphere avec lequel il a un rapport quelquefois connu, mais le plus ſouvent inconnu.

## CHAPITRE II.

*Des Solides conſidérés en tant que Corps ſolides.*

NOus y conſidérerons deux choſes, leur ſurface & leur ſolidité. La ſurface du corps ſolide eſt cette étendue qui termine le volume du ſolide; la ſolidité eſt la capacité ou le volume qui eſt compris ſous cette ſurface.

### ARTICLE I.

*De la Surface des Solides.*

Nous avons déjà parlé de la ſurface des ſolides

conſidérée comme *développement*, où comme ſurface formée par le concours ou l'aſſortiment de pluſieurs figures planes de même, ou de différente eſpéce; nous allons maintenant conſidérer leur ſurface comme *produit*, ou comme étendue réſultante de la combinaiſon de deux dimenſions multipliées l'une par l'autre.

## *HYPOTHESE I.*

713. Si une ligne AB (*fig.* 128.) immobile au point A, parcourt par ſon extrêmité B les côtés, d'une figure quelconque BCDEF, cette ligne décrira la ſurface *convexe* ou *latérale* d'une pyramide, dont le ſommet eſt le point A & dont la baſe eſt la figure décrite par l'extrêmité B de la ligne. Or

I°. Si la figure décrite par l'extrêmité B eſt un *Triangle*, cette ligne décrira la ſurface d'une pyramide *triangulaire.*

II°. Si la figure décrite eſt un *Quarré*, un *Pentagone*, &c. cette ligne décrira la ſurface d'une pyramide *quadrangulaire*, *pentagonale*, &c.

III°. Si la figure décrite par le point B eſt un *Cercle*, cette ligne décrira la ſurface d'un *Cône.*

## *HYPOTHESE II.*

714. Si le ſommet de la ligne qui décrit la ſurface d'un ſolide, n'eſt pas immobile, & ſi dans le tems que l'extrêmité F d'une ligne CF (*fig.* 131.) décrit le contour d'une figure FGHE, ſon ſommet C décrit une figure CDBA, parallele, égale & ſemblable à la premiere; alors cette ligne décrira la ſurface *convexe* ou *latérale* d'un *Priſme.* Or

I°. Si la baſe eſt un *Triangle*, la ſurface décrite ſera celle d'un priſme *triangulaire.*

II°. Si la baſe eſt un *Quarré*, un *Pentagone*, &c, la ſurface décrite ſera celle d'un priſme *quadrangulaire*, *pentagonal*, &c.

III°. Si la baſe eſt un *Cercle*, la ſurface décrite ſera celle d'un *Cylindre*.

## THÉORÊME I.

715. *La ſurface convexe ou latérale du Priſme droit eſt égale au produit du côté du Priſme par le contour de ſa baſe* (fig. 131.)

DÉMONST. Car elle eſt égale à la ſurface que décrit la ligne, ou le côté CF, lorſque par ſes extrêmités C & F elle parcourt les côtés de deux figures égales & paralleles FEHG, CABD. Or tandis que les extrêmités C & F de la ligne CF décrivent les côtés des figures FEHG, CABD, tous les autres points de la ligne CF décrivent auſſi les côtés de figures ſemblables, égales & paralleles, comme il eſt évident. Donc pour avoir la ſurface décrite par la ligne CF, il n'y a qu'à prendre le contour d'une de ces figures; *par ex :* de la baſe autant de fois qu'il y a de points dans le côté CF. Or prendre le contour de la baſe autant de fois qu'il y a de points dans le côté CF, c'eſt multiplier le contour de la baſe par le côté: donc, &c.

### *Corollaire.*

716. Il s'enſuit:

I°. Que la ſurface *convexe* ou *latérale* du priſme droit eſt égale au produit de ſa hauteur par le contour de ſa baſe. Car lorſque le priſme eſt droit, ſa hauteur n'eſt pas diſtinguée de ſon côté.

II°. Que la ſurface convexe ou latérale, ſoit du parallélipipede rectangle, ſoit du cube, eſt égale au produit d'un des côtés du ſolide par le contour de la baſe.

## THÉORÊME II.

717. *La ſurface convexe du Cylindre droit eſt égale au produit de la circonférence de la baſe par la hauteur du Cylindre* (fig. 138.)

Démonst. Car elle eſt égale à la ſomme de toutes les circonférences que décrivent les points de la ligne CI, lorſque par ſes extrêmités C & I elle décrit les circonférences égales & paralleles des baſes ſupérieure & inférieure. Or toutes ces circonférences ſont égales & uniformes : donc leur ſomme eſt égale à l'une d'entr'elles ; *par ex :* à la circonférence de la baſe multipliée par le nombre de ces circonférences. Mais le nombre de ces circonférences eſt meſuré par la hauteur CI, ou AB du cylindre : donc, &c.

*Corollaire I.*

718. La ſurface convexe du cylindre eſt égale à un rectangle qui auroit pour baſe une ligne égale à la circonférence de la baſe du cylindre, & une hauteur égale à celle du cylindre.

Il eſt aiſé par conſéquent de meſurer la ſurface totale du cylindre. Car pour l'évaluer, il ne s'agit que d'ajouter à la ſurface convexe les deux baſes, qui ſont des cercles que l'on ſçait (586.) évaluer.

*Corollaire II.*

719. La ſurface convexe du cylindre qui a pour hauteur le rayon du cercle de la baſe, eſt double de ce cercle. Car la ſurface de ce cercle eſt égale au produit de ſon rayon par ſa demi-circonférence (586.) Or la ſurface convexe du cylindre eſt égale au produit de ſa hauteur, (qui eſt le rayon du cercle de la baſe,) par la circonférence entiere de cette baſe : donc, &c.

*Corollaire III.*

720. Donc la ſurface convexe du cylindre qui auroit pour hauteur le diamétre du cercle de la baſe, eſt quadruple de la ſurface de ce cercle ; comme il eſt évident.

Théorême

## THÉORÊME III.

721. *La ſurface convexe ou latérale de la Pyramide droite & réguliere, eſt égale au produit du contour de ſa baſe par la moitié de l'Apothême de la Pyramide.* (fig. 128.)

DÉMONST. Elle eſt égale à la ſomme de tous les triangles qui ſont décrits par la ligne AB, lorſqu'immobile au point A, elle décrit par ſon extrêmité B les côtés de la figure, ou du polygone BFEDC. Or tous ces triangles ayant même hauteur, leur ſurface eſt égale à celle d'un triangle unique, qui auroit pour baſe une ligne égale à la ſomme des baſes de tous ces triangles, (laquelle ſomme eſt le contour de la baſe de la pyramide,) & pour hauteur, la hauteur commune de tous les triangles, (laquelle eſt l'apothême de la pyramide.) Or ce triangle unique eſt égal au produit de ſa baſe par la moitié de ſa hauteur : donc, &c.

*Corollaire.*

722. D'où il ſuit que la ſurface de la pyramide droite & réguliere eſt égale à celle d'un triangle qui auroit pour hauteur l'apothême de la pyramide, & pour baſe une ligne égale à la circonférence de la baſe de la pyramide.

## THÉORÊME IV.

723. *La ſurface convexe du Cône droit eſt égale au produit de l'Apothême par la moitié de la circonférence de la baſe* (fig. 139.).

DÉMONST. La ſurface convexe du cône eſt égale à la ſomme de toutes les circonférences que décrivent les points de la ligne AE, lorſqu'immobile au point A, elle décrit par ſon extrêmité E la circonférence du cercle EFE, qui ſert de baſe au cône. Or toutes ces circonférences décroiſſent uniformément depuis la baſe juſqu'au ſommet, & par conſéquent ſont repréſentées par les termes d'une pro-

greſſion arithmétique, *par ex.* 0 · 1 · 2 · 3 · 4 · 5 · 6, dont le premier terme o repréſente le ſommet, le dernier 6 repréſente la circonférence de la baſe, & le nombre des termes repréſente l'apothême; (car il y a autant de termes dans la progreſſion, qu'il y a dans l'apothême de points qui décrivent ces circonférences.) Or la ſomme de tous les termes d'une progreſſion arithmétique eſt égale, comme nous l'avons dit (217.), au nombre des termes multiplié par la moitié de la ſomme des extrêmes : donc dans la progreſſion 0 · 1 · 2 · 3 · 4 · 5 · 6, le premier extrême étant 0, la ſomme de tous les termes ſera égale au nombre des termes multiplié par la moitié du dernier extrême; & par conſéquent la ſurface convexe du cône ſera égale au produit de l'apothême par la moitié de la circonférence de la baſe.

*Corollaire I.*

724. Donc la ſurface convexe du cône droit eſt égale à celle d'un triangle rectangle ABC (*fig.* 139.), dont la baſe ſeroit égale à la circonférence de la baſe du cône, & dont la hauteur ſeroit égale à l'apothême du cône.

*Corollaire II.*

725. La ſurface convexe du cône eſt égale au produit de l'apothême par la circonférence de l'élément qui tient le milieu entre le ſommet & la circonférence de la baſe. Car elle eſt égale (723.) au produit de l'apothême par la moitié de la circonférence de la baſe : or la circonférence de l'élément qui tient le milieu entre le ſommet & la baſe, eſt préciſément la moitié de la circonférence de la baſe. Car les circonférences qui compoſent la ſurface conique étant repréſentées par les termes de la progreſſion 0 · 1 · 2 · 3 · 4 · 5 · 6, comme nous venons de le dire, le terme moyen 3 qui repréſente la circonférence du milieu, eſt préciſément la moitié

du dernier terme 6, qui répréſente la circonférence de la baſe, ſuivant la nature de toute progreſſion arithmétique qui commence par o.

*Corollaire III.*

726. La ſurface convexe du cône eſt à celle du cercle de la baſe, comme l'apothême eſt au rayon de ce cercle. Car la ſurface convexe du cône eſt égale (723.) au produit de ſon apothême par la demi-circonférence de la baſe ; la ſurface de la baſe eſt égale au produit du rayon par la demi-circonférence : donc la demi-circonférence étant une racine commune, les deux ſurfaces ſont entr'elles comme les racines inégales, ou comme l'apothême eſt au rayon.

*Corollaire IV.*

727. Si le cône eſt équilatéral, ou ſi l'apothême du cône eſt égal au diamétre du cercle qui lui ſert de baſe, la ſurface convexe du cône ſera double de celle de la baſe. Car la ſurface convexe eſt à celle de la baſe, comme l'apothême eſt au rayon du cercle de la baſe. Or, lorſque le cône eſt équilatéral, l'apothême eſt égal au diamétre de la baſe, & eſt par conſéquent double du rayon : donc, &c.

D'où il ſuit que la ſurface totale du cône équilatéral ſera à la ſurface de la baſe, comme 3 : 1.

THÉORÊME V.

728. *La ſurface convexe d'un Cône tronqué eſt égale au produit de ſon apothême par la moitié de la ſomme des circonférences de ſes baſes ſupérieure & inférieure* (fig. 139.)

DÉMONST. On peut conſidérer le cône tronqué GEFH comme réſultant de la ſection faite dans le cône entier AEF, dont on auroit retranché le petit cône AGH : or, puiſque (723.) les circonférences ou élémens de la ſurface du cône entier ſont repréſentés

par les termes d'une progreſſion arithmétique, *par ex :*

0 · 1 · 2 · 3 · 4 · 5 · 6 · 7 · 8 · 9 · 10 ;

ſi d'ailleurs l'on ſuppoſe que les élémens de la ſurface du petit cône AGH ſoient repréſentés par les termes 0 · 1 · 2 · 3 · 4 · 5, il s'enſuit que les circonférences ou élémens qui compoſent la ſurface du cône tronqué, ſeront repréſentés par le reſte des termes 6 · 7 · 8 · 9 · 10,

dont le premier 6 repréſente la circonférence de la baſe ſupérieure, le dernier 10 repréſente celle de la baſe inférieure, & le nombre repréſente l'apothême du cône tronqué ; or la ſomme des termes de cette derniere progreſſion eſt égale, comme nous l'avons vu (217, au nombre des termes multiplié par la moitié de la ſomme des extrêmes : donc, &c.

*Corollaire I.*

729. La ſurface du cône tronqué eſt égale à la ſurface d'une trapeze qui auroit pour hauteur l'apothême, & des baſes égales aux circonférences des baſes ſupérieure & inférieure du cône tronqué (*fig.* 139.). Car l'une & l'autre ſurfaces ſont égales chacune au produit de deux élémens qui ſont ſuppoſés égaux de part & d'autre.

*Corollaire II.*

730. La ſurface du cône tronqué eſt égale au produit de l'apothême par la circonférence de l'élément qui tient le milieu entre les baſes ſupérieure & inférieure. Car la circonférence de l'élément qui tient le milieu entre les baſes ſupérieure & inférieure, eſt égale à la moitié de la ſomme des circonférences des baſes ſupérieure & inférieure.

THÉORÊME VI.

731. *La ſurface d'un Sphéroïde eſt égale au produit*

*de ſon axe par la circonférence d'un grand cercle de la ſphere inſcrite* (fig. 142.).

Démonst. Si l'on ſuppoſe qu'un cercle & un polygone circonſcrits au cercle tournent autour du diamétre IL; ils décriront, l'un une ſphere, & l'autre un ſphéroïde circonſcrit à la ſphere. Or, ſi par les angles du ſphéroïde on fait paſſer des plans paralleles BD, AE, &c. le ſphéroïde ſe trouvera diviſé en pluſieurs portions qui ſeront, ou des cônes tronqués, ou des cylindres; & la ſurface du ſphéroïde ne ſera pas diſtinguée de la ſomme des ſurfaces de tous ces cônes tronqués & cylindres circonſcrits à la ſphere. Or la ſurface de la portion cylindrique compriſe entre les plans AE, PG eſt évidemment égale au produit de ſon axe CX par la circonférence de ſa baſe, qui eſt la circonférence d'un grand cercle de la ſphere. Reſte donc à prouver que la ſurface de chacun des cônes tronqués circonſcrits à la ſphere, eſt égale auſſi au même produit.

Pour le prouver, prenons le cône tronqué décrit pendant la révolution par le côté, ou apothême BA, & du milieu Y, menez YR, parallele à BD, & menez le diamétre YS: abbaiſſez la perpendiculaire BZ=TX, laquelle ſera l'axe du cône tronqué, ou la portion correſpondante de l'axe de la ſphere, & menez la ligne RS.

Cela poſé, on aura le triangle ABZ ſemblable au triangle YRS. Car 1°. ils ont chacun un angle droit; 2°. l'angle BAZ=BYR, parce qu'ils ſont correſpondans; & l'angle BYR = RSY, parce qu'ils ſont meſurés chacun par la moitié du même arc YIR: donc l'angle BAZ = RSY: donc le triangle ABZ eſt ſemblable au triangle YRS: donc on aura AB : BZ, ou TX :: YS : YR;
or les diamétres YS; YR ſont entr'eux comme leurs circonférences YSY, YRY: donc on aura

$$AB : TX :: YSY : YRY;$$

donc $$AB \times YRY = TX \times YSY.$$

Or la ſurface du cône tronqué eſt égale au produit AB × YRY de ſon apothême par la circonférence de l'élément qui tient le milieu entre ſes baſes: donc elle eſt auſſi égale au produit TX × YSY de l'axe du cône, ou de la portion correſpondante de l'axe de la ſphere, par la circonférence d'un grand cercle de la ſphere.

Par conſéquent la ſomme des ſurfaces de tous les cônes tronqués & cylindres circonſcrits à la ſphere, laquelle ſomme donne la ſurface du ſpéroïde, eſt égale au produit de l'axe entier de la ſphere, (qui n'eſt point ici diſtingué de l'axe du ſphéroïde,) par la circonférence d'un grand cercle de la même ſphere.

*Remarque.*

732. Obſervez:

I°. Que dans la démonſtration on ne fait point entrer les ſurfaces planes décrites par la ligne HF d'une part, & la ligne parallele qui paſſe par le point L de l'autre part; mais ſeulement les ſurfaces décrites par les côtés HB, PA, &c. & dont la ſomme peut être appellée la ſurface convexe du ſphéroïde.

II°. Que ſi le ſphéroïde, au lieu d'être terminé aux points I, L, par des ſurfaces planes, comme on voit (*fig.* 142.) étoit terminé en pointes, ou par des cônes entiers, alors l'axe du ſphéroïde ſeroit plus grand que celui de la ſphere inſcrite.

## THÉORÊME VII.

733. *La ſurface de la Sphere eſt égale au produit de ſon axe par la circonférence d'un de ſes grands cercles* (fig. 142 & 143.).

DÉMONST. La ſphere peut être conſidérée comme un ſphéroïde formé par la révolution d'un po-

lygone régulier d'une infinité de côtés autour de ſon diamétre, qui n'eſt pas diſtingué du diamétre de la ſphere; or la ſurface de ce ſphéroïde eſt égale au produit de l'axe entier de la ſphere par la circonférence d'un grand cercle de la même ſphere : donc, &c.

*Corollaire I.*

734. La ſurface de la ſphere eſt quadruple de la ſurface d'un grand cercle de la même ſphere. Car la circonférence d'un grand cercle étant appellée $c$, le rayon $r$, & le diamétre $2r$, l'expreſſion de la ſurface ſphérique ſera $2rc$, & celle de la ſurface d'un grand cercle ſera $\frac{1}{2}rc$; or

$$2rc : \tfrac{1}{2}rc :: 2 : \tfrac{1}{2} :: 4 : \tfrac{1}{1} :: 4 : 1 ;$$ donc, &c.

*Corollaire II.*

735. La ſurface de la ſphere eſt égale à la ſurface convexe du cylindre circonſcrit (*fig.* 144.); car elle eſt égale au produit de ſon axe par la circonférence d'un de ſes grands cercles. Or la ſurface convexe du cylindre circonſcrit eſt égale (717.) au produit de ſon axe, qui eſt le même que celui de la ſphere, par la circonférence du cercle de ſa baſe, qui eſt la même que la circonférence d'un grand cercle de la ſphere : donc, &c.

*Corollaire III.*

736. La ſurface de la ſphere eſt à la ſurface totale du cylindre circonſcrit, comme 2 : 3. Car la ſurface de la ſphere eſt à la ſurface d'un de ſes grands cercles comme 4 : 1, comme nous venons de le voir. La ſurface totale du cylindre circonſcrit à la ſphere, eſt égale à la ſurface de la ſphere, plus à celle de ſes deux baſes, qui ſont deux grands cercles de la ſphere : donc la ſurface totale du cylindre circonſcrit eſt à la ſurface d'un grand cercle de la ſphere, comme 6 : 1; donc la ſurface de la

ſphere eſt à la ſurface totale du cylindre circonſcrit comme 4 : 6, ou comme 2 : 3.

*Corollaire IV.*

737. La ſurface, ſoit d'une zone, ſoit d'une calotte ſphérique eſt égale au produit de ſa hauteur par la circonférence d'un grand cercle de la ſphere, à laquelle appartiendra cette zone, ou cette calotte ſphérique. Car cette ſurface ſera la même que celle d'un cône tronqué circonſcrit à la ſphere, laquelle eſt, comme nous l'avons prouvé (731.), égale au produit de ſon axe (qui eſt ici le même que la hauteur,) par la circonférence d'un grand cercle de la ſphere.

*Corollaire V.*

738. La ſurface de la ſphere eſt au quarré de ſon diamétre, comme la circonférence eſt au diamétre. Car le diamétre étant $2r$, la ſurface de la ſphere eſt $2rc$, & le quarré du diamétre eſt $4rr$; on aura donc $2rc : 4rr :: 2r \times c : 2r \times 2r :: c : 2r$ (205.).

THÉORÊME VIII.

739. *La ſurface de la Sphére eſt à la ſurface totale du Cône équilatéral circonſcrit, comme* 4 : 9 (figures 145 & 146.).

DÉMONST. Soit le cône équilatéral DEF: dans le triangle rectangle CEB le cercle fait ſur CE eſt égal (622.) au cercle fait ſur CB, (qui eſt un grand cercle de la ſphere inſcrite), plus au cercle fait ſur BE, (qui eſt la baſe du cône équilatéral). Or le cercle fait ſur CB eſt le quart du cercle fait ſur CE, parce que CB eſt la moitié de CE = CA (519.): donc le cercle fait ſur BE eſt les $\frac{3}{4}$ du cercle fait ſur CE: donc un grand cercle de la ſphere inſcrite eſt à la baſe du cône équilatéral, comme 1 : 3; donc ſi dans ce rapport nous multiplions le premier terme par 4, pour avoir la ſurface de la ſphere inſcrite (734.), & le ſecond terme par 3, pour

avoir la ſurface totale du cône équilatéral (727.), nous aurons le rapport 4 : 9, qui ſera celui de la ſurface de la ſphere à la ſurface totale du cône équilatéral circonſcrit.

*Corollaire I.*

740. Donc ſi à une ſphere on circonſcrit un cylindre & un cône équilatéral, le rapport des ſurfaces totales de ces trois ſolides, ſphere, cylindre, & cône équilatéral, ſera 4 : 6 : 9. Or l'on a $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$ 4 : 6 : 9; d'où il ſuit que la ſurface totale du cylindre eſt moyenne proportionnelle entre la ſurface de la ſphere & celle du cône équilatéral.

*Corollaire II.*

741. La ſurface de la ſphere circonſcrite au cône équilatéral, eſt quadruple de la ſurface de la ſphere inſcrite au même cône. Car les ſurfaces des ſpheres ſont entr'elles comme celles de leurs grands cercles, puiſqu'elles ſont chacune quadruples de la ſurface de leurs grands cercles, & par conſéquent elles ſont entr'elles comme les cercles faits ſur les rayons CA, CB, (*fig.* 145.): or les rayons CA & CB ſont comme 2 : 1; donc leurs cercles ſont comme 4 : 1.

*Remarque.*

742. Tout ce que nous avons démontré ſur les raiſons compoſées & doublées des ſurfaces, peut être appliqué aux ſurfaces des ſolides, leſquelles ſont toujours le réſultat de deux dimenſions multipliées l'une par l'autre. D'où il ſuit

I°. Que lorſque les dimenſions de l'une ſont réciproques aux dimenſions de l'autre, les ſurfaces des deux ſolides ſont égales.

II°. Lorſque les dimenſions de l'une ſont proportionnelles aux dimenſions de l'autre, les ſurfaces ſont ſemblables.

III°. Lorſque les ſurfaces ſont ſemblables, elles

ſont entr'elles comme les quarrés des rayons ou des diamétres, ou comme les cercles fait ſur les rayons, ou ſur les diamétres.

## ARTICLE II.

### *De la Solidité des Solides.*

Les ſolides ſont ſuſceptibles d'évaluation, de meſure & de rapport, comme nous l'allons voir.

### PARAGRAPHE I.

### *De l'Évaluation des Solides.*

#### THÉORÊME I.

743. *La ſolidité du Priſme droit eſt égale au produit de ſa baſe par ſa hauteur* (fig. 131.).

DEMONST. On peut concevoir que le priſme eſt formé (664.) par le mouvement d'un plan EFGH (qui eſt ici la baſe du priſme), lequel monte paralléleſment à lui-même le long d'une ligne droite FC, perpendiculaire à ce plan, (laquelle eſt dans ce cas la hauteur du priſme), & qui, en s'élevant, laiſſe autant de traces, qu'il y a de points dans la hauteur; or, prendre la baſe autant de fois qu'il y a de points dans la hauteur, c'eſt multiplier la baſe par la hauteur: donc, &c.

#### *Corollaire I.*

744. Les traces que le plan générateur laiſſe en montant, peuvent être regardées comme les élémens du priſme: ainſi on peut concevoir le priſme comme compoſé d'une infinité de plans, ou ſurfaces ſemblables & égales, poſées les unes ſur les autres, dont les côtés ſont tous égaux, depuis la baſe ſupérieure juſqu'à la baſe inférieure. Si l'on repréſente un des côtés par $\infty$, la ſuite des côtés ſera repréſentée par la ſérie uniforme $\infty : \infty : \infty : \infty : \infty \ldots\ldots \infty$. Or les ſurfaces auxquelles appartiennent ces côtés, & qui compoſent la ſolidité du

priſme, étant toutes ſemblables, ſont entr'elles comme les quarrés des côtés homologues. La ſuite de ces ſurfaces ſera donc repréſentée par la ſuite des quarrés $\infty^2 : \infty^2 : \infty^2 : \infty^2 : \ldots\ldots \infty^2$, dont la ſomme $\infty^3$ donnera la ſolidité du priſme, & ſera l'expreſſion de la ſolidité.

*Corollaire II.*

745. La ſolidité du priſme eſt égale au produit de ſes trois dimenſions, longueur, largeur & profondeur. Car elle eſt égale au produit de ſa hauteur par ſa baſe, laquelle baſe eſt elle-même le produit de la longueur par la largeur.

*Corollaire III.*

746. Si l'on diviſe (*fig.* 147.) la hauteur AB du priſme en cinq parties égales, la largeur BG en quatre parties égales, & la profondeur CD en trois parties égales; la ſolidité du priſme ſe trouvera compoſée de petits priſmes élémentaires, dont le nombre ſera $5 \times 4 \times 3 = 60$, & c'eſt l'expreſſion *numérique* de la ſolidité du priſme.

*Corollaire IV.*

747. Si l'on appelle la hauteur du priſme $a$, ſa largeur $b$, & ſa profondeur $c$, l'expreſſion de la ſolidité du priſme ſera $P = abc$, & c'eſt l'expreſſion *algébrique* de la ſolidité du priſme.

Si les trois dimenſions du priſme étoient égales, alors on auroit $P = aaa$, ou $P = a^3$, & le priſme deviendroit un cube.

*Corollaire V.*

748. La hauteur du priſme étant exprimée par la ligne AB, la largeur par BC, & la profondeur par CD, l'évaluation de ſa ſolidité ſera $P = AB \times BC \times CD$, lequel produit eſt un ſolide, & c'eſt l'expreſſion *géométrique* de la ſolidité du priſme (*figure* 147.).

## Théorême II.

749. *Un prisme droit & un prisme oblique* (fig. 148.) *de même base & de même hauteur, sont égaux en solidité.*

Démonst. En effet supposant les deux prismes AC & BD compris entre deux plans paralleles & traversés par une infinité de plans paralleles intermédiaires, les sections que laisseront ces plans dans le prisme droit & dans le prisme oblique, représenteront les traces que laisse la base, en montant, soit pour former le prisme droit, soit pour former le prisme oblique. Or ces sections sont égales de part & d'autre en nombre & en grandeur : en nombre, parce que tous les plans qui traversent l'un des prismes, traversent aussi l'autre : en grandeur, parce que chacune de ces sections est égale à la base, laquelle est ou commune aux deux prismes, ou égales dans les deux prismes : donc, &c.

### *Corollaire I.*

750. Deux prismes quelconques ; deux parallélipipedes quelconques ; un parallélipipede droit & un parallélipipede oblique de même base & de même hauteur, sont égaux en solidité.

### *Corollaire II.*

751. Il suit aussi que deux prismes qui ont même hauteur, sont entr'eux comme leurs bases ; & ceux qui ont même base, sont entr'eux comme leurs hauteurs. En effet, si de deux prismes qui ont même base, l'un a une hauteur double ; il est clair qu'il sera double de l'autre : car il équivaut à deux prismes dont chacun seroit préciſément égal au prisme dont la hauteur n'est que sous-double.

Ce que nous disons des prismes doit s'entendre de tous les solides en général.

## Théorême III.

752. *La solidité de la Pyramide droite est le tiers de*

*la ſolidité d'un priſme de même baſe & de même hauteur.*

Démonst. Car la pyramide peut être cenſee compoſée d'une infinité de plans, ou ſurfaces ſemblables, dont les côtés conſécutifs croiſſent depuis le ſommet juſqu'à la baſe uniformément, ou comme les nombres $0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot \infty$.

Or les ſurfaces auxquelles appartiennent ces côtés ſont ſemblables, & ſont par conſéquent comme les quarrés de leurs côtés homologues: elles ſont donc comme les quarrés conſécutifs

$$0 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 16 \cdot 25 \cdot 36 \cdot \cdots \cdot \infty^2,$$

dont la ſomme donnera la ſolidité de la pyramide, & eſt $\frac{\infty^3}{3}$, comme nous l'avons prouvé (257.). Or l'expreſſion $\frac{\infty^3}{3}$ n'eſt que le tiers de $\infty^3$, qui eſt l'expreſſion de la ſolidité d'un priſme de même baſe & de même hauteur que la pyramide: donc la ſolidité de la pyramide, &c.

*Corollaire I.*

753. La ſolidité de la pyramide droite eſt égale au produit de ſa baſe par le tiers de ſa hauteur; ou au produit de ſa hauteur par le tiers de ſa baſe.

*Corollaire II.*

754. Deux pyramides de même hauteur & de même baſe ſont égales en ſolidité. Car elles ſont les tiers de deux priſmes de même baſe & de même hauteur, leſquels, comme nous l'avons prouvé (750.), ſont égaux en ſolidité.

*Corollaire III.*

755. La ſolidité du cylindre eſt égale au produit de ſa baſe par ſa hauteur. Car le cylindre n'eſt autre choſe qu'un priſme, dont les baſes ſupérieure & inférieure ſont des polygones d'une infinité de côtés; or la ſolidité du priſme eſt égale au produit de ſa baſe par ſa hauteur (743.): donc, &c.

*Corollaire IV.*

756. La ſolidité du cône eſt égale au produit de ſa baſe par le tiers de ſa hauteur. Car comme la ſolidité de la pyramide eſt le tiers de celle d'un priſme de même baſe & de même hauteur ; de même la ſolidité du cône eſt le tiers de celle d'un cylindre de même baſe & de même hauteur. Or le cylindre eſt égal au produit de ſa baſe par ſa hauteur, ou eſt $= abc$ : donc la ſolidité du cône en ſera le tiers, ou ſera $= \frac{1}{3} abc$.

THÉORÊME IV.

757. *La ſolidité du Polyedre régulier eſt égale au produit de ſa ſurface par le tiers de ſon rayon droit.*

DÉMONST. La ſolidité du polyedre régulier eſt égale à celle de toutes les pyramides auxquelles on peut concevoir (702.) le polyedre diviſé, en tirant des rayons du centre à tous les angles ſolides. Or toutes ces pyramides ont même baſe, & même hauteur à cauſe de la régularité du polyedre : donc leur ſolidité eſt égale à celle d'une pyramide unique, qui auroit pour hauteur la hauteur commune de toutes ces pyramides, & pour baſe la ſomme des baſes de toutes ces pyramides. Mais la ſolidité de cette pyramide unique eſt égale (753.) au produit de ſa baſe, qui eſt la ſurface du polyedre, par le tiers de ſa hauteur, qui eſt le rayon droit du polyedre : donc, &c.

*Corollaire I.*

758. La ſolidité de la ſphere eſt égale au produit de ſa ſurface par le tiers de ſon rayon. En effet la ſphere n'eſt autre choſe qu'un polyedre régulier, dont les faces ſont devenues infiniment petites & infinies en nombre. Or la ſolidité du polyedre régulier eſt égal au produit de ſa ſurface par le tiers de ſon rayon droit : donc, &c.

*Corollaire II.*

759. Donc la ſolidité de la ſphere eſt la même que celle d'un cône qui auroit pour hauteur le rayon de la ſphere, & pour baſe un cercle égal à la ſurface de la ſphere.

*Corollaire III.*

760. Donc la ſolidité de la ſphere eſt double de la ſolidité d'un cône qui auroit pour hauteur le diamétre de la ſphere, & pour baſe un grand cercle de la ſphere. Car elle eſt égale à celle d'un cône qui auroit pour hauteur le rayon de la ſphere, & pour baſe un cercle égal à la ſurface de la ſphere. Or ce cône eſt quadruple de celui qui ayant pour hauteur le rayon de la ſphere, auroit pour baſe un grand cercle de la ſphere; mais il ne ſera que double de celui qui aura pour hauteur le diamétre de la ſphere, & pour baſe un grand cercle de la ſphere (751.): donc, &c.

*Corollaire IV.*

761. La ſolidité de la ſphere eſt les deux tiers de la ſolidité du cylindre circonſcrit; c'eſt-à-dire, que la ſolidité de la ſphere eſt à la ſolidité du cylindre circonſcrit, comme 2 : 3, ou comme 4 : 6. Car la ſolidité de la ſphere eſt à la ſolidité du cône qui auroit pour hauteur l'axe de la ſphere, & pour baſe un grand cercle de la ſphere, comme 2 : 1 (760.) Or la ſolidité du cylindre circonſcrit, eſt à celle de ce même cône, comme 3 : 1 (756.): donc la ſphere eſt au cylindre circonſcrit, comme 2 : 3, ou comme 4 : 6.

*Corollaire V.*

762. Donc les rapports des ſolidités de la ſphere & du cylindre circonſcrit, ſont les mêmes que ceux de leurs ſurfaces.

Archimede, auteur de cette découverte, en fut

ſi charmé, qu'il voulut que ſur ſon tombeau on gravât une ſphere avec un cylindre circonſcrit.

*Corollaire VI.*

763. C'eſt pourquoi ſi à une ſphere on circonſcrit un cylindre, & ſi à ce cylindre on inſcrit un cône; c'eſt-à-dire, ſi l'on fait un cône qui ait même baſe & même hauteur que le cylindre, on aura trois ſolides, ſçavoir, un cylindre, une ſphere & un cône, dont les ſolidités ſeront dans les rapports 3 : 2 : 1, ou comme 1 : $\frac{2}{3}$ : $\frac{1}{3}$.

THÉORÊME V.

764. *La Sphere eſt au cône équilatéral circonſcrit, comme* 4 : 9 (fig. 145.).

DÉMONST. La baſe du cône équilatéral, qui eſt le cercle qui a BE pour rayon, eſt à un grand cercle de la ſphere inſcrite, ou au cercle qui a CB pour rayon, comme 3 : 1, comme nous l'avons prouvé (739.): d'ailleurs la ſurface de la ſphere inſcrite eſt à celle de ſon grand cercle, comme 4 : 1; donc la ſurface de la ſphere inſcrite eſt à la baſe du cône équilaréral, comme 4 : 3. Or la ſolidité de la ſphere eſt égale au produit de ſa ſurface par le tiers de ſon rayon, & la ſolidité du cône équilatéral eſt égale au produit de ſa baſe par le tiers de ſa hauteur, laquelle hauteur eſt triple du rayon; car puiſque AC=CD, on aura LC=CB=BA=LD; par conſéquent la ſolidité de la ſphere & du cône équilatéral ſeront comme 4 × 1 eſt à 3 × 3, ou comme 4 : 9.

*Corollaire.*

765. C'eſt pourquoi ſi à une ſphere on circonſcrit un cylindre & un cône équilatéral, les ſolidités de ces trois corps ſeront entr'elles comme 4 : 6 : 9, qui eſt le même rapport que celui qui a été trouvé entre les ſurfaces de ces mêmes corps.

PARAGRAPHE

## PARAGRAPHE II.

*De la Mesure des Solides.*

### THÉORÊME I.

766. *Le Polyédre peut être réduit en une Pyramide de même solidité que lui.*

DÉMONST. Si l'on fait une pyramide qui ait pour hauteur le rayon droit du polyédre, & pour base une surface égale à la surface du polyédre, nous avons prouvé (757.) que cette pyramide est égale en solidité au polyédre.

### THÉORÊME II.

767. *Cette Pyramide peut être réduite en un Prisme polygone de même solidité qu'elle.*

DÉMONST. Si sur une base polygone égale à la base de la pyramide, on construit un prisme qui ait le tiers de la hauteur de la pyramide; la solidité de ce prisme sera égale à celle de la pyramide : car la pyramide est le tiers du prisme de même base & de même hauteur (752.).

### THÉORÊME III.

768. *Ce Prisme polygone peut être réduit en un Parallélipipede de même solidité que lui.*

DÉMONST. Conservant la hauteur du prisme, on peut réduire sa base polygone en un parallélogramme de même surface (591. & 592.) : or en ce cas le prisme polygone & le parallélipipede ayant des bases de même surface & des hauteurs égales, seront égaux en solidité (750.) : donc, &c.

### THÉORÊME IV.

769. *Le Parallélipipede peut être réduit en un Parallélipipede rectangle de même solidité que lui.*

DÉMONST. Conservant la hauteur du parallélipipede, on peut réduire sa base parallélogramme en un rectangle de même surface : or en ce cas le

parallélipipede parallélogramme & le parallélipipede rectangle ayant des baſes égales & la même hauteur, ſeront égaux en ſolidité (750.) : donc, &c.

### Théorême V.

770. *Si les dimenſions du Parallélipipede rectangle ſont continuement proportionnelles, ou ſi l'on a* $\dddot{=} a:b:c$, *alors il pourra être réduit en un cube de même ſolidité que lui.*

Démonst. Comme en élevant au quarré la moyenne proportionnelle entre les deux dimenſions d'un rectangle, on a un quarré de même ſurface que le rectangle (594.) : de même en élevant au cube la dimenſion du parallélipipede, moyenne entre les deux autres, on aura un cube de même ſolidité que le parallélipipede. Car à cauſe de $\dddot{=} a:b:c$, on aura $ac=bb$ (202.) ; & multipliant par $b$, on aura $abc=b^3$ ; or $abc$ repréſente le parallélipipede, & $b^3$ repréſente le cube fait ſur la dimenſion $b$ moyenne entre $a$ & $c$ : donc, &c.

### *Corollaire I.*

771. Si les dimenſions du parallélipipede ne ſont pas continuement proportionnelles, ou ne ſont pas réductibles en des dimenſions continument proportionelles, alors le parallélipipede ne pourra pas être réduit en un cube de même ſolidité que lui. On pourra cependant toujours diviſer ce parallélipipede en un nombre quelconque de cubes, dont la ſomme ſera contenue dans la ſolidité du parallélipipede.

Pour cela il n'y a qu'à réduire la baſe rectangle du parallélipipede en un quarré de même ſurface, (ce qui transforme le parallélipipede rectangle en un priſme quadrangulaire de même ſolidité) & porter le côté de la baſe ſur la hauteur du priſme pour avoir le nombre de fois qu'il y eſt contenu ; alors le parallélipipede ſe trouvera diviſé en autant

de cubes, que ſa hauteur contiendra de fois le côté de la baſe.

Mais remarquez que cette diviſion du parallélipipede en un nombre quelconque de cubes ne ſera pas exacte, & qu'il y aura toujours un reſte.

*Corollaire II.*

772. Comme le quarré ne peut pas être réduit en une figure plus ſimple, & que par cette raiſon il eſt regardé comme la meſure la plus ſimple qu'on puiſſe employer pour meſurer les ſurfaces: de même le cube ne peut plus être réduit en un ſolide plus ſimple que lui, & par cette raiſon il eſt regardé comme la meſure la plus ſimple dont on puiſſe ſe ſervir pour meſurer les ſolidités. C'eſt pourquoi, comme on évalue les ſurfaces planes en toiſes, ou pieds, ou pouces quarrés: de même on évalue les ſolidités en toiſes, ou pieds, ou pouces cubiques.

## PARAGRAPHE III.

### *Du Rapport des Solidités.*

Les ſolides, de même que les lignes & les ſurfaces, ont un rapport entr'eux: mais il y a cette différence que le rapport qui eſt entre les lignes, eſt ſimple, parce qu'elles n'ont qu'une dimenſion; que le rapport qui eſt entre les ſurfaces, eſt compoſé de deux rapports, parce qu'elles ont deux dimenſions; & que le rapport qui eſt entre les ſolides, eſt compoſé de trois rapports, parce qu'ils ont trois dimenſions. Nous allons parler, 1°. du rapport des ſolides; 2°. des conſéquences qui réſultent du rapport des ſolides.

### NOMBRE I.

### *Du Rapport des Solides.*

THÉORÊME I.

773. *Les Solides ſont entr'eux en raiſon compoſée*

*de celles de leurs trois dimenſions, hauteur, largeur & profondeur.*

Démonst. Chaque ſolide eſt égal au produit de ſes trois dimenſions : donc les ſolides ſont entr'eux comme les produits de leurs trois dimenſions. Or les produits ſont (206.) en raiſon compoſée de celles de leurs racines, qui ſont ici les trois dimenſions ; ſçavoir, les hauteurs, les largeurs & les profondeurs : donc, &c.

C'eſt pourquoi ſi l'on appelle les ſolides P, $p$, les hauteurs A, $a$ ; les largeurs B, $b$ ; les profondeurs C, $c$, on aura, comme nous l'avons vu (747.) P = ABC, & $p = abc$ : donc P : $p$ :: ABC : $abc$, ou ce qui revient au même, $\frac{P}{p} = \frac{ABC}{abc}$. Or il eſt évident que l'on a $\frac{P}{p} = \frac{ABC}{abc} = \frac{A \times B \times C}{a \times b \times c} = \frac{A}{a} \times \frac{B}{b} \times \frac{C}{c}$ ; où l'on voit que la raiſon $\frac{ABC}{abc}$ eſt compoſée des raiſons $\frac{A}{a}, \frac{B}{b}, \frac{C}{c}$, qui ſont celles des hauteurs, des largeurs & des profondeurs des ſolides : donc, &c.

*Corollaire I.*

774. Les ſolides ſont en raiſon compoſée de celles de leurs baſes & de leurs hauteurs. Car chaque ſolide eſt égal (743.) au produit de ſa baſe par ſa hauteur : donc ils ſont entr'eux comme les produits des baſes par les hauteurs, & par conſéquent ſont en raiſon compoſée (206.) de celles des baſes & des hauteurs. C'eſt pourquoi nommant les hauteurs A, $a$, & les baſes BC, $bc$, on aura

P : $p$ :: ABC : $abc$.

*Corollaire II.*

775. Si deux ſolides ont même hauteur, ils ſont entr'eux comme leurs baſes, comme nous l'avons déjà dit (751.). Car la hauteur étant la même,

dans la proportion P : $p$ :: ABC : $abc$, on aura A = $a$; donc à leur place ſubſtituant l'unité, on aura P : $p$ :: BC : $bc$. Pareillement lorſque les baſes ſont les mêmes, on a BC = $bc$; donc leur ſubſtituant l'unité, on aura P : $p$ :: A : $a$.

*Corollaire III.*

776. Donc ſi la hauteur & la baſe d'un ſolide ſont réciproques à la hauteur & à la baſe d'un autre ſolide, alors les deux ſolides ſeront égaux. Car par l'hypothèſe A : $a$ :: $bc$ : BC ; donc ABC = $abc$, & par conſéquent P = $p$.

*Corollaire IV.*

777. Les polyédres réguliers ſont en raiſon compoſées de celles de leurs rayons droits & de leurs ſurfaces. Car chaque polyédre régulier eſt (757.) égal au produit de ſa ſurface par le tiers de ſon rayon droit: donc deux polyédres réguliers ſont entr'eux comme les produits de leurs ſurfaces par les rayons droits. Or les produits ſont en raiſon compoſée de leurs racines : donc, &c.

THÉORÊME II.

778. *Les Solides ſemblables ſont en raiſon triplée de celles de leurs dimenſions homologues.*

DÉMONST. Les ſolides P, $p$, ſont en raiſon compoſée (773.) de leurs dimenſions homologues; c'eſt-à-dire, l'on a P : $p$ :: ABC : $abc$. Or à cauſe de la ſimilitude des ſolides, les dimenſions homologues ſont proportionnelles ; c'eſt-à-dire, l'on a la proportionnalité A : $a$ :: B : $b$ :: C : $c$; donc la raiſon qui eſt compoſée de ces trois raiſons égales, ſçavoir, la raiſon ABC : $abc$, eſt une raiſon triplée.

*Corollaire I.*

779. Donc les ſolides ſemblables ſont entr'eux comme les cubes de leurs côtés homologues ; c'eſt-à-dire, l'on aura P : $p$ :: $A^3$ : $a^3$ :: $B^3$ : $b^3$ :: $C^3$ : $c^3$.

Car ils ſont en raiſon triplée de celles de leurs dimenſions homologues. Or une raiſon triplée eſt égale (206.) à la raiſon qu'ont entr'eux les cubes des termes de chacune des trois raiſons compoſantes : donc, &c.

*Corollaire II.*

780. Les polyédres réguliers ſemblables ſont entr'eux comme les cubes de leurs rayons : car les rayons ſont des dimenſions homologues dans les polyédres réguliers ſemblables.

*Corollaire III.*

781. Les ſpheres ſont entr'elles comme les cubes de leurs rayons, ou de leurs diamétres ; car les ſphéres ſont des polyédres réguliers ſemblables, qui ont une infinité de faces infiniment petites.

## NOMBRE II.

### *Conſéquences qui réſultent du Rapport des Solides.*

### THÉORÊME I.

782. *Deux Solides ſemblables, dont les dimenſions homologues ſont commenſurables, pourront toujours être repréſentés par des nombres cubiques.*

DÉMONST. Les ſolides ſemblables ſont entr'eux comme les cubes de leurs dimenſions homologues. Or ces dimenſions homologues étant ſuppoſées commenſurables, leurs cubes ſont toujours repréſentés par des nombres cubiques. Car ſi les dimenſions homologues ſont comme 1 & 2, les cubes ſeront comme 1 & 8 ; ſi les dimenſions homologues ſont comme 1 & 3, les cubes ſeront comme 1 & 27.

Par conſéquent les dimenſions homologues des ſolides ſemblables ſont toujours entr'elles comme les racines de deux cubes.

### THÉORÊME II.

783. *Une Racine cubique eſt toujours la premiere de deux moyennes proportionnelles entre l'unité & le cube.*

DÉMONST. Le cube eſt en raiſon triplée de ſa racine (206.) : donc il eſt toujours répréſenté par le quatriéme terme d'une progreſſion géométrique quelconque $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$ 1 : 2 : 4 : 8, ou $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$ 1 : 3 : 9 : 27, ou, &c. Car nous avons prouvé (242.) que dans une progreſſion, le premier & le quatriéme termes étoient en raiſon triplée des deux premiers. Or dans toute progreſſion géométrique, le premier terme étant l'unité, le ſecond eſt la racine, le troiſiéme eſt le quarré, & le quatriéme eſt le cube ; mais de plus le ſecond & le troiſiéme termes ſont moyens proportionnels entre l'unité & le cube : donc, &c.

*Corollaire.*

784. Par conſéquent lorſqu'on a un cube donné, pour en trouver la racine, il n'y a qu'à chercher deux moyennes proportionnelles entre l'unité & le cube donné. Or pour trouver deux moyennes proportionnelles entre deux quantités, *par ex* : $a$ & $b$, on fait la progreſſion $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$ $a : x : y : b$ : donc (242.) $a : b :: a^3 : x^3$ : donc (199.) $ax^3 = a^3b$, & diviſant par $a$, on aura $x^3 = a^2b$ : donc $x = \sqrt[3]{aab}$, & c'eſt le premier moyen proportionnel. Maintenant il ſera facile de trouver le ſecond moyen proportionnel, qui eſt le troiſiéme terme de la progreſſion. Car connoiſſant le premier terme, le ſecond & le quatriéme, il ne faudra plus, pour trouver le troiſiéme, que chercher une moyenne proportionnelle entre le ſecond & le quatriéme terme, ſuivant la regle de trois.

## THÉORÊME III.

785. *Un Cube double d'un autre cube donné eſt une quantité impoſſible arithmétiquement.*

DÉMONST. Suppoſons le cube donné $a^3$, le cube qui en ſeroit double, ſeroit $2a^3$ : donc pour conſtruire le cube $2a^3$, il faudroit trouver deux moyen-

nes proportionnelles entre 1 & $2a^3$ ; ou, ce qui revient au même, il faudroit trouver la racine cubique & numérique de la quantité $2a^3$. Or la quantité $2a^3$ n'a d'autre racine que $\sqrt[3]{2a^3}$, ou $a\sqrt[3]{2}$, laquelle n'eſt pas commenſurable ; parce que 2 n'étant point un cube parfait, $\sqrt[3]{2}$ eſt une quantité impoſſible arithmétiquement : donc, &c.

## THÉORÊME IV.

786. *Un Cube double d'un Cube donné n'eſt pas non plus une quantité poſſible géométriquement ; en ne ſe ſervant que de la regle & du compas, ou n'employant que la ligne droite & le cercle.*

DÉMONST. Car en n'employant que la regle & le compas, ou la ligne droite & le cercle ; on peut bien trouver une moyenne proportionnelle entre 1 & 2, ou 1 & 3, ou 1 & 4, &c. mais on n'en peut pas trouver deux.

### *Corollaire.*

787. Une quantité triple, quadruple, quintuple, &c. d'un cube, n'eſt pas elle-même un cube. En général une quantité cubique multipliée par une quantité non cubique, ne peut pas être un cube parfait.

### *Remarque.*

788. Mais en ſe ſervant des lignes courbes, on peut trouver & conſtruire un cube double d'un autre cube ; parce que combinant le *cercle* avec la *parabole*, on peut trouver deux lignes moyennes proportionnelles entre deux autres lignes données : c'eſt pourquoi le problême de la duplication du cube, qui étoit ſi fameux chez les Anciens, eſt réſoluble dans la Géométrie des courbes.

# SECONDE PARTIE.

## *Élémens de la Géométrie Pratique.*

LA Géométrie pratique eſt celle qui opere ſur ſon objet. Le but de la Géométrie ſpéculative eſt de démontrer ; celui de la Géométrie pratique eſt d'opérer & d'exécuter. On y diſtingue deux objets, ſçavoir, 1°. le calcul ; 2°. les opérations.

## SECTION I.

### *Du Calcul de la Géométrie pratique.*

LE Calcul de la Géométrie pratique conſiſte dans des méthodes ſimples & abrégées, qu'elle a introduites dans le calcul ordinaire, pour en rendre l'exécution plus facile & plus prompte. On diſtingue deux ſortes de calculs dans la Géométrie pratique : 1°. le calcul décimal ; 2°. le calcul logarithmique.

# CHAPITRE I.

## *Du Calcul Décimal.*

LE calcul décimal a été trouvé pour obvier à l'inconvénient qui ſe rencontre dans la diviſion & l'extraction lorſqu'elles ne ſont pas juſtes, mais qu'elles laiſſent des reſtes qu'on voudroit négliger. Car plus les nombres que l'on diviſe, ou dont on veut extraire une racine, ſont petits, moins on peut négliger les reſtes; *par ex:* ſi l'on diviſe 5 par 2, on aura $\frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2}$, où l'on a la fraction, ou le reſte $\frac{1}{2}$, qu'on ne peut négliger ſans une erreur ſenſible, parce que cette fraction ou ce reſte eſt une quantité de quelque conſéquence par rapport à un petit nombre comme 5. Mais ſi l'on avoit à diviſer 501 par 2, on auroit $\frac{501}{2} = 250 + \frac{1}{2}$, où l'on voit que la fraction, ou le reſte $\frac{1}{2}$ peut être négligé ſans erreur ſenſible, parce qu'elle eſt de peu de conſéquence par rapport à un grand nombre, tel que 501. Il faut dire la même choſe pour l'extraction des racines.

I°. Afin de pouvoir négliger ſans inconvénient les fractions qui ſe trouvent de reſte après les diviſions, les Géométres ont imaginé une méthode pour transformer les petits nombres qu'ils auroient à diviſer, en des nombres très-conſidérables. Pour cela ils ſont partis de ce principe, que *plus les parties d'un tout diminuent en grandeur, plus elles augmentent en nombre.*

II°. Ils diviſent donc la petite quantité dont ils veulent négliger les reſtes, par un très-grand nombre quelconque, ce qui diminue la grandeur des parties, mais en augmente conſidérablement le nombre: de plus ils la multiplient auſſi par le même nombre qui a diviſé, pour conſerver à la quantité ſa même va-

leur; ce qui la transforme en une expreſſion compoſée d'un grand nombre de chiffres: d'où il réſulte que les reſtes que laiſſeroit la diviſion, ou l'extraction qu'on feroit, ſeroient de peu de conſéquence.

III°. Dans la pratique il eſt à propos de multiplier & de diviſer la quantité dont on veut changer l'expreſſion, par un grand nombre plutôt que par un petit; parce que plus eſt grand le nombre par lequel on transforme la quantité, plus les parties de cette quantité deviennent petites, & les reſtes que l'on néglige, ſont de peu de conſéquence.

IV°. Il vaut mieux multiplier & diviſer la quantité par un nombre décimal quelconque, 10, 100, 1000, 10000, &c. que par tout autre nombre; par la raiſon que la multiplication & la diviſion par les nombres décimaux ſont plus aiſées & plus promptes. C'eſt pourquoi ſi je veux transformer en un grand nombre les quantités 3, 25, 48, &c. j'aurai, en multipliant & diviſant par 10, les quantités $\frac{30}{10}$, $\frac{250}{10}$, $\frac{480}{10}$. Or ces fractions s'expriment d'une façon abrégée comme ceci 3 · 0; 25 · 0; 48 · 0, &c. en intercallant un point qui ſoit ſuivi d'autant de caracteres, qu'il y a de zero dans le dénominateur décimal ſous-entendu. Pareillement ſi je multiplie & ſi je diviſe par 100 les quantités 3, 25, 48, &c. elles deviendront $\frac{300}{100}$, $\frac{2500}{100}$, $\frac{4800}{100}$, ou 3 · 00; 23 · 00; 48 · 00, &c.

V°. Les quantités 3 · 0, 25 · 0, 48 · 0, &c. ou 3 · 00, 25 · 00, ou d'autres ſemblables, ſont ce qu'on appelle fractions décimales: *fractions*, parce qu'elles ont un numérateur & un dénominateur; *décimales*, parce que leur dénominateur eſt toujours un nombre décimal, & le calcul qui opere ſur ces fractions, s'appelle *calcul décimal*, ou *calcul des décimales*. Or comme dans les fractions décimales ainſi exprimées, le dénominateur eſt toujours ſous-entendu, l'expreſſion de la fraction ſe trouve changée en

celle d'entiers, ce qui en rend le calcul plus aisé & plus commode.

VI°. Pour la même raiſon, ſi j'ai les fractions $\frac{3}{10}$, $\frac{25}{10}$, $\frac{48}{10}$, &c. je puis les écrire d'une façon abrégée, comme ceci, 0 · 3, 2 · 5, 4 · 8, &c.; il en eſt de même des fractions $\frac{3}{100}$, $\frac{25}{100}$, $\frac{950}{1000}$, &c. qui ſont la même choſe que 0 · 03, 0 · 25, 0 · 48, 0 · 950; ce qui ſe fait en mettant un zero avant le point pour le rendre plus remarquable, & après le point des zero placés de façon que l'ordre & le rang des chiffres ſoient conſervés.

Ainſi l'on voit que tout l'art du calcul décimal conſiſte à réduire les petits nombres en fractions décimales, transformer ces fractions décimales en l'expreſſion d'entiers, & par ce moyen en rendre le calcul auſſi aiſé & auſſi commode que celui des nombres entiers eux-mêmes.

## PRINCIPE I.

789. Une quantité, *par ex:* 3, multipliée & diviſée par différens nombres pris ſucceſſivement, conſerve toujours ſa même valeur, *par ex:* les quantités $\frac{30}{10}$, $\frac{300}{100}$, $\frac{3000}{1000}$, &c. ſont égales entr'elles, & ſont chacune = 3; par conſéquent les fractions 3 · 0, 3 · 00, 3 · 000, 3 · 0000, &c. quoique différentes en apparence, ſont cependant égales.

## PRINCIPE II.

790. Mais une quantité, *par ex:* 3, diviſée ſimplement par différens nombres pris ſucceſſivement, ne conſerve plus la même valeur, *par ex:* les quantités $\frac{3}{10}$, $\frac{3}{100}$, $\frac{3}{1000}$, ne ſont point égales, & par conſéquent les fractions 0 · 3, 0 · 03, 0 · 003, &c. ſont de différente valeur.

### *Corollaire.*

791. Il ſuit de ce que nous venons de dire,

I°. Que l'expreſſion 3 · 0 n'eſt pas la même choſe que 0 · 3 ; car 3 · 0 = $\frac{30}{10}$, & 0 · 3 = $\frac{3}{10}$.

II°. Pareillement l'expreſſion 0 · 05 n'eſt pas la même choſe que 0 · 50 ; car la quantité 0 · 05 = $\frac{5}{100}$ au lieu que 0 · 50 = $\frac{50}{100}$.

III°. Lorſque dans une fraction décimale il ne ſe trouve que des zero après le point, la valeur de la fraction ne s'eſtime que par les chiffres qui précédent le point, & alors le nombre des zero qui ſuivent le point, peut être augmenté ou diminué, ſans changer la valeur de la fraction ; ainſi l'on a 45 · 0 = 45 · 00000.

IV°. Mais lorſqu'après le point il ſe trouve des chiffres poſitifs ; pour avoir la valeur de la fraction, il faut avoir égard, & au nombre de ces chiffres, & au rang qu'ils tiennent ; c'eſt pourquoi 45 · 0 n'eſt pas égal à 45 · 3. Car 45 · 0 = $\frac{450}{10}$, au lieu que 45 · 3 = $\frac{453}{10}$. Pareillement 45 · 30 n'eſt pas la même choſe que 45 · 03 ; car 45 · 30 = $\frac{4530}{100}$, ou $\frac{453}{10}$, au lieu que 45 · 03 = $\frac{4503}{100}$. Dans ce cas on ne peut, ſans changer la valeur, augmenter ou diminuer que les zero qui ſe trouvent après tous les chiffres poſitifs qui ſuivent le point.

V°. On peut pour plus grande commodité retrancher les derniers chiffres d'une fraction décimale ; mais alors il faut ajouter une unité au chiffre qui reſte le dernier, lorſque le premier des chiffres qu'on néglige, ſurpaſſe 5 ; *par ex :* ſi dans la fraction 0 · 4864, je néglige les deux derniers chiffres, je dois écrire 0 · 49, & non pas 0 · 48. Car 0 · 49 = 0 · 4900, & 0 · 48 = 0 · 4800 : or 0 · 4900 approche plus près de la valeur 0 · 4864, que 0 · 4800.

### *Regle I.*

792. Pour réduire un nombre entier en fraction décimale, il n'y a qu'à mettre après l'entier un point ſuivi d'autant de zero que l'on voudra ; *par ex :* l'en-

tier 37 ſe transforme en $37 \cdot 0$, ou $37 \cdot 00$, ou $37 \cdot 000$, &c. En effet $37 \cdot 0 = \frac{370}{10} = 37$. Pareillement $37 \cdot 00 = \frac{3700}{100} = 37$.

### *Regle II.*

793. Si l'on a un nombre entier joint à une fraction, *par ex :* $23\frac{4}{10}$, que l'on veuille réduire en une fraction décimale, il eſt clair que puiſque $\frac{4}{10} = 0 \cdot 4$, l'on aura $23\frac{4}{10} = 23 \cdot 4$: par la même raiſon on aura auſſi $23\frac{4}{100} = 23 \cdot 04$: pareillement l'on a $23\frac{4}{1000} = 23 \cdot 004$, & ainſi du reſte, inſérant toujours avant le 4 des zero, de façon qu'après le point il ſe trouve autant de chiffres, ou caracteres, qu'il y aura de zero au dénominateur.

### *Regle III.*

794. Si l'on veut réduire une fraction ordinaire en une fraction décimale ; il faut d'abord la réduire à un dénominateur qui ſoit un nombre décimal lorſque cette réduction eſt poſſible. La fraction étant devenue décimale, s'écrira ſuivant la méthode abrégée, en intercalant un point qui ſoit ſuivi, &c. ; *par ex :* $\frac{2}{4}$ ſe réduit en fraction décimale, en faiſant $\frac{2}{4} = \frac{20}{40} = \frac{1}{10} = 0 \cdot 5$.

### *Corollaire.*

795. Il ſuit de ce que nous venons de dire que les chiffres qui précédent le point, peuvent être regardés comme des nombres entiers, & que les décimales ne ſont exprimées que par les chiffres qui ſuivent le point ; *par ex :* la fraction $4 \cdot 05 = 4 + \frac{1}{100}$ ; car $4 \cdot 05 = \frac{405}{100} = 4 + \frac{5}{100} = 4 + \frac{1}{20}$.

### *Regle IV.*

796. Les fractions décimales ſont ſuſceptibles des opérations de l'Arithmétique, leſquelles ſont pour les fractions décimales préciſément les mêmes que celles qui ſe font ſur les nombres entiers ; il y a ſeulement quelques précautions à prendre pour placer le

point qui ſéprre les nombres entiers des nombres fractionnaires.

I°. L'addition des décimales ſe fait en écrivant les fractions les unes ſous les autres, de façon que les points ſoient en colonne, & en prenant la ſomme du tout ; *par ex :*

| | | |
|---|---|---|
| 34 · 012 | | 34 · 012 |
| 242 · 71 | ou | 242 · 710 |
| 3 · 8 | | 3 · 800 |
| 280 · 522 | | 280 · 522 |

La raiſon de cette opération s'appercevra aiſément, en réduiſant les fractions décimales à leur état naturel de fraction ; *par ex :* la ſomme des fractions décimales 2 · 03 & 3 · 40, doit être 5. · 43.

En effet $2 \cdot 03 = 2 + \frac{3}{100} = \frac{200}{100} + \frac{3}{100} = \frac{203}{100}$ ;

pareillement $3 \cdot 40 = 3 + \frac{40}{100} = \frac{300}{100} + \frac{40}{100} = \frac{340}{100}$ :

or la ſomme de $\frac{203}{100} + \frac{140}{100}$ eſt $= \frac{343}{100} = 5 \cdot 43$ :

donc, &c.

II°. La ſouſtraction ſe fait en arrangeant les quantités données de la même maniere que ci-deſſus, & en opérant à l'ordinaire ; *par ex :*

| | | |
|---|---|---|
| 68 · 304 | | 68 · 304 |
| 36 · 7 | ou | 36 · 700 |
| 31 · 604 | | 31 · 604 |

La raiſon de cette opération ſe trouvera de la même maniere que pour l'addition.

III°. La multiplication ſe fait comme celle des nombres entiers, obſervant que dans le produit total il faut ſéparer par un point autant de chiffres ſur la droite, qu'il y a de décimales, tant dans le multiplicande que dans le multiplicateur ; en ſorte

que si le produit total ne contenoit pas autant de chiffres qu'il y a de décimales dans le multiplicande & le multiplicateur, il faudroit mettre sur la gauche un nombre suffisant de zero ; par *par ex :*

| | |
|---|---|
| 43 · 7 | 0 · 7 |
| 13 · 0 | 0 · 12 |
| 00 0 | 14 |
| 1311 | 7 |
| 437 | 0 · 084 |
| 568 · 10 | |

La raison de cette opération se trouvera de la même maniere.

IV°. La division se fait aussi de la même maniere que celle des nombres entiers: mais il faut remarquer, 1°. qu'après avoir trouvé le quotient, il faut séparer par un point autant de chiffres sur la droite, qu'il se trouve plus de décimales dans le dividende que dans le diviseur : 2°. s'il se trouve plus de décimales dans le diviseur que dans le dividende, alors il faut ajouter aux décimales du dividende autant de zero que l'on voudra; 3°. si l'on en ajoute précisément pour qu'il y ait autant de décimales dans le dividende que dans le diviseur, alors le quotient sera sans décimales ; & si l'on en ajoute de plus, le quotient aura un nombre de décimales égale à ce surplus. Voici des exemples :

$\frac{8.441}{1.22} = 2 \cdot 6$; $\frac{24.612000}{4.3600} = 534 \cdot 20$.

La raison de cette opération se trouvera de la même façon que pour les opérations précédentes.

CHAPITRE

# CHAPITRE II.

## *Du Calcul Logarithmique.*

I°. ON ſçait que l'addition & la ſouſtraction ſont des opérations plus ſimples que la multiplication & la diviſion ; pareillement que la multiplication & la diviſion ſont un calcul moins compoſé que l'exaltation & l'extraction. Il ſeroit donc avantageux de trouver une méthode qui pût changer en additions & ſouſtractions toutes les eſpéces de multiplications & de diviſions ; qui pût pareillement ſubſtituer la multiplication & la diviſion à la place de l'exaltation & de l'extraction ; & l'on voit qu'une pareille méthode ſimplifieroit beaucoup les opérations.

II°. Or cette méthode a été trouvée par le fameux Nepper, Géométre Ecoſſois, lequel a donné l'art de ſubſtituer des nombres artificiels à la place des nombre ordinaires, pour faire ſur ceux-là, par voie d'addition & de ſouſtraction, ce qu'il faudroit faire ſur ceux-ci par voie de multiplication & de diviſion ; & de faire pareillement ſur les premiers par voie de multiplication & de diviſion, ce qu'on ſeroit obligé de faire ſur les derniers par voie d'exaltation & d'extraction.

III°. Ces nombres artificiels que l'on ſubſtitue à la place des nombres ordinaires, ſont ce que l'on appelle *Logarithmes*, & l'uſage qu'on en fait, s'appelle *Calcul logarithmique*, lequel eſt tout fondé ſur la nature des deux progreſſions *arithmétique* & *géométrique*.

## PRINCIPE I.

797. Dans toute progreſſion géométrique, dont les termes ſont affectés d'expoſans, les expoſans

ſont en progreſſion arithmétique, *par ex:* ſi j'ai la progreſſion géométrique,

$$\dddot{\cdot}\,a^0 : a^1 : a^2 : a^3 : a^4 : a^5 : a^6 : \&c.$$

les expoſans donneront la progreſſion arithmétique

$$\dddot{\cdot}\,0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6, \&c.$$

enſorte que ſi je ſuppoſe $a=2$, j'aurai les deux progreſſions ſuivantes,

$$\dddot{\cdot}\,1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64, \&c.$$
$$\dddot{\cdot}\,0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6, \&c.$$

dont l'une eſt la progreſſion des termes, & l'autre celle des expoſans, & que, pour plus grande facilité, on écrit en deux colonnes, comme ceci:

| | |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 4 |
| 3 | 8 |
| 4 | 16 |
| 5 | 32 |
| 6 | 64 |
| 7 | 128 |
| 8 | 256 |
| &c. | &c. |

## PRINCIPE II.

798. Les opérations qui ſe font par voie de multiplication & de diviſion ſur les termes de la progreſſion géométrique, ſe font par voie d'addition & de ſouſtraction ſur les termes correſpondans de la progreſſion arithmétique; & celles qui ſe font par voie d'exaltation & d'extraction ſur les premiers, ſe font par la multiplication & la diviſion ſur les deniers.

I°. Dans la progreſſion géométrique, ſi je prends les quatre termes $1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8$, le produit des deux moyens $2 \times 4 = 1 \times 8$, produit des extrêmes; au lieu que prenant les termes correſpondans $0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3$ dans la progreſſion arithmétique, on a la ſomme

des moyens $1 + 2 = 0 + 3$, ſomme des extrêmes.

II°. Pareillement ſi dans la progreſſion géométrique, je prends le produit des moyens $4 \times 8 = 32$; & que je le diviſe par 2, j'aurai $\frac{32}{2} = 16$, qui eſt le quatriéme terme de la proportion $2 : 4 :: 8 : 16$; au lieu que dans la progreſſion arithmétique, il faut prendre la ſomme des moyens $2 + 3 = 5$, & en retrancher le terme 1, pour avoir le dernier terme de la proportion arithmétique correſpondante $1 \cdot 2 :: 3 \cdot 4$, que j'ai priſe dans la progreſſion arithmétique.

III°. Si dans la progreſſion géométrique j'éleve le ſecond terme 2 à la troiſiéme puiſſance, j'aurai le quatriéme terme 8 : mais dans la progreſſion arithmétique, au lieu d'élever à la troiſiéme puiſſance le ſecond terme 1, je n'ai qu'à le tripler, ou le multiplier par 3, & j'aurai le quatriéme terme 3 vis-à-vis de 8.

IV°. Si dans la progreſſion géométrique je veux extraire la racine troiſiéme du ſeptiéme terme 64, j'aurai pour racine le nombre 4, qui eſt le troiſieme terme de la progreſſion : mais dans la progreſſion arithmétique je n'ai qu'à diviſer par 3 le ſeptiéme terme 6, & j'aurai le troiſiéme terme 2 de la progreſſion vis-à-vis de 4.

*Corollaire.*

799. Les termes de la progreſſion arithmétique s'appellent les *Logarithmes* des termes de la progreſſion géométrique, auxquels ils répondent, & dont ils peuvent être regardés comme les expoſans. Il ſuit de tout ce que nous venons de dire;

I°. Que le produit de deux nombres répond à la ſomme de leurs logarithmes.

II°. Que le quotient de deux nombres répond à la différence de leurs logarithmes.

III°. Que la puiſſance d'un nombre répond au pro-

duit de ſon logarithme, multiplié par l'expoſant de cette puiſſance.

IV°. Que la racine d'un nombre répond au quotient de ſon logarithme, diviſé par l'expoſant de cette racine.

## PRINCIPE III.

800. Si dans la progreſſion géométrique $\div\div a^0 : a^1 : a^2 : a^3 : a^4$, &c. ou $\div\div 1 : 2 : 4 : 8 : 16$, &c. l'on inſéroit des moyens proportionnels entre deux termes immédiatement conſécutifs, *par ex:* entre 1 & 2, ou 2 & 4; ces moyens proportionnels auroient, ainſi que les autres termes, des expoſans qui ſeroient leurs logarithmes.

### *Corollaire.*

801. Donc ſi l'on prend des moyens proportionnels géométriques entre les termes immédiatement conſécutifs de la progreſſion géométrique, & ſi l'on prend auſſi autant de moyens proportionnels arithmétiques entre les termes immédiatement conſécutifs de la progreſſion arithmétique; les moyens proportionnels arithmétiques ſeront les logarithmes des moyens proportionnels géométriques correſpondans.

Or c'eſt ſur ces principes que les Géométres ont conſtruit les tables des logarithmes, comme nous l'allons voir.

### *Propoſition I.*

801. Pour la conſtruction des tables, il eſt libre de choiſir telle progreſſion géométrique que l'on voudra; mais il faut que la progreſſion géométrique contienne tous les nombres naturels; autrement la table des logarithmes ne ſeroit point générale. Si l'on choiſiſſoit donc la progreſſion double, $1 : 2 : 4 : 8 : 16$, &c. il faudroit inſérer des moyens géométriques entre 1 & 2, 2 & 4, 4 & 8; &c. afin que dans l'intervalle qui ſépare ces termes,

on puiſſe trouver les nombres naturels intermédiaires.

Les Géométres ont trouvé qu'il étoit plus commode de prendre la progreſſion géométrique décuple 1 · 10 · 1000, &c. plutôt que toute autre progreſſion ; & ils ont pris pour progreſſion arithmétique la progreſſion des nombres naturels, commençant par zero, comme l'on voit dans les colonnes ſuivantes.

| | |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 10 |
| 2 | 100 |
| 3 | 1000 |
| 4 | 10000 |
| 5 | 100000 |
| &c. | &c. |

*Propoſition II.*

802. Les logarithmes des nombres 1, 10, 100, 1000, &c. de la progreſſion décuple étant 0 · 1 · 2 · 3, &c. il s'enſuit que les logarithmes des nombres intermédiaires de la progreſſion décuple ne peuvent être qu'entre 0 & 1, 1 & 2, 2 & 3, &c. Or on ne peut avoir que des fractions entre 0 & 1, 1 & 2, 2 & 3.

Les Géométres, pour éviter l'inconvénient des fractions, ont réduit les logarithmes des termes de la progreſſion décuple en fractions décimales, dont le dénominateur eſt 1000000 ; & par ce moyen les deux colonnes précédentes ſe changent en celles-ci.

| | |
|---|---|
| 0 · 0000000 | 1 |
| 1 · 0000000 | 10 |
| 2 · 0000000 | 100 |
| 3 · 0000000 | 1000 |
| 4 · 0000000 | 10000 |

& ainſi de ſuite.

*Corollaire.*

803. Il eſt évident,

I°. Que les logarithmes de tous les nombres compris entre 1 & 10, commencent par zéro ; que les logarithmes de tous les nombres compris entre 10 & 100, commencent par 1 ; que les logarithmes de tous les nombres compris entre 100 & 1000, commencent par 2, &c. Ce premier chiffre 0, ou 1, ou 2, &c. qui précéde toujours le point dans la fraction décimale, s'appelle la *caractériſtique* du logarithme.

II°. Que le nombre qui répond à un logarithme contient autant de caracteres, ou chiffres, & un de plus, qu'il y a d'unités dans la caractériſtique ; & par conſéquent la caractériſtique du logarithme ſervira à faire connoître de combien de caracteres eſt compoſé le nombre dont il eſt logarithme.

III°. Que c'eſt une même choſe d'ajouter une unité à la caractériſtique d'un logarithme, ou de multiplier le nombre naturel qui lui répond par 10 ; d'ajouter deux unités à la caractériſtique, ou de multiplier le nombre correſpondant par 100, & ainſi de ſuite.

IV°. Que pareillement retrancher une unité, deux unités, trois unités, &c. de la caractériſtique d'un logarithme, c'eſt diviſer le nombre correſpondant par 10, par 100, & par 1000, &c.

*Propoſition III.*

804. Pour trouver les logarithmes de tous les nombres naturels, l'état de la queſtion ſe réduit, comme on voit, à chercher des moyens géométriques entre les termes conſécutifs 1, 10, 100, &c. de la progreſſion géométrique ; & des moyens arithmétiques entre les termes correſpondans 0 · 0000000, 1 · 0000000, 2 · 0000000, &c. de la progreſſion

arithmétique. Car les nombres intermédiaires 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ſe trouveront après un certain nombre d'opérations, parmi les moyens géométriques; & l'on trouvera leurs logarithmes, en prenant les moyens arithmétiques qui leur ſont correſpondans.

Voici un exemple. Je cherche quel doit être le logarithme du nombre 9: pour le trouver, il faut chercher entre 1 & 10 des moyens proportionnels géométriques, & leurs logarithmes, juſqu'à ce que le nombre 9 ſe rencontre parmi les moyens géométriques.

I°. Les logarithmes des nombres 1 & 10 ſont 0·0000000 & 1·0000000: j'ajoute enſemble ces deux logarithmes; leur ſomme eſt 1·000000, & la moitié de cette ſomme, ſçavoir, 5000000, ſera le logarithme du moyen proportionnel géométrique entre 1 & 10, quel qu'il ſoit.

II°. Maintenant pour avoir le moyen proportionnel géométrique entre 1 & 10, il eſt néceſſaire d'extraire la racine quarrée de 10, qui n'a point de racine juſte & exacte; il faut au moins en approcher de ſi près que la racine que l'on trouvera, differe très-peu de la véritable. C'eſt pourquoi je transforme les deux nombres 1 & 10 en fractions décimales, 1·0000000, 10·0000000, & je cherche un moyen géométrique entre ces deux nombres, en prenant leur produit & la racine quarrée de ce produit. Or cette racine eſt 3·1622777, dont le quarré ne differe preſque point de 10: donc le nombre 3·1622777 eſt un premier moyen géométrique entre 1 & 10, & ſon logarithme eſt .5000000, qui eſt un premier moyen arithmétique entre 0·0000000 & 1·0000000.

III° Mais cette racine, ou ce premier moyen géométrique trouvé, n'eſt pas le nombre dont je cherche le logarithme; ce nombre eſt 9·0000000, ou 9 plus grand que cette racine trouvée, mais plus

plus petit que 10, ou 10 · 0000000. Je cherche donc un moyen géométrique entre cette racine 3 · 1622777, & 10·0000000, lequel moyen ſe trouvera être 5·6234132, & c'eſt un ſecond moyen géométrique, dont on trouvera par la méthode expliquée ci-deſſus, le logarithme 7500000, lequel eſt par conſéquent un ſecond moyen arithmétique.

IV°. Mais ce nombre 5·6234132 eſt encore plus petit que 9·00000000; il faut donc de nouveau chercher un moyen proportionnel entre ce nombre 5·6234132 & 10·000000, & continuer ainſi de chercher entre le nombre prochainement plus petit, & le nombre prochainement plus grand que 9·0000000, des moyens géométriques avec leurs logarithmes, & par cette méthode on approchera de plus en plus, & l'on trouvera enfin le nombre cherché 9·0000000, ou 9, dont le logarithme ſera 0·9542425.

*Corollaire.*

805. Lorſqu'on a le logarithme de 9, 7, 5, par la méthode qui vient d'être expoſée, on en trouve facilement pluſieurs autres. Car

I°. Ayant les logarithmes des deux nombres, 2 & 3, la ſomme de ces logarithmes ſera le logarithme du produit $2 \times 3 = 6$, (799.).

II°. Si j'ai les logarithmes d'un produit & d'une de ſes racines, ou facteurs; la différence de ces logarithmes ſera le logarithme de l'autre racine.

III°. Etant donné le logarithme d'un nombre quarré, la moitié de ce logarithme ſera le logarithme de la racine; ainſi prenant la moitié du logarithme de 9, j'aurai le logarithme de 3.

IV°. Etant donné le logarithme d'un nombre cubique, le tiers de ce logarithme ſera le logarithme de la racine.

On voit donc que les Géométres ont dans la re-

cherche des logarithmes, des méthodes & des facilités qui abrégent beaucoup de travail. Car ils ne ſont obligés de chercher immédiatement que les logarithmes des nombres premiers, c'eſt-à-dire, de ceux qui n'ont point de diviſeurs, ou parties aliquotes; & ils trouvent aiſément, par le moyen de ceux-ci, les logarithmes de tous les nombres compoſés, ou multiples des nombres premiers, par les méthodes expoſées dans ce corollaire.

*Propoſition IV.*

806. Sur les principes & les regles que nous venons d'expoſer, les Géométres ont conſtruit des tables de logarithmes pour les nombres naturels depuis l'unité juſqu'à 10000; & même juſqu'à 20000. Ces tables ſont partagées en trois colonnes; la premiere contient les nombres naturels, la ſeconde renferme leurs logarithmes, & dans la troiſiéme ſe trouvent les différences des logarithmes; comme on le peut voir dans la table ſuivante, où il faut remarquer que les deux derniers chiffres de chaque logarithme ſont ſéparés par un point, pour marquer que dans la pratique on peut les négliger ſans erreur ſenſible.

| N. | *Logarithmes.* | *Différences.* |
|---|---|---|
| 1 | 00000 · 00 | |
| | | 3010300 |
| 2 | 030103 · 00 | |
| | | 1760913 |
| 3 | 047712 · 13 | |
| | | 1249387 |
| 4 | 060206 · 00 | |
| | | 969100 |
| 5 | 069897 00 | |
| | | 791813 |
| 6 | 077815 · 13 | |
| | | 669467 |
| 7 | 084509 · 80 | |
| | | 579920 |
| 8 | 090309 · 00 | |

Or, lorſque le nombre dont on cherche le logarithme ſe trouve dans les tables, on en trouvera auſſi tout d'un coup le logarithme, lequel eſt à côté de ce nombre dans la colonne des logarithmes: & pareillement étant donné un logarithme qui ſe trouve dans les tables, il ſera aiſé d'avoir ſa valeur, ou le nombre auquel il répond, lequel ſera à côté du logarithme dans la colonne des nombres naturels.

Mais comme tous les nombres & tous les logarithmes qui peuvent réſulter des différentes opérations, ne ſe trouvent pas dans les tables; parce que celles-ci ne contiennent ni les fractions, ni les nombres entiers au-delà de 20000, il eſt à propos de faire voir comment on peut en ce cas faire uſage de ces tables.

### *Uſage de la Table des Logarithmes.*

L'uſage des tables ſe réduit à deux choſes: ſçavoir, un nombre quelconque étant donné, trouver ſon logarithme, & un logarithme quelconque étant

donné, trouver ſa valeur, ou le nombre auquel il appartient.

PROBLÊME I.

807. *Un nombre entier étant donné, trouver ſon Logarithme.*

SOLUTION. I°. Si le nombre donné ſe trouve dans les tables, il n'y a nulle difficulté, comme nous venons de le dire.

II°. Si le nombre donné ne ſe trouve pas dans les tables, ce ſera parce qu'il excéde le plus grand nombre des tables, (que je ſuppoſe être 10000). Soit donc propoſé le nombre 3255682, pour en trouver le logarithme: je retranche de ce nombre les trois derniers caracteres, afin que le nombre reſtant 3255 ſe puiſſe trouver dans les tables, & j'y prends ſon logarithme, qui eſt 35125510: je prends auſſi le logarithme du nombre 3256, plus grand d'une unité que le précédent, & ce logarithme eſt 35126844.

Maintenant ſi j'ajoute une unité aux caractériſtiques de ces deux logarithmes, ils deviendront 45125510, 45126844, & (803.) leurs valeurs, ou les nombres qui leur répondent, ſeront 32550, 32560.

Si j'ajoute deux unités aux caractériſtiques, j'aurai les logarithmes 55125510, 55126844, & les nombres qui leur répondent, ſe changeront en 325500, 325600.

Si j'ajoute trois unités aux caractériſtiques, les logarithmes deviendront 65125510, 65126844, & leurs valeurs, ou les nombres correſpondans ſeront 3255000, 3256000, leſquels ont maintenant chacun autant de caracteres que le nombre donné 3255682. Je fais donc cette proportion:

*Puiſque* 1000, *différence entre les nombres* 3255000 & 3256000, *donne* 1334 *pour différence entre leurs*

*Logarithmes ; 682, différence entre les nombres 3255000 & 3255682, que donnera-t-il pour différence entre leurs Logarithmes ?*

Il viendra 909, que j'ajoute à 65125510, logarithme de 3255000, & j'aurai 65126419, qui ſera le logarithme de 3255682.

La raiſon eſt que les différences entre les logarithmes ſont proportionnelles aux différences qui ſont entre les nombres correſpondans, lorſque ceux-ci ſont grands, & qu'ils ne different pas conſidérablement.

### Problême II.

808. *Une fraction $\frac{3}{5}$ étant donnée, trouver ſon Logarithme.*

Solut. La fraction $\frac{3}{5}$ n'eſt autre choſe que 3 diviſé par 5 : donc ſuivant le principe (799.) pour avoir le logarithme de $\frac{3}{5}$ je n'ai qu'à retrancher 06989700, logarithme de 5, de 04771213, logarithme de 3, & le reſte — 02218487 ſera le logarithme de $\frac{3}{5}$, lequel eſt & doit être un nombre négatif, ou précédé du ſigne —. Car, puiſque zero eſt le logarithme de l'unité, & qu'une fraction quelconque $\frac{3}{5}$ eſt moindre que l'unité, il faut que le logarithme de $\frac{3}{5}$ ſoit moindre que 0, & qu'il ſoit par conſéquent un nombre défectif ou négatif.

### Problême III.

809. *Etant donné un nombre entier joint à une Fraction*, par ex : $3+\frac{2}{5}$, *trouver ſon Logarithme.*

Solut. Réduiſez le nombre entier 3 à une fraction qui ait pour dénominateur 5, & vous aurez $\frac{15}{5}+\frac{2}{5}$, ou $\frac{17}{5}$; retranchez le logarithme du dénominateur 5, de celui du numérateur 17, & la différence ſera le logarithme cherché.

### Problême IV.

810. *Un Logarithme poſitif étant donné, trouver ſa valeur, ou le nombre auquel il appartient.*

Solut. I°. Si le logarithme donné ſe trouve dans les tables, il n'y a nulle difficulté: on trouvera à côté du logarithme ſa valeur, ou le nombre auquel il appartient.

II°. Mais ſi le logarithme donné ne ſe trouve pas dans les tables; ce ſera ou parce que la caractériſtique de ce logarithme excede celle des tables; ou parce que ce logarithme ſe trouve entre deux logarithmes conſécutifs des tables; ou parce que le nombre des caracteres dans le logarithme donné eſt plus grand ou plus petit que dans les tables.

*Premier Cas.* Soit donné le logarithme 524920, dont la caractériſtique 5, excede la plus grande caractériſtique des tables, laquelle eſt 4: ôtez deux unités de la caractériſtique 5, & le logarithme donné deviendra 324920, lequel ſe trouve dans la table, & répond au nombre 1775. Or ſi à ce nombre 1775 vous ajoutez autant de zero que vous avez retranché d'unités de la caractériſtique, ſçavoir, deux zero, vous aurez le nombre 177500, auquel appartient le logarithme donné. Car lorſque vous avez retranché deux unités de la caractériſtique, c'eſt la même choſe (803.) que ſi vous aviez diviſé le nombre correſpondant par 100: donc, puiſqu'après cette ſouſtraction vous avez trouvé le nombre 1775, en ajoutant à ce nombre deux zero, ou en le multipliant par 100, vous aurez la valeur juſte du logarithme donné 524920.

Si après avoir ôté de la caractériſtique autant d'unités qu'il eſt néceſſaire, on ne trouvoit pas exactement le reſte dans les tables, alors ce reſte ſeroit un logarithme compris entre deux logarithmes conſécutifs, & on trouveroit ſa valeur par la méthode ſuivante.

*Second Cas.* Si le logarithme donné, *par ex:* 203454, ne ſe trouve pas dans les tables, parce qu'il eſt compris entre deux logarithmes conſécu-

tifs, c'eſt une marque qu'il appartient à un nombre entier joint à une fraction. Si l'on veut négliger la fraction, on prendra le nombre correſpondant au logarithme, qui approche le plus du logarithme donné. Si on veut avoir l'entier & la fraction, il faut prendre la différence des deux logarithmes conſécutifs entre leſquels eſt compris le logarithme donné; cette différence ſe trouvera être 401; tandis que la différence entre leurs nombres correſpondans n'eſt que 1. Prenez auſſi la différence entre le logarithme donné 203454, & le plus prochainement moindre 203342, laquelle eſt 112, & faites cette regle de trois.

*Puiſque* 401, *différence entre les deux logarithmes conſécutifs, donne* 1 *pour différence entre les nombres qui leur répondent;* 112, *différence entre le logarithme donné, & le plus prochainement moindre, combien donnera-t-il pour différence entre leurs nombres correſpondans? ou* $401 : 1 :: 112 : \frac{112}{401}$.

On trouve pour quatriéme terme la fraction $\frac{112}{401}$, laquelle ajoutée à 108, valeur du logarithme prochainement moindre, donnera $108 + \frac{112}{401}$ pour la valeur dû logarithme donné.

*Troiſiéme Cas.* Si le nombre des caracteres dans le logarithme donné eſt plus grand que dans les tables, retranchez du logarithme donné autant de caracteres qu'il faudra, pour que ce nombre devienne préciſément égal à celui des tables; & puis cherchez la valeur du logarithme reſtant, ſuivant la méthode, ſoit du premier, ſoit du ſecond cas. Si les caracteres retranchés dans le logarithme donné ſont des zero, ſa valeur reſtera la même (789.); s'ils ſont des chiffres poſitifs, ils ſeront une fraction décimale que l'on peut négliger ſans erreur ſenſible. Si le nombre des caracteres dans le logarithme donné eſt plus petit que dans les tables,

ajoutez à la fin du logarithme donné autant de zero qu'il faudra, pour que ce nombre devienne égal à celui des tables, ce qui ne change pas la valeur du logarithme (789.); & cherchez enſuite, ſuivant la méthode ordinaire, la valeur du logarithme ainſi transformé.

*Remarque.*

811. Il faut obſerver que plus les nombres ſont petits, plus les différences entre leurs logarithmes ſont grandes & croiſſent inégalement. D'où il arrive que la regle pratiquée dans le ſecond cas ne donne pas toujours aſſez exactement le quatriéme terme que l'on cherche, lorſque le logarithme donné appartient à un petit nombre. Pour remédier à cet inconvénient, on augmente la caractériſtique du logarithme de quelques unités. Si le logarithme donné eſt, *par ex:* 16076543, en augmentant la caractériſtique de deux unités, j'aurai le logarithme 36076543. Je cherche par la méthode donnée ci-deſſus le nombre auquel il appartient, & je trouve qu'il répond au nombre 4018 $\frac{4}{7}$, & que cette fraction eſt juſte, ou peu s'en faut, parce que ces grands logarithmes n'ont point les inégalités des premiers. Mais quand j'ai ajouté deux unités à la caractériſtique du logarithme, c'eſt la même choſe (803.) que ſi j'avois multiplié ſa valeur, ou le nombre correſpondant par 100: donc le nombre trouvé 4018 $\frac{4}{7}$ eſt cent fois trop grand; je dois donc le diviſer par 100, & j'aurai 40 $\frac{24}{100}$, qui ſera la valeur ou le nombre que je cherche.

## PROBLÊME V.

812. *Etant donné un logarithme négatif, tel que* — 18750613, *trouver à quelle fraction il appartient.*

SOLUTION. J'ajoute à la caractériſtique de ce logarithme autant d'unités qu'il eſt néceſſaire pour en

faire un logarithme positif. Si j'ajoute une unité, ou (ce qui revient au même) si au logarithme donné, j'ajoute 10000000, logarithme de 10, j'aurai — 18750613 + 10000000 = — 08750613, & sa valeur sera dix fois plus grande (803.); mais il est encore négatif. Si j'ajoute une seconde unité, j'aurai — 08750613 + 10000000 = 01249387; sa valeur deviendra cent fois plus grande, & le logarithme est maintenant positif.

Or ce logarithme 01249387 se trouve dans les tables à la colonne des différences, & est la différence entre les logarithmes des nombres 4 & 3: donc (799.) il est le logarithme de la fraction $\frac{4}{3}$. Mais ce nombre $\frac{4}{3}$ est cent fois plus grand (803.) que celui que je cherche: donc en le divisant par 100, j'aurai $\frac{4}{300} = \frac{2}{150}$, $= \frac{1}{75}$, qui sera la fraction cherchée. En effet si l'on cherche le logarithme de la fraction $\frac{1}{75}$, suivant la méthode donnée ci-devant (808.), on trouvera — 18750613, qui est le logarithme donné.

Remarquez que, pour avoir la solution du problême précédent, & des autres semblables,

I°. On pourroit ajouter tout d'un coup au logarithme donné, le logarithme de 100, ou de 1000, ou &c; & par une seule opération on auroit pour somme un logarithme positif.

II°. On pourroit aussi ajouter au logarithme donné, un logarithme quelconque pris à discrétion dans les tables, & l'on en chercheroit la somme, laquelle se trouve ordinairement dans les tables, ou à peu-près. Si elle ne s'y trouvoit pas, on essaieroit d'autres logarithmes pris encore à discrétion, jusqu'à ce que la somme devenue positive, se trouvât dans les tables, ou du moins ne différât que très-peu d'un logarithme contenu dans les tables.

III°. Si, après l'addition faite au logarithme négatif donné, le logarithme ainsi augmenté ne se trouvoit

trouvoit pas dans les tables, & n'approchoit pas même de bien près d'un logarithme contenu dans les tables, alors on en chercheroit la valeur par la méthode expliquée ci-deſſus (810.).

# SECTION II.

## *Des Opérations de la Géométrie pratique.*

LEs démonſtrations de la Géométrie ſpéculative avoient pour objet les propriétés de l'étendue: les opérations de la Géométrie pratique ont pour but de meſurer les différentes eſpeces de l'étendue: c'eſt pourquoi il eſt néceſſaire de connoître les meſures, & de les ſçavoir appliquer. Nous parlerons donc, 1°. des meſures; 2°. de l'uſage & de l'application des meſures.

## CHAPITRE I.

### *Des Meſures.*

I°. COMME dans la Géométrie ſpéculative les Géometres ſe ſont ſervis de deux principes pour appuyer leurs démonſtrations, ſçavoir de la ligne *droite* & de la ligne *circulaire*; de même dans la Géométrie pratique ils ſe ſervent, pour ſe diriger dans leurs opérations, de deux inſtrumens qui répondent à la ligne droite & à la ligne circulaire, ſçavoir, de la *regle* & du *compas*: de la règle, pour tracer & meſurer des lignes: du compas, pour décrire le cercle qui ſert à meſurer les angles.

II°. Mais la regle & le cercle ne peuvent être des meſures de quelque uſage, ſi on ne les a auparavant diviſées en des parties fixes & connues, ſoit pour le

nombre, ſoit pour la grandeur. Nous allons donc parler, 1°. de la diviſion de la regle; 2°. de la diviſion du cercle.

## ARTICLE I.

### *De la Diviſion de la Regle.*

I°. On diſtingue deux ſortes de regle, la regle ordinaire & la regle géométrique, que l'on appelle auſſi *Echelle géométrique.*

II°. La regle ordinaire ſe diviſe en *pieds*, le pied ſe diviſe en 12 *pouces*, le pouce en 12 *lignes*, la ligne en 12 *points*. L'uſage de cette regle conſiſte à l'appliquer, en la portant ſur toute la longueur d'une dimenſion quelconque de l'étendue; afin de trouver par ce moyen combien cette dimenſion contient de pieds, de pouces, &c.

III°. Mais l'uſage de la regle, ou échelle géométrique ne conſiſte pas à l'appliquer immédiatement ſur l'étendue que l'on veut meſurer: mais elle conſiſte ſoit à trouver, ſoit à déſigner le nombre des parties dont cette étendue eſt compoſée, par un même nombre de parties ſemblables & proportionnelles, priſes ſur l'échelle géométrique.

IV°. Ainſi on doit regarder l'échelle géométrique comme une regle diviſée, *par ex:* en 10, en 100, en 1000, en 10000, &c. parties ſous diviſées elles-mêmes avec un certain art en parties plus petites; pour meſurer ou pour déſigner de plus grandes étendues, avec leſquelles ces parties, qui ſont des petites meſures, ont une proportion connue.

### PROBLÊME.

813. *Conſtruire la Regle, ou l'Echelle géométrique* (fig. 150.).

SOLUT. I°. Tirez la droite indéfinie AB3: prenez ſur cette ligne un certain nombre de parties égales & à volonté; *par ex:* ſix portions égales, A, *6*:

6, 5 : 5, 4 : &c. en commençant depuis A ; la ſixiéme ſera 2, B : & ſuppoſez que ces diviſions repréſentent des pieds. Vous tranſporterez enſuite la diſtance AB ſur toute la longueur de la ligne A3, autant de fois qu'il vous plaira, & les diviſions AB ; B2 ; 2, 3 ; déſigneront par conſéquent des toiſes.

II°. Elevez au point A une perpendiculaire AC, que vous diviſerez en douze parties égales A, 1 : 1, 2 : 2, 3 : &c. Leur nombre repréſentera celui des parties (ſçavoir, des pouces) qui ſont immédiatement contenues dans le pied.

III°. De chaque point de diviſion faite dans la perpendiculaire AC, menez des paralleles à la ligne A3, & ſur la derniere parallele C3, tranſportez de C en D les ſix parties égales, auxquelles on a diviſé la ligne AB.

IV°. Joignez par des lignes droites le point à gauche, marqué A, avec le ſecond à droite, marqué 6 : puis 6 de la gauche avec 5 de la droite, & ainſi de ſuite ; joignez toujours les diviſions de la gauche avec celles de la droite par des tranſverſales A, 6 : 6, 5 : 5, 4 : 4, 3 : 3, 2 : &c.

Il eſt évident que ſi AB eſt ſuppoſée être une longueur de ſix pieds, les portions A, 6 : 6, 5 : 5, 4 : &c. C, 6 : 6, 5 : 5, 4 : &c. donneront chacune la longueur d'un pied. Mais les portions 1, 1 : 2, 2 : 3, 3 : compriſes entre la perpendiculaire AC & la tranſverſale A 6, & priſes dans les paralleles menées entre A3, & C3 exprimeront des pouces ; ſçavoir la portion 1, 1, exprimera un pouce 2, 2, deux pouces, 3, 3, trois pouces, 4, 4, quatre pouces, de ſorte que la derniere C6 exprimera douze pouces, ou un pied, parce que C6 = A6 par la conſtruction.

Démonst. Suppoſant que les ſix parties égales de la ligne AB ſont ſix pieds, il faut démontrer que la portion 1, 1, donne un pouce ; 2, 2, deux pouces ; 3, 3, trois pouces, &c. ce qui eſt évident. Car

les triangles CA6, 1A1, ſont ſemblables : donc on aura A1 : AC :: 1, 1 : C6. Or A1 n'eſt que la douziéme partie de AC par la conſtruction : donc 1, 1 ſera la douziéme partie de C6 : donc puiſque C6 vaut 12 pouces, 1, 1 vaudra un pouce. On prouve de la même maniere que 2, 2 vaut deux pouces, que 3, 3 donne trois pouces, &c.

*Corollaire.*

814. L'uſage de la regle ainſi diviſée eſt fort commode. Voulez-vous prendre en petit la valeur de 5 pieds plus 4 pouces ? cherchez ſur l'échelle géométrique la tranſverſale qui forme la cinquiéme diviſion, en allant de A en B, ſçavoir la tranſverſale 2, 1. Cherchez auſſi la parallele qui forme la quatriéme diviſion en allant de A en C, ſçavoir la parallele 4, 2. Si ſur le point X où ſe rencontrent la tranſverſale & la parallele, vous poſez une jambe du compas, & l'autre jambe ſur l'extrêmité 4, ou la parallele rencontre la ligne AC ; l'ouverture du compas vous donnera une longueur de 5 pieds 4 pouces. Car du point X au chiffre 4 qui ſe rencontre le premier dans la parallele, il y a cinq diviſions qui déſignent 5 pieds ; & l'intervalle 4, 4, que donne le reſte de la parallele, dénote 4 pouces, comme nous l'avons prouvé : donc, &c.

## ARTICLE II.

*De la Diviſion du Cercle.*

I°. En géométrie il ne ſuffit pas d'avoir une meſure pour juger des *longueurs*, des *diſtances*, &c. il en faut auſſi une pour meſurer les *angles*. La meſure dont on ſe ſert pour connoître les diſtances, eſt la *regle* dont nous venons de parler ; celle dont on ſe ſert pour juger de la quantité des angles, eſt la circonférence du *cercle*.

II°. Quand on veut meſurer un angle, on ſuppoſe & l'on conçoit qu'il a ſon ſommet au centre du cercle; & alors l'arc de circonférence intercepté entre les côtés de l'angle, eſt la meſure de l'angle.

III°. Cet arc ne meſure la quantité de l'angle que par le nombre de ſes degrés : il faut donc que cet arc, ou, tout d'un coup, que la circonférence du cercle ſoit, ou puiſſe être diviſée en un certain nombre de parties fixes & déterminées, (que l'on appellera *degrés*), & alors l'angle ſera d'autant plus grand, ou plus petit, qu'il interceptera entre ſes côtés un arc d'un plus grand ou d'un plus petit nombre de *degrés*.

## PROBLÊME I.

815. *Diviſer la Circonférence du Cercle en deux également.*

SOLUT. Dans le cercle menez un diamétre; il partagera la circonférence du cercle en deux également, comme nous l'avons prouvé (363.).

## PROBLÊME II.

816. *Diviſer la Circonférence du cercle en quatre parties égales.*

SOLUT. Dans le cercle menez deux diamétres perpendiculaires l'un ſur l'autre, ils partageront la circonférence en quatre parties égales, comme il eſt évident.

C'eſt par cette méthode que l'on inſcrit un quarré dans un cercle : car ſi l'on joint les extrêmités des diamétres par des cordes, ces cordes formeront un quarré.

## PROBLÊME III.

817. *Diviſer un Arc quelconque en deux également.*

SOLUT. Menez une corde par les extrêmités de l'arc donné, & diviſez-la en deux également par

une perpendiculaire (373.); l'arc ſera auſſi diviſé en deux également (412.).

Par la même méthode on diviſe auſſi en deux également un angle quelconque. Car ayant décrit du ſommet de l'angle, pris comme centre, & d'un intervalle quelconque, un arc entre les deux côtés de l'angle; la ligne qui, tirée du ſommet, partagera cet arc en deux également, diviſera auſſi l'angle meſuré par cet arc en deux également.

*Corollaire.*

818. On peut toujours diviſer exactement la circonférence du cercle en autant de parties égales que l'on voudra, en prenant le nombre 2 & ſes multipliés 4, 8, 16, &c. pour diviſeurs. Ainſi on peut la diviſer en 2, 4, 8, 16, 32, &c. parties égales; d'où ſuit la méthode d'inſcrire à un cercle donné, non-ſeulement un quarré, mais un octogone, un polygone de 16, de 32, de 64, &c. côtés.

*Propoſition.*

819. Les Géométres étant convenus que la circonférence du cercle ſeroit diviſée en 360 parties égales, il eſt à remarquer que pour faire exactement & géométriquement cette diviſion, le diviſeur 2, & ſes multiples ne ſuffiſent pas : il faudroit auſſi pouvoir faire uſage des diviſeurs 3, 5, & de leurs multiples, c'eſt-à-dire qu'il faudroit pouvoir diviſer la circonférence, ou un arc quelconque, en 3, en 5, en 9, en 12, en 15, &c. parties égales. Or pour diviſer la circonférence du cercle en un nombre quelconque de parties égales, & en nombres multiples de 3 & de 5, la queſtion ſe réduit en général à inſcrire dans le cercle des polygones réguliers de différente eſpece, leſquels détermineroient dans la circonférence des points de diviſion, & dont les côtés ſeroient des cordes qui ſoutiendroient des arcs d'un certain nombre

de degrés. Nous allons donc voir quelles ſont les différentes eſpeces de polygones réguliers que l'on peut inſcrire à une circonférence donnée.

## PROBLÊME IV.

820. *Inſcrire dans le cercle un Exagone régulier, ou diviſer la circonférence du Cercle en ſix parties égales.*

SOLUT. Portez le rayon du cercle ſucceſſivement ſur la circonférence, il donnera un exagone régulier inſcrit, & diviſera la circonférence en ſix parties égales. Car nous avons prouvé (516.) que le côté de l'exagone étoit égal au rayon du cercle.

### *Corollaire I.*

821. De-là ſuit la méthode d'inſcrire à un cercle,

I°. Un triangle équilatéral, ou de diviſer la circonférence du cercle en trois parties égales, en menant des cordes qui ſoutiendroient des arcs doubles de ceux qui ſont ſoutenus par les côtés de l'exagone régulier.

II°. Un dodécagone régulier; car après avoir inſcrit un exagone régulier, il ne s'agit que de diviſer en deux également chacun des arcs ſoutenus par les côtés de l'exagone.

### *Corollaire II.*

822. On peut diviſer un angle droit, ou un arc de 90 degrés en trois parties égales (*fig.* 151.), en portant ſucceſſivement le côté du dodécagone ſur l'arc BEDA de 90 degrés, & il le partagera en trois arcs de 30 degrés chacun.

Ou bien portez le rayon du cercle ſur un arc de 90 degrés, ſçavoir de B en D, & de A en E, & vous aurez la même choſe. Car le rayon porté ſur la circonférence, eſt le côté d'un exagone régulier, qui par conſéquent détermine de A en E un arc de 60 degrés, & pareillement porté de B en D, détermi-

nera un autre arc de 60 degrés : donc les arcs AD, DE, EB ſont de 30 degrés chacun.

*Corollaire III.*

823. On peut auſſi diviſer un angle, ou un arc de 45 degres en trois parties égales. Pour cela il n'y a qu'à prendre un arc de 30 degrés, & le diviſer en deux également ; ce qui donnera un arc de 15 degrés, dont la corde, portée ſucceſſivement ſur un arc de 45 degrés, le diviſera en trois arcs égaux de 15 degrés chacun.

Mais on n'a pas trouvé la méthode de diviſer géométriquement par la *regle* & le *compas* un angle ou un arc quelconque donné en trois parties égales ; & c'eſt-là le fameux problême de la *triſection* de l'angle tant cherchée par les Anciens. A plus forte raiſon on ne peut pas diviſer un angle quelconque en 5, 7, 9, 11, &c. parties égales : c'eſt de-là que vient la difficulté de graduer exactement les *quarts* de cercle dont on ſe ſert dans la Géométrie pratique.

PROBLÊME V.

824. *Inſcrire un Décagone régulier à un cercle, ou partager la circonférence du cercle en dix parties égales.*

SOLUT. Diviſez (*fig.* 93.) le rayon du cercle en moyenne & extrême raiſon (545.), & portez ſucceſſivement la *médiane* ſur toute la circonférence du cercle, & la circonférence ſera partagée en dix parties égales. Or ſi par les points de diviſion vous menez des cordes, ces cordes ſeront les côtés d'un décagone régulier inſcrit au cercle ; car nous avons prouvé (546.) que le côté du décagone régulier étoit égal à la *médiane* du rayon diviſé en moyenne & extrême raiſon.

*Corollaire.*

825. Donc on peut facilement inſcrire au cercle un pentagone régulier. Il ne faut pour cela que me-

ner des cordes qui ſoutiennent des arcs doubles de ceux qui ſont ſoutenus par les côtés du décagone.

## PROBLÊME VI.

826. *Inſcrire un Pentédécagone, ou un Polygone de quinze côtés à un cercle donné, ou diviſer la Circonférence du cercle en quinze parties égales* (fig. 152.).

SOLUT. I°. Au cercle donné inſcrivez un triangle équilatéral ABC, qui diviſera la circonférence du cercle en trois parties égales.

II°. Inſcrivez un pentagone régulier ADEFG; qui partagera la circonférence du cercle en cinq parties égales.

III°. L'intervalle, ou l'arc BE, donnera le côté du pentédécagone, lequel porté ſucceſſivement ſur la circonférence entiere, donnera le pentédécagone inſcrit, & diviſera la circonférence en quinze parties égales.

DÉMONST. Si à la circonférence on ſuppoſe inſcrit un pentédécagone, qui y faſſe quinze diviſions; il eſt clair que chaque côté du pentagone régulier répondra à trois de ces diviſions, & que la ſomme des deux côtés AD+DE répondra à ſix de ces diviſions. Mais le côté AB du triangle équilatéral répondra à cinq de ces diviſions: donc l'intervalle BE eſt une de ces diviſions faites par les côtés du pentédécagone, & donnera un arc de 24 degrés, ou le côté du pentédécagone régulier.

*Corollaire.*

827. Pour inſcrire un polygone régulier quelconque à un cercle, il ne s'agit que de déterminer le côté de ce polygone, en cherchant le rapport qu'a ce côté avec le rayon du cercle auquel on veut inſcrire le polygone. Car le rayon du cercle eſt toujours une quantité connue & donnée. Dans ce cas on doit regarder le côté du polygone régulier que l'on veut inſcrire, comme une corde qui ſoutient dans le cer-

cle un arc d'un certain nombre de dégrés, & dont on cherche le rapport avec le rayon du cercle. La queſtion ſe réduit donc en dernier lieu à connoître & à déterminer le rapport de chaque corde du cercle avec le rayon. Ce rapport eſt fixe & connu pour quelques cordes; mais il en eſt pluſieurs autres dont on ne peut pas trouver le rapport avec le rayon du cercle, & par cette raiſon on ne peut trouver la valeur juſte & exacte de la plûpart des cordes du cercle, mais ſeulement par approximation. De-là vient la difficulté d'inſcrire à la circonférence du cercle toutes ſortes de polygones réguliers, ou de diviſer géométriquement la circonférence du cercle en un nombre quelconque de parties égales. Nous verrons dans la ſuite comment on peut déterminer la valeur, ſoit juſte, ſoit approchée des différentes cordes du cercle, lorſque nous parlerons des *Sinus*.

## CHAPITRE II.

### *Uſage & Application des Meſures.*

L'USAGE & l'application des meſures ſe fait, lorſqu'on veut connoître & déterminer les dimenſions plus ou moins grandes des corps. Dans le corps il y a trois dimenſions, qui ſont la *longueur*, la *largeur*, & la *profondeur*, d'où naiſſent trois eſpeces d'étendue, qui ſont la *ligne*, la *ſurface* & le *ſolide*. L'objet de la Géométrie ſpéculative étoit de les ſoumettre à la démonſtration; celui de la Géométrie pratique eſt de les aſſujettir à la meſure. De-là naiſſent différens procédés de la Géométrie pratique, qui peuvent tous ſe réduire à trois eſpeces analogues à celles de l'étendue; ſçavoir, la *longi-*

*métrie*, ou la mesure des lignes ; la *planimétrie*, ou la mesure des surfaces ; & la *stéréométrie*, ou la mesure des solides.

## ARTICLE I.

### *La Longimétrie.*

La Longimétrie est la pratique des lignes, des angles & des figures. Elle donne l'art & la méthode de les tracer, de les diviser & de les comparer.

### *Des Lignes.*

#### PROBLÊME I.

828. *Sur une ligne donnée* CD (fig. 9.) *mener une Perpendiculaire.*

SOLUT. Des extrêmités C & D, prises comme centres, & de l'intervalle CD décrivez deux circonférences de cercles, qui s'entrecouperont aux points A & B ; joignez les points d'intersection A & B par une ligne droite AB : cette ligne AB, ou AI sera perpendiculaire sur la ligne donnée CD, comme nous l'avons fait voir (367 & 368.) : ou, plus simplement, il n'y a qu'à décrire (*fig.* 10.) des extrêmités A & B, prises comme centres, & d'une même ouverture de compas des arcs qui s'entrecoupent aux points C, E, & joindre les sections par une ligne droite CE : car cette pratique est la même que la précédente, mais abrégée.

#### *Corollaire.*

829. De-là suit la méthode,

I°. De diviser une ligne droite donnée CD (*fig* 9.) en deux également. Car la perpendiculaire AB partage la ligne CD en deux parties égales au point I, & l'on a CI = ID.

II°. De construire sur une ligne donnée CD (*fig.* 9.) un triangle équilatéral, en décrivant des extrêmités C & D, prises comme centres, & de l'intervalle CD des arcs qui s'entrecoupent au point A,

& en menant les lignes AC, AD; ce qui donnera le triangle ACD équilatéral. Car DA = DC, parce qu'ils ſont rayons d'un même cercle, & CD = CA par la même raiſon.

III°. De conſtruire pareillement ſur une ligne donnée CD (*fig.* 9.) un triangle iſocele: ce qui ſe fait en prenant une ouverture de compas plus grande que l'intervalle CD, & en faiſant le reſte comme pour le triangle équilatéral.

## PROBLÊME II.

830. *D'un point donné* C *dans une ligne* AB, *élever une Perpendiculaire ſur cette ligne* (fig. 153.).

SOLUT. Du point donné C déterminez avec le compas les portions égales CD, CE, & des points C, E pris comme centres, & d'une ouverture de compas priſe à volonté, mais reſtant la même, décrivez des arcs qui s'entrecoupent au point F; enfin menez la droite CF, & elle ſera la perpendiculaire demandée.

Car par la conſtruction on a DF = EF, & DC = CE: donc (368.) la ligne CF ne s'incline pas plus d'un côté que de l'autre: donc (369.) la ligne CF eſt perpendiculaire ſur AB.

## PROBLÊME III.

831. *D'un point donné* C *hors d'une ligne* AB, *abbaiſſer une Perpendiculaire ſur cette ligne* (fig. 154.).

SOLUT. Du point C, comme centre, décrivez un arc qui coupe la ligne donnée AB en deux points tels que D, E, deſquels vous tracerez de la même ouverture de compas des arcs qui s'entrecoupent au point F: poſez enſuite la regle ſur les points C, F, pour mener la ligne CO, qui ſera la perpendiculaire demandée, comme il eſt évident par ce qui a été dit ci-deſſus.

## PROBLÊME IV.

832. *Elever une Perpendiculaire à l'extrêmité* A *d'une ligne donnée* AB (fig. 155.).

SOLUT. I°. Si la ligne donnée peut être prolongée par cette extrêmité d'où il faut élever la perpendiculaire ; prolongez-la, & vous menerez la perpendiculaire demandée ſuivant la méthode du ſecond problême.

II°. Si la ligne donnée ne peut pas être prolongée par cette extrêmité ; au-deſſus de la ligne AB prenez à volonté un point C, duquel comme centre & de l'intervalle CA, décrivez une circonférence de cercle : menez le diamétre DE & la ligne EA ; celle-ci eſt la perpendiculaire demandée. Car l'angle EAD appuyé ſur le diamétre eſt droit : donc EA eſt perpendiculaire ſur AD, ou AB.

## PROBLÊME V.

833. *Mener une Parallele à une ligne donnée* CD (fig. 15.).

SOLUT. Des extrêmités C, D, ou de deux autres points quelconques E, F, pris à volonté dans la ligne CD, décrivez de la même ouverture de compas des arcs qui s'entrecoupent à un point quelconque O : ſur ces arcs prenez avec le compas des portions égales EG, FH, & par les points G, H, menez la ligne AB ; laquelle ſera parallele à la ligne donnée CD.

Car ſi des points G & H vous abaiſſez des perpendiculaires ſur la ligne CD, ces perpendiculaires ſeront égales ; parce les arcs étant continués, & les perpendiculaires étant prolongées juſqu'à la rencontre des circonférences, elles ſeront les moitiés de cordes qui ſoutiendront des arcs égaux, dans des circonférences égales, & elles ſeront par conſéquent égales : donc les diſtances meſurées par ces perpendiculaires ſeront auſſi égales, c'eſt-à-dire, que les lignes AB, CD ſeront paralleles.

## Problême VI.

834. *D'un point* I *donné hors d'une ligne mener une Parallele à cette ligne* (fig. 16.).

Solut. Soit donnée la ligne CD : du point I, & d'une ouverture de compas prise à volonté, décrivez l'arc indéfini FBK, & du point F & de la même ouverture de compas décrivez l'arc IE : prenez ensuite sur l'arc indéfini FBK une portion FB = IE, & la ligne AB qui passe par les points I, B, sera parallele à la ligne donnée CF.

Car ayant mené IF, les angles alternes internes FIB, IFE seront égaux ; puisqu'ils sont mesurés par les arcs IE, FB, égaux par la construction : donc les lignes AB, CF sont paralleles.

*Remarque.*

835. Quand on veut tracer des lignes paralleles, on se sert ordinairement de la *double regle*, qui est un instrument de l'étui de Mathématique ; & qui consiste en deux regles paralleles AB, CD (*fig.* 158.) jointes ensemble par deux lignes GE, HF, égales, paralleles & mobiles, par le mouvement desquelles les deux regles peuvent être ou approchées, ou éloignées l'une de l'autre, en conservant toujours leur parallélisme.

*Corollaire.*

836. On peut toujours sur une ligne donnée construire, soit un parallélogramme, soit un rectangle. Car si sur les extrêmités d'une ligne donnée FG (*fig.* 110.) on éleve des perpendiculaires égales FA, GD, & qu'on joigne les extrêmités A, D, par une ligne droite, on aura le rectangle FADG : ou si l'on éleve deux obliques BA, ED, égales & également inclinées, & que l'on mene la droite AD, on aura le parallélogramme BADE.

## Problême VII.

837. *Diviſer une ligne droite donnée* AB *en trois parties égales* (fig. 156.).

Solut. Par le point A menez la ligne indéfinie AZ qui faſſe avec la ligne AB un angle quelconque; & prenant une ouverture de compas à volonté, prenez ſur la ligne AZ trois parties égales AE, EF, FG: joignez les points G, B, & des points F, E, menez les lignes FD, EC, paralleles à GB; ces paralleles diviſeront la ligne AB en trois parties égales.

Car à cauſe des triangles ſemblables ACE, ADF, ABG, on aura AE : AC :: EF : CD :: FG : DB; dans laquelle proportionnalité les antécédens ſont égaux par la conſtruction: donc les conſéquens ſont auſſi égaux; c'eſt-à-dire, que les parties diviſées de la ligne AB ſont égales entr'elles.

*Corollaire.*

838. On peut par la même méthode diviſer une ligne donnée en autant de parties égales que l'on voudra, en portant le compas ſur la ligne indéfinie AZ le nombre de fois requis, & faiſant le reſte comme ci-deſſus.

## Problême VIII.

839. *Diviſer une Ligne donnée* AB *en des parties ſemblables & proportionnelles à celles d'une autre Ligne donnée* AC (fig. 159.)

Solut. Joignez les deux lignes par leur extrêmité A, de façon qu'elles forment un angle: de plus joignez les extrêmités C & B en menant CB, & par les points de diviſion D, E, F, tirez des paralleles à la ligne CB; & elles diviſeront la ligne AB en des parties ſemblables ou proportionnelles à celles de la ligne AC. Car les triangles AGD, AHE, AIF, ABC, ſont ſemblables, & donnent

AD : AG :: DE : GH :: EF : HI :: FC : IB,

dans laquelle proportionnalité les antécédens ſont les portions de la ligne AC, & les conſéquens ſont les portions correſpondantes dans la ligne AB : donc les dernieres ſont proportionnelles aux premieres.

Ce ptoblême peut auſſi s'exécuter en poſant la ligne donnée AB (*fig.* 167.) parallélement à la ligne diviſée CD, & en joignant leurs extrêmités par des lignes droites, qui ſe rencontreront en un point quelconque O ; d'où ſi vous menez des lignes aux points de diviſion E, F, G, ces lignes diviſeront AB en parties proportionnelles à celles de la ligne CD.

### PROBLÊME IX.

840. *Diviſer un Arc en deux également.*

SOLUT. Joignez les extrêmités de cet arc par une corde ; coupez cette corde en deux également par une perpendiculaire, & l'arc ſe trouvera auſſi diviſé en deux parties égales. Car toute perpendiculaire qui diviſe une corde en deux également, diviſe auſſi en deux portions égales l'arc ſoutenu par la corde (412.).

### PROBLÊME X.

841. *Une Circonférence de Cercle étant donnée, en trouver le centre* (fig. 162.).

SOLUT. Menez les deux cordes AC, AB, & diviſez-les chacune en deux également par des perpendiculaires : le point O, où ces perpendiculaires ſe coupent, ſera le centre du cercle. Car chacune de ces perpendiculaires diviſant en deux également une corde du cercle, paſſe par conſéquent par le centre (412.) : donc le point O où ces perpendiculaires ſe rencontrent, ſera le centre du cercle.

### *Corollaire I.*

842. On peut toujours continuer un arc de cercle donné. Car menant ſur cet arc deux cordes, & les diviſant chacune en deux également par des perpendiculaires,

perpendiculaires, on trouvera le centre de cet arc. Or posant l'une des pointes du compas sur le centre, & l'autre sur l'arc; on pourra, en tournant le compas, continuer & achever la circonférence du cercle.

*Corollaire II.*

843. Il est toujours possible de faire passer une circonférence de cercle par trois points donnés C, A, B (*fig.* 162.) & non posés en ligne droite. Car ayant joint les trois points donnés par des lignes droites, il ne s'agit que de trouver le centre O par la méthode précédente.

PROBLÊME XI.

844. *Trouver une Ligne quatriéme proportionnelle à trois lignes données* AB, AE, AD (fig. 161.).

SOLUT. I°. Faites un angle quelconque, dont les côtés soient indéfinis, *par ex:* l'angle MAN.

II°. Sur le premier côté AM prenez une portion égale à la premiere ligne AB; & sur le second, une portion égale à la seconde ligne AE; & menez la ligne BE.

III°. Sur le premier côté prenez encore une portion égale à la troisiéme ligne donnée AD, & menez la parallele DC; la ligne AC sera la quatriéme ligne proportionnelle cherchée.

DÉMONST. Car à cause des triangles semblables BAE, DAC, on aura la proportion AB: AE :: AD: AC; donc la ligne AC est la quatriéme ligne proportionnelle cherchée.

PROBLÊME XII.

845. *Trouver une Ligne moyenne proportionnelle entre deux Lignes données* AB, BC (fig. 164.)

SOLUT. I°. Joignez par les extrêmités les deux lignes données AB, BC, de sorte qu'elles ne fassent plus qu'une seule & même ligne.

II°. Diviſez leur ſomme en deux également (829.) & du point du milieu O, & de l'intervalle OA, ou OC, décrivez une circonférence de cercle.

III°. Du point de réunion B élevez (830.) la perpendiculaire BD juſqu'à la rencontre de la circonférence: elle ſera la moyenne proportionnelle cherchée, comme nous l'avons prouvé (539.).

## PROBLÊME XIII.

846. *Trouver une troiſiéme Ligne* x *proportionnelle à deux Lignes données* AB *&* BD, *en ſorte qu'on ait la proportion* AB : BD :: BD : x.

SOLUT. Joignez les deux lignes AB, BD (*fig.* 164.), de façon que BD ſoit perpendiculaire ſur l'extrêmité de AB: prolongez BD, de façon que l'on ait BE=BD: par les trois points A, D, E, faites paſſer (843.) une circonférence de cercle, & prolongez AB juſqu'à la rencontre de la circonférence; & la ligne BC ſera la troiſiéme proportionnelle cherchée. Car par la propriété du cercle (539.) l'on a AB : BD :: BD : BC.

### *Corollaire.*

847. Etant donnée la corde DE, & la hauteur BC d'un arc (*fig.* 164.), il ſera facile, par la méthode précédente, de trouver le diamétre AC, & par conſéquent le centre du cercle. Car cherchez une troiſiéme proportionnelle à BC & BD pour avoir BA, & ajoutez BA à la hauteur BC, & vous aurez le diamétre AC; lequel diviſé en deux également, donnera le centre O, & le rayon OC.

Ce problême eſt en uſage dans l'Architecture, quand il s'agit de conſtruire des ouvrages en forme d'arc.

## PROBLÊME XIV.

848. *D'un point donné dans la circonférence du cercle mener une Tangente.*

Solut. Du centre menez un rayon à ce point de la circonférence, & sur l'extrêmité du rayon élevez (832.) une perpendiculaire à ce rayon; elle sera la tangente demandée. Car toute ligne qui est perpendiculaire à l'extrêmité du rayon, est tangente par rapport à la circonférence (415.).

## Problême XV.

849. *D'un point donné* A *hors de la circonférence du cercle, mener une Tangente à la circonférence* (fig. 165.).

Solut. I°. Du point A menez au centre du cercle la droite AC, que vous diviserez en deux également (829.) au point O.

II°. Du point O, comme centre, & de l'intervalle OA, décrivez une circonférence, laquelle coupera la premiere en deux points B, D.

III°. Si du point A vous menez une ligne à l'un ou à l'autre des deux points d'intersection B, D, cette ligne sera tangente au cercle. Car ayant mené le rayon CB, on aura l'angle CBA appuyé sur le diamétre CA: donc cet angle sera droit: donc la ligne AB est perpendiculaire à l'extrêmité du rayon: donc (415.) elle est tangente.

## Problême XVI.

850. *Couper une Ligne donnée* BD *en moyenne & extrême raison* (fig. 90.).

Solut. Sur l'extrêmité D de la ligne BD élevez une perpendiculaire DC, égale à la moitié de la ligne donnée BD, & du point C comme centre, & de l'intervalle CD, décrivez une circonférence de cercle: par le centre C menez la sécante BA, & sur la ligne BD prenez la portion BG=BE; & le point G sera celui où la ligne BD sera divisée en moyenne & extrême raison. Car on aura, comme nous l'avons prouvé (543.) BD : BG :: BG : GD.

### Problême XVII.

851. *D'un point donné* A *hors d'un plan, abbaiſſer une perpendiculaire ſur ce plan* (fig. 121.).

Solut. Poſez ſur le point donné A une des pointes du compas, & de l'autre pointe décrivez ſur ce plan la circonférence IHDG, &c.; cherchez (841.) le centre C de cette circonférence: je dis que la ligne abbaiſſée du point donné A au centre C, ſera la perpendiculaire cherchée.

Demonst. La ligne AC par la conſtruction a deux de ſes points A & C, également éloignés chacun de tous les points de la circonférence décrite: donc tous ſes autres points ſont auſſi également éloignés chacun de tous les points de cette circonférence: donc la ligne AC ne penche pas plus d'un côté que de l'autre ſur le plan donné, & par conſéquent elle eſt perpendiculaire à ce plan.

### Problême XVIII.

852. *D'un point donné* C *dans un plan, élever une Perpendiculaire à ce plan* (fig. 121.).

Solut. D'un point quelconque M pris hors du plan abbaiſſez, par la méthode du problême précédent, une ligne MB perpendiculaire ſur le plan; & du point C élevez une ligne CA parallele à MB: je dis que la ligne CA ſera la perpendiculaire demandée; comme on le voit évidemment, en menant la ligne CB.

Pour élever ſur le plan donné & du point C une parallele à la ligne MB, il n'y a qu'à faire paſſer un plan, par les lignes CB, & BM, & tracer ſur ce nouveau plan, par la méthode donnée (833.), une ligne parallele à la ligne BM.

## *Des Angles.*

### Problême I.

853. *Un Angle étant donné, en trouver la valeur.*

Solut. Du ſommet de l'angle pris comme centre, décrivez un arc entre les côtés; cherchez le nombre de degrés que contient cet arc, & vous aurez la meſure de l'angle.

On trouve la meſure de cet arc par le moyen du *rapporteur*, qui eſt un des inſtrumens de l'étui de Mathématique. Le *rapporteur* eſt un demi-cercle (*fig.* 157.) diviſé le plus exactement qu'il a été poſſible, en degrés & en minutes. Or mettant le centre du rapporteur au ſommet de l'angle, les côtés de l'angle, prolongés (s'il eſt néceſſaire), intercepteront un arc du rapporteur qui donnera le nombre de degrés que contient l'arc que vous avez décrit; parce que ces deux arcs ſont ſemblables, & contiennent par conſéquent un même nombre de degrés.

### Problême II.

854. *Faire un Angle de tel nombre de degrés que l'on voudra*, par ex: *de* 50 *degrés* (fig. 157.).

Solut. Placez le centre du rapporteur ſur le point C, qui doit être le ſommet de l'angle: marquez les points B & D, qui interceptent un arc de 50 degrés; du centre C menez par les points B & D les lignes CF, CE, & vous aurez l'angle requis.

### Problême III.

855. *Faire un Angle égal à un Angle donné* BAC (fig. 163.).

Solut. 1°. Du ſommet A comme centre, décrivez l'arc BC: menez la ligne indéfinie *az*, & du point *a* comme centre, & de l'intervalle *ac* = AB, décrivez l'arc indéfini *cbd*. 2°. Sur l'arc indéfini *cbd*, prenez avec le compas la portion *bc* = BC, & joignez par une droite les points *a*, *b*, & vous aurez l'angle *bac* = BAC, comme il eſt évident.

*Corollaire.*

856. C'eſt par cette méthode que l'on peut faire

I°. Un triangle égal à un autre triangle donné BAC (*fig.* 73.). Car ayant mené *ab*=AB, faites en *a* & en *b* des angles égaux aux angles correſpondans A & B, & prolongez-en les côtés juſqu'à ce qu'ils ſe rencontrent, & vous aurez le triangle *abc*=ABC (495.).

II°. Un triangle ſemblable à un autre triangle (*fig.* 176.). Car tirant la ligne *cb* < ou > CB, & faiſant le reſte comme ci-deſſus, vous aurez le triangle *abc* ſemblable au triangle ABC (548.).

*Les Figures.*

## PROBLÊME I.

857. *Faire ſous un angle donné* a *un Parallélogramme égal à un autre Parallélogramme donné* AEDC (fig. 168.).

SOLUT. Dans le parallélogramme donné AEDC, menez la ligne BC qui faſſe ſur la baſe l'angle BCD = *a*; menez la parallele DF, & prolongez AE, & vous aurez le parallélogramme BCDF fait ſous l'angle donné *a*, & égal au parallélogramme donné ACDE; parce qu'ils ont tous deux même baſe & même hauteur.

## PROBLÊME II.

858. *Faire ſous un angle donné* a, *& ſur une ligne donnée* DF, *un Parallélogramme égal à un autre Parallélogramme donné* (fig. 169.).

SOLUT. I°. Conſtruiſez ſous l'angle donné *a*, par la méthode du problême précédent, un parallélogramme égal au parallélogramme donné, & ſoit ABOC ce parallélogramme ainſi conſtruit.

II°. Prolongez AB de maniere que l'on ait BG = DF, menez la ligne indéfinie GOD, & prolongez AC juſqu'à la rencontre de GD.

III°. Achevez le parallélogramme ADIG, & prolongez BO & CO; le parallélogramme cherché ſe-

ra EOHI, dont l'angle OEI = BOH = ACH (448.) = *a*, angle donné, & dont la baſe EI = BG = DF, ligne donnée.

Démonst. La raiſon eſt que le parallélogramme EOHI eſt égal au parallélogramme ACOB. Car la diagonale GD partage le parallélogramme ADIG en deux triangles égaux GDA, GDI (576.). Or ſi de ces deux triangles égaux vous retranchez d'une part le triangle GOB, & de l'autre le triangle GOH = GOB (576.); ſi de plus vous retranchez d'une part le petit triangle ODC, & de l'autre le triangle ODE = ODC (576.); les reſtes ſeront égaux, c'eſt-à-dire, que vous aurez le parallélogramme EOHI = ACOB.

*Corollaire I.*

859. Dans tout parallélogramme ou une diagonale GD (*fig.* 169.) eſt coupée en un point quelconque O par deux lignes paralleles aux côtés, les portions EOHI, ACOB s'appellent les *complémens* du parallélogramme, & ces complémens ſont toujours des parallélogrammes égaux.

*Corollaire II.*

860. Si le parallélogramme étoit un quarré AGID (*fig.* 170.) les complémens ſeroient alors des parallélogrammes non-ſeulement égaux, mais ſemblables. C'eſt pourquoi

I°. Prenant dans le quarré la ſomme des complémens, & y ajoutant le quarré COED, vous aurez la figure ADIHOB, laquelle s'appelle *Gnomon*, ou *Equerre*; d'où vient l'inſtrument de l'étui de Mathématique, qui porte ce nom, & dont l'uſage eſt de mener des lignes perpendiculaires; de former des angles droits; de conſtruire des quarrés; des rectangles; & autres figures à angles droits.

II°. A l'uſage de l'équerre on ajoute ſouvent celui de la *ligne d'aplomb*, qui ſe trouve auſſi dans l'étui de Mathématique, & qui n'eſt autre choſe

qu'un fil à l'extrêmité duquel on a attaché un plomb. L'uſage de ce fil eſt de déterminer les directions perpendiculaires à l'horiſon ; de juger de la poſition des plans, de leur paralléliſme, de leur inclinaiſon, plus ou moins grande par rapport à l'horiſon. Pour cet effet on ſuſpend la ligne d'*aplomb* par une de ſes extrêmités au ſommet de l'angle formé par les deux branches de l'équerre, entre leſquelles on adapte auſſi un quart de cercle gradué (*fig.* 171.). Or ſi l'on poſe ſur un plan quelconque les points B, C de l'équerre, de façon que le fil AF puiſſe ſe mouvoir librement le long du quart de cercle; on jugera ſi le plan eſt perpendiculaire, ou incliné plus ou moins ſur l'horiſon, ſuivant que le fil répondra au point O, milieu du quart de cercle, ou qu'il s'en écartera plus ou moins.

*Corollaire III.*

861. Suppoſant le point O autre que le milieu de la diagonale, ſi d'un quarré ADIG on retranche les complémens ACOB, EOHI (*fig.* 170.), il reſtera deux autres parallélogrammes GEOH, OCDE (*fig.* 172.), que l'on peut appeller les *Supplémens* du parallélogramme. Or ces ſupplémens ſont toujours des parallélogrammes ſemblables, mais inégaux.

Si l'on ſuppoſe que dans cette figure le point O étant fixe, tous les autres points B, G, H, C, D, E, ſoient mobiles ; alors ſubſtituant des regles à la place des côtés de la figure, il en réſultera un inſtrument (*fig.* 173.) dans lequel les points G, D, extrêmités de la diagonale commune, pourront s'approcher ou s'éloigner du point fixe O, tandis que les points collatéraux B, H & C, E s'éloigneront ou s'approcheront, dans la même proportion, de la diagonale GD. Or dans ce mouvement les deux parallélogrammes changeront d'eſpéce, mais reſteront toujours ſemblables.

D'où il ſuit que ſi le point G, pendant le mouvement décrit, une figure quelconque, le point oppoſé D décrira en même tems une figure plus petite, mais toute ſemblable.

C'eſt pourquoi l'on ſe ſert de cet inſtrument pour réduire les figures, les plans & les cartes, ſoit de grand en petit, ſoit de petit en grand.

### Problême III.

862. *Faire ſous un Angle donné* a *un Parallélogramme égal à un Triangle donné* ABC (fig. 174.).

Solut. Partagez la baſe BC du triangle en deux également au point D (829.); menez la ligne indéfinie AFG parallele à BC; faites (855.) l'angle CDF=*a*, & menez CG parallele à DF. Le parallélogramme CDFG ſera égal au triangle ABC; puiſqu'il a même hauteur & une baſe ſous double.

### Problême IV.

863. *Faire ſous un Angle donné* a *& ſur une Ligne donnée* DF, *un Parallélogramme égal à un Triangle donné* ACB (fig. 175.).

Solut. I°. Sur FB, moitié de CB, & ſous l'angle donné *a* conſtruiſez, ſelon la methode du problême précédent, le parallélogramme EFBH, égal au triangle donné ACB.

II°. Prolongez EH de façon que l'on ait HI=DF, menez la ligne indéfinie IBN, & faites le reſte, comme il a été enſeigné dans le ſecond problême (858.); & vous aurez le parallélogramme MBKD égal au parallélogramme EFBH. Or le parallélogramme BMDK eſt conſtruit ſous l'angle BMD=*a*, & ſur la ligne MD=HI=DF, ligne donnée: la raiſon eſt la même que celle que nous avons donnée pour le ſecond problême.

## ARTICLE II.

### *La Planimétrie.*

I°. L'objet de la planimétrie eſt la meſure des ſur-

faces. Pour mesurer une surface, il est ordinairement à propos, & même il est souvent nécessaire, (sur-tout lorsqu'elle est irréguliere) de la partager en triangles par des diagonales, ou des rayons, ou autres lignes semblables, & la mesure de tous ces triangles donne la mesure totale de la surface. Le but important dans la planimétrie est donc de bien sçavoir mesurer les triangles.

II°. On mesure aisément la surface d'un triangle, dont on connoît la hauteur & la base (577.); car la surface d'un triangle quelconque est égale à la moitié du produit de sa hauteur par sa base. Mais il est souvent impossible de déterminer ces deux dimensions, parce que l'on ne peut point y appliquer immédiatement la mesure. Dans ce cas, pourvu qu'il y ait de certaines conditions données, ou pourvu que des différentes parties qui composent le triangle, sçavoir, trois côtés & trois angles, il y en ait un certain nombre de connues; les Géométres ont l'art & la méthode de connoître & de déterminer toutes les autres, & c'est ce que l'on appelle *Solution des Triangles*, ou *Trigonométrie.*

III°. La Trigonométrie en donnant la mesure des triangles, procure en même-tems le moyen non-seulement d'évaluer une surface quelconque donnée; mais aussi de déterminer des hauteurs, des distances, &c. inconnues, comme nous le verrons: d'où l'on peut juger quelle est son utilité dans l'application des mesures. Nous parlerons donc, 1°. de la mesure des surfaces en général; 2°. de la mesure des triangles en particulier, ou de la Trigonométrie.

## PARAGRAPHE I.

### *De la Mesure des Surfaces en général.*

#### PROBLÊME I.

864. *Trouver l'aire ou la surface d'un Quarré, d'un Rectangle & d'un Triangle.*

SOLUT. I°. Mesurez l'un des côtés du quarré, &

multipliez-le par lui-même ; le produit ſera l'aire du quarré. Si le côté eſt de quatre pieds, vous aurez $4 \times 4 = 16$ pieds pour la ſurface du quarré.

II°. Multipliez la baſe du rectangle par ſa hauteur, & vous aurez l'aire du rectangle. Si la baſe eſt de 5 pieds & la hauteur de 3, vous aurez $3 \times 5 = 15$ pieds pour la ſurface du rectangle.

III°. D'un des angles du triangle abbaiſſez une perpendiculaire ſur le côté oppoſé, (que vous regarderez comme la baſe du triangle) ; & cette perpendiculaire ſera la hauteur du triangle : multipliez la baſe par la hauteur, & prenez la moitié du produit, & vous aurez (577.) la ſurface du triangle. La baſe étant de 5 pieds, & la hauteur de 4 ; vous aurez $\frac{1 \times 4}{2} = \frac{10}{2} = 10$ pieds pour la ſurface du triangle.

## PROBLÊME II.

865. *Trouver la ſurface d'un Parallélogramme.*

SOLUT. Du ſommet d'un des angles du Parallélogramme abbaiſſez une perpendiculaire ſur le côté oppoſé, (prolongé, s'il eſt néceſſaire,) & que vous prendrez pour baſe : cette perpendiculaire ſera la hauteur du parallélogramme, laquelle multipliée par la baſe, donnera la ſurface du parallélogramme (569.).

## PROBLÊME III.

866. *Trouver l'aire ou la ſurface d'un Polygone quelconque.*

SOLUT. Réduiſez le polygone en triangles par des diagonales menées du ſommet d'un des angles à tous les autres (*fig.* 66 & 67.) ; cherchez l'aire de chacun de ces triangles par la méthode ci-deſſus (864.) : la ſomme des aires triangulaires donnera l'aire du polygone.

### *Corollaire.*

867. Si le polygone eſt régulier, menez du centre du polygone des rayons obliques, leſquels partageront

le polygone en autant de triangles égaux qu'il y a de côtés dans le polygone : cherchez la ſurface d'un de ces triangles, & multipliez-la par le nombre des côtés du polygone, & vous aurez la ſurface du polygone. Ou tout d'un coup multipliez le rayon droit du polygone par la moitié du périmétre, & le produit donnera la ſurface du polygone régulier (581.).

### PROBLÊME IV.

868. *Trouver l'aire ou la ſurface d'un cercle, dont on connoît la circonférence.*

SOLUT. Cherchez le diamétre de ce cercle, lequel eſt à la circonférence à peu près dans le rapport de 7 à 22, ou de 100 à 314, (ce dernier rapport eſt un des plus exacts que l'on ait trouvé) : multipliez la circonférence par le rayon, & la moitié de ce produit, donnera l'aire, ou la ſurface du cercle (586.)

*Corollaire.*

869. On trouvera la ſurface d'un ſecteur de cercle, en multipliant l'arc du ſecteur par la moitié du rayon.

## PARAGRAPHE II.

*De la Meſure des Triangles, ou de la Trigonométrie.*

I°. La Trigonométrie eſt l'art de réſoudre les triangles : c'eſt-à-dire, de connoître les parties inconnues du triangle par le moyen de celles qui ſont connues.

II°. Dans tout triangle il y a cinq choſes à conſidérer, comme nous l'avons dit ailleurs ; ſçavoir, trois côtés & deux angles. Or lorſque de ces cinq choſes trois ſont connues, la Trigonométrie donne l'art & la méthode de connoître les autres.

III°. Si l'on a le triangle ABC (*fig.* 176.) dont on connoiſſe déjà trois choſes ; ſçavoir, l'angle A, & les

deux côtés AB, AC autour de cet angle; on pourra connoître le troiſiéme côté & les autres angles, (que l'on ſuppoſe ne pouvoir être meſurés immédiatement), on pourra, dis-je, les connoître en traçant un triangle moindre, mais ſemblable au premier. Car ſi l'on fait l'angle $a = A$, & les côtés *ab*, *ac*, proportionnels aux côtés AB, AC du grand, & que l'on mene le troiſiéme côté *bc*, le petit triangle *abc* ſera ſemblable au grand comme nous l'avons prouvé (550.). Or tous les côtés & tous les angles du petit triangle peuvent être meſurés immédiatement: ils feront donc connoître ceux des angles, ou des côtés du grand triangle qui étoient inconnus. Cette méthode de réſoudre les triangles s'appelle la Trigonométrie par les *triangles ſemblables*, & eſt toute fondée ſur la ſimilitude des triangles.

IV°. Mais on peut auſſi réſoudre immédiatement le grand triangle ABC, par le moyen des *ſinus*, *tangentes* & *ſécantes* des angles, leſquels ont un rapport géométrique avec les côtés du triangle, & font connoître les parties inconnues du triangle par le moyen de celles qui ſont connues. Or cette méthode de réſoudre les triangles, s'appelle Trigonométrie par les *ſinus*, *tangentes* & *ſécantes*; & c'eſt celle que nous allons expoſer. Nous parlerons, 1°. de la théorie des *ſinus*, *tangentes* & *ſécantes*; 2°. de la conſtruction de la Table des *ſinus*, *tangentes* & *ſécantes*; 3°. de la réſolution des triangles; 4°. de l'application de la Trigonométrie à la pratique.

## NOMBRE I.

### *Théorie des Sinus, Tangentes & Sécantes.*

### *DÉFINITIONS.*

#### I.

870. On appelle *Sinus-droit* d'un arc AE, ou d'un

angle ACE, meſuré par cet arc, une ligne AB (*fig.* 178.) tirée de l'extrêmité de l'arc perpendiculairement ſur le rayon, ou diamétre, qui paſſe par l'autre extrêmité du même arc.

II.

871. La ligne BE, qui eſt la partie du rayon compriſe entre le ſinus droit & la circonférence, s'appelle *Sinus-verſe* du même arc AE, ou de l'angle ACE.

III.

872. La ligne CB, qui eſt la portion du rayon compriſe entre le centre du cercle & le ſinus droit, s'appelle *Co-ſinus* ou *Sinus de complément* de l'arc AE, ou de l'angle ACE: parce que CB eſt toujours égal à FA, lequel eſt le ſinus droit de l'angle ACF, qui eſt le complément de l'angle ACE.

IV.

873. Le rayon du cercle au centre duquel on conçoit qu'eſt poſé le ſommet de l'angle, s'appelle *Sinus total.*

V.

874. On appelle *Tangente* d'un arc, ou d'un angle, une ligne EH perpendiculaire à l'extrêmité du rayon qui paſſe par une extrêmité de l'arc, & terminée par la rencontre du rayon prolongé CA, qui paſſe par l'autre extrêmité du même arc.

VI.

875. On appelle *Sécante* d'un arc, ou d'un angle, le rayon prolongé juſqu'à la rencontre de la tangente; ſçavoir, la ligne CH.

*Corollaire I.*

876. Le *ſinus-droit* d'un arc, ou d'un angle eſt toujours la moitié de la corde qui ſoutient un arc

double; *par ex:* le ſinus AB de l'arc AE eſt la moitié de la corde AD, laquelle ſoutient l'arc AED, double de AE, comme il eſt évident.

*Corollaire II.*

877. Le ſinus de l'angle droit, ou de l'arc de 90 degrés, eſt toujours le *rayon*. Car l'arc double de celui de 90 degrés eſt la demi-circonférence; la corde qui la ſoutient eſt le diamétre, dont la moitié eſt le rayon.

Le plus grand de tous les ſinus eſt le ſinus de l'*angle droit*, ou le *rayon*; & c'eſt pour cette raiſon qu'on l'appelle *Sinus-total*.

*Corollaire III.*

878. Un arc, ou un angle ACE étant donné, & ayant mené ſon ſinus droit AB; le *ſinus-verſe* ſera toujours la différence du *rayon* & du *co-ſinus*; & pareillement le *co-ſinus* ſera toujours la différence du *rayon* & du *ſinus-verſe*.

*Corollaire IV.*

879. Dans un triangle rectangle HCE, ſi l'on prend pour rayon le côté CE; il eſt clair que l'hypothénuſe CH ſera la *ſécante*, & l'autre côté HE ſera la *tangente* de l'angle HCE. Mais ſi l'on prend pour rayon l'hypothénuſe CH; il eſt évident que le côté HE ſera le *ſinus-droit*, & que l'autre côté CE ſera le *co-ſinus* de l'angle HCE. C'eſt pourquoi une même ligne HE peut faire la fonction de ſinus ou de tangente, ſelon que l'on prend pour rayon l'hypothénuſe CH, ou le côté CE.

*Corollaire V.*

880. L'angle droit, *par ex:* FCE, & à plus forte raiſon l'angle obtus, n'a ni tangente, ni ſécante. Car la tangente eſt une ligne perpendiculaire à l'extrémité du rayon, & prolongée juſqu'à la rencontre de

la sécante. Or dans l'angle droit & l'angle obtus la tangente & la sécante ne peuvent se rencontrer; mais sont paralleles dans l'un, & divergentes dans l'autre: donc, &c.

*Corollaire VI.*

881. L'angle obtus n'a point d'autre sinus que celui de l'angle aigu son supplément. Car si de l'extrêmité de l'arc qui mesure l'angle obtus, on tire perpendiculairement une ligne sur le rayon qui passe par l'autre extrêmité de l'arc; cette ligne tombera hors de l'angle, & sera le sinus de l'angle de *supplément*. Ainsi ce sont les sinus des angles de supplément qui servent dans la Trigonométrie à faire connoître les angles obtus.

THÉORÊME I.

882. *Dans tout Triangle les Sinus des Angles sont proportionnels aux côtés opposés à ces angles* (fig. 177.).

DEMONST. Les moitiés sont proportionnelles aux touts: or les sinus des angles sont les moitiés des côtés opposés aux angles. Car si l'on inscrit le triangle ABC dans un cercle; l'angle A étant inscrit, a pour mesure la moitié de l'arc sur lequel il est appuyé. Or le sinus de la moitié de l'arc CB, & par conséquent de l'angle A est la moitié de la corde BC (876.), laquelle corde est le côté opposé à l'angle A. De même l'angle C étant inscrit, a pour mesure la moitié de l'arc sur lequel il est appuyé. Or le sinus de la moitié de l'arc AB, & par conséquent de l'angle C, est la moitié de la corde AB, laquelle est le côté opposé à l'angle C. Il faut dire la même chose de l'angle B: donc, &c.

*Remarque.*

883. Le Théorême sera toujours vrai, soit que le triangle soit *Obliquangle*, soit qu'il soit *Rectangle*, soit qu'il soit *Obtusangle*. Mais observez que le sinus

nus de l'angle *obtus* eſt le même que le ſinus de ſon ſupplément, comme nous l'avons dit ; & que ce ſinus du ſupplément eſt toujours la moitié du côté oppoſé à l'angle obtus. Car dans le triangle BAC (*fig.* 179.) le ſupplément de l'angle en A eſt l'angle en D, (puiſque ces deux angles ſont inſcrits, & que leur ſomme étant appuyée ſur la circonférence entiere, a par conſéquent pour meſure la demi-circonférence ;) or le ſinus de l'angle en D eſt (876.) la moitié du côté BC : donc la moitié du côté BC ſera auſſi le ſinus de l'angle en A.

*Corollaire I.*

884. Dans tout triangle rectangle, comme CAB (*fig.* 178.), le ſinus-total, ou le rayon eſt au ſinus de l'un ou de l'autre des angles aigus, comme l'hypothénuſe eſt au côté oppoſé à cet angle aigu. En effet CA eſt en même-tems ſinus total & hypothénuſe ; AB eſt en même-tems ſinus de l'angle C, & côté oppoſé à cet angle. Or l'on a évidemment

CA : AB :: CA : AB.

*Corollaire II.*

885. Dans tout triangle rectangle CHE, le ſinus-total eſt à la tangente de l'un des angles aigus, comme le côté adjacent à cet angle eſt au côté oppoſé au même angle, ou l'on aura

CE : EH :: CE : EH.

Car CE eſt en même-tems ſinus total & côté adjacent de l'angle C, & EH eſt en même-tems tangente de l'angle C, & côté oppoſé à cet angle.

*Corollaire III.*

886. Dans tout triangle rectangle le ſinus total, ou le rayon eſt à la ſécante de l'un des angles aigus, comme le côté adjacent à cet angle eſt à l'hypothénuſe, ou l'on a

CE : CH :: CE : CH ;

parce que CE eſt en même-tems ſinus total & côté adjacent de l'angle C; & CH eſt en même-tems ſécante de l'angle C & hypothénuſe.

Remarquez que les proportions que donnent les trois corollaires précédens, ſont fondées ſur ce que dans un triangle rectangle chaque côté peut faire double fonction, comme nous l'avons dit (879.).

### THÉORÊME II.

887. *Dans tout Triangle ſcalène* ABC (fig. 180.) *ſi du plus grand angle* B *on abbaiſſe une perpendiculaire ſur le côté oppoſé, le plus grand côté* AC *ſera à la ſomme des deux autres* BC, BA, *comme la différence de ces côtés eſt à la différence des ſegmens* CE, EA, *faits par la perpendiculaire abbaiſſée.*

CONSTRUCTION. Du centre B, & de l'intervalle du petit côté CB, décrivez une circonférence, & prolongez AB juſqu'en G, pour avoir AG, ſomme des deux côtés, & HA leur différence: abbaiſſez la perpendiculaire BE pour avoir les ſegmens CE, EA, dont la différence ſera DA = EA — EC, comme il eſt évident, puiſque (412.) CE = ED.

DÉMONST. Les parties extérieures AH, AD des deux ſécantes AG, AC, ſont réciproquement proportionnelles aux ſécantes entieres, comme nous l'avons prouvé (540.): donc on aura

AC : AG :: AH : AD,

dans laquelle proportion le premier terme AC eſt le plus grand côté du triangle; le ſecond terme AG eſt la ſomme des deux autres côtés BA, BC; & HA eſt leur différence; & DA eſt la différence des deux ſegmens.

### THÉORÊME III.

888. *Dans toût triangle ſcalène la ſomme de deux côtés quelconques* BA, BC *eſt à leur différence* DC, *comme la tangente de la demi-ſomme des angles* A & C *oppoſés à ces côtés, eſt à la tangente de la demi-différence de ces mêmes angles* (fig. 181.).

CONSTRUCTION. Du point B, comme centre & de l'intervalle du petit côté BA, décrivez un cercle; menez la droite DA & la parallele CF; prolongez CB juſqu'en E, & menez la ligne EAF, laquelle ſera perpendiculaire aux lignes AD & FC, à cauſe de l'angle droit EAD. Or

I°. On aura la ligne CE=CB+BA, ſomme des côtés, & DC leur différence.

II°. L'angle ECF eſt égal à la demi-ſomme des angles BAC, & BCA. Car l'angle ECF=EDA, parce qu'ils ſont correſpondans. Or l'angle inſcrit EDA eſt ſous-double de l'angle central EBA (463.); lequel étant extérieur au triangle ABC, eſt par conſéquent égal à la ſomme des deux angles intérieurs oppoſés BAC+BCA: donc l'angle EDA, ou ſon égal ECF, eſt la moitié de la ſomme des angles BAC+BCA.

III°. L'angle ACF eſt égal à la demi-différence des deux mêmes angles BAC, BCA. Car le plus grand angle BAC = BAD + DAC: or DAC = ACF, parce qu'ils ſont alternes internes: donc BAC = BAD + ACF. Mais BAD=BDA, à cauſe du triangle ABD iſocele: donc on aura BAC = BDA + ACF. Or dans cette équation BAC eſt le plus grand des deux angles, & BDA eſt la moitié de la ſomme des angles: donc ACF eſt la moitié de leur différence; puiſque de deux quantités inégales, la plus grande (298.) eſt toujours égale à la moitié de la ſomme, plus à la moitié de la différence.

IV°. Puiſque l'angle F eſt droit, ſi on prend CF pour rayon, & que du point C, comme centre, on décrive une circonférence, la ligne FE ſera la tangente de l'angle ECF, demi-ſomme des angles; & FA ſera la tangente de l'angle ACF, demi-différence de ces mêmes angles.

DÉMONST. Les deux triangles EFC, EAD ſont ſemblables par la conſtruction: donc on aura

EC : DC :: EF : AF ;

dans laquelle proportion le premier terme EC eſt la ſomme des côtés BC, BA ; le ſecond eſt la différence des mêmes côtés ; le troiſiéme eſt la tangente de la demi-ſomme des angles ; & le quatriéme eſt la tangente de la demi-différence des mêmes angles : donc, &c.

## NOMBRE II.

### *De la Conſtruction de la Table des Sinus, Tangentes & Sécantes.*

I°. Pour conſtruire la table des ſinus, tangentes & ſécantes, on ſuppoſe que le rayon du cercle, au centre duquel le ſommet de l'angle eſt placé, eſt diviſé en un très-grand nombre de parties ; *par ex :* en 10000000 de parties. Or les ſinus, tangentes & ſécantes en contiendront toujours un certain nombre, plus ou moins grand, ſelon qu'ils ſeront plus grands ou plus petits.

II°. L'angle obtus n'a point d'autre ſinus que celui de ſon ſupplément, comme nous l'avons dit (881.) ; & par conſéquent la recherche des ſinus conſiſte à trouver les ſinus des angles depuis une minute juſqu'à un degré, & depuis un degré juſqu'à 90.

III°. Si les ſinus des angles, ou arcs, étoient proportionnels aux angles ou aux arcs, dès qu'on auroit connu le ſinus d'un angle, on trouveroit aiſément par la regle de trois les ſinus de tous les autres angles. Mais nous avons prouvé (882.) que les ſinus étoient proportionnels, non aux angles, ou aux arcs ; mais aux côtés oppoſés aux angles, ou aux cordes qui ſoutiennent des arcs doubles.

IV°. Les ſinus des angles étant les moitiés des cordes qui ſoutiennent des arcs doubles, pour les trouver, la queſtion ſe réduit à trouver les cordes de tous les arcs depuis une minute juſqu'à un degré ;

& depuis un degré juſqu'à 90. Or les ſinus étant trouvés il ſera facile de trouver les ſécantes & les tangentes.

## THÉORÊME I.

889. *Dans les cercles inégaux les cordes* BC & DE *des arcs ſemblables ſont entr'elles, comme les rayons* AC & AE *de leurs cercles* (fig. 99.).

DÉMONST. Les deux triangles ACB, AED ſont ſemblables : donc on aura la proportion

BC : DE :: AC : AE.

*Remarque.*

890. C'eſt ſur ce principe qu'a été conſtruit le compas de proportion, dont un des principaux uſages eſt de trouver les cordes des différens arcs dans un cercle donné (*fig.* 160.).

CONSTRUCTION. L'on ſuppoſe un cercle, ou un demi-cercle, qui ait été diviſé le plus exactement qu'il a été poſſible, en ſes degrés depuis un degré juſqu'à 180. Enſuite prenant deux lignes mobiles autour d'un point A pris pour centre du compas de proportion, l'on tranſporte toutes les cordes du cercle diviſé ſur les deux lignes mobiles de part & d'autre, *par ex :* la longueur de la corde A 30, qui eſt une corde de 30 degrés, ſe tranſporte de A en D; la corde A60 ſe tranſporte de A en E, & ainſi du reſte.

SOLUT. Soit maintenant donné un cercle à volonté, & dont le rayon ſoit nommé EF, & qu'il ſoit propoſé de trouver dans ce cercle un arc de 40 degrés; j'ouvre les deux branches du compas de proportion, de façon que le rayon EF ſoit porté de 60 en 60 : enſuite cherchant l'intervalle qui ſe trouve entre 40 & 40, je le porte ſur le cercle à diviſer, & j'ai une corde de 40 degrés : & par conſéquent ſi du point A pris comme centre, & de l'intervalle AO je décris un arc entre les branches du com-

pas de proportion, cet arc ſera de 40 degrés, & l'angle formé par les deux branches du compas ſera de 40 degrés; ce qui donne la méthode de faire aiſément un angle de tel nombre de degrés que l'on voudra.

Demonst. A cauſe des deux triangles ſemblables AOM & AEF, on a la proportion

AE : EF :: AO : OM.

Or dans cette proportion le premier terme eſt le rayon ſur lequel a été conſtruit le compas de proportion, parce que la corde de 60 degrés eſt égale (516.) au rayon; le ſecond terme eſt le rayon du cercle à diviſer, le troiſiéme terme eſt la corde de 40 degrés du premier cercle: donc le quatriéme terme ſera la corde de 40 degrés du ſecond cercle. Car dans les cercles inégaux nous venons de prouver que les cordes des arcs ſemblables ſont entr'elles comme les rayons.

## Théorême II.

891. *Dans tout Quadrilatere inſcrit au cercle, le Rectangle fait des deux diagonales, eſt égal à la ſomme des deux Rectangles faits ſous les côtés oppoſés du Quadrilatere* (fig. 182.), *c'eſt-à-dire, que* AC × BD = AB × DC + AD × BC.

Démonst. Menez la ligne AE, enſorte qu'elle faſſe l'angle DAE égal à l'angle BAC; & les triangles ABC & AED ſeront ſemblables. Car l'angle ECA = ADB, parce qu'ils ſont appuyés ſur le même arc; & l'angle BAC = DAE par la conſtruction: donc on aura (535) CB : CA :: DE : DA; & par conſéquent (199.) CB × DA = CA × DE. Pareillement les triangles ABE, ACD ſont auſſi ſemblables. Car l'angle ABE = ACD, parce qu'ils ſont appuyés ſur le même arc AD, & ajoutant l'angle EAC aux deux angles égaux BAC, DAE, vous aurez l'angle BAE = DAC: donc (535.) on aura AB:

BE :: CA : CD ; & par conſéquent AB × CD = BE × CA, & ajoutant les deux équations, on aura

CB × DA + AB × CD = CA × DE + CA × BE =

CB × DE + BE = CA × DB,

dans laquelle équation le premier membre eſt la ſomme des rectangles faits ſous les côtés oppoſés du quadrilatere ; & le dernier eſt le rectangle fait ſous les deux diagonales : donc, &c.

### Problême I.

892. *Connoiſſant la corde* AB *d'un arc, trouver la corde* AE *de ſon ſupplément* (fig. 118.).

Solut. L'angle en A eſt droit (464.), & par conſéquent le triangle EAB eſt rectangle. Si donc on ſuppoſe le rayon diviſé en 10000000 de parties, le diamétre BE en vaudra 20000000 ; par conſéquent ſi du quarré du diamétre vous retranchez le quarré de la corde connue AB, le reſte ſera le quarré de la corde AE, dont la racine quarrée exprimera le nombre que contient AE.

### Problême II.

893. *Connoiſſant les cordes de deux arcs* AB, AD ; *trouver la corde* BD *de la ſomme des deux arcs* (fig. 183.).

Solut. Cherchez par le problême précédent les cordes des ſupplémens BC & DC, & menez le diamétre AC. Donc ſi vous multipliez AB par DC, & AD par BC, la ſomme de ces produits ſera (891.) égale au rectangle des deux diagonales BD & AC, lequel étant diviſé par le diamétre AC, donnera au quotient la corde cherchée BD.

*Corollaire.*

894. Si l'on avoit ſuppoſé AD = AB, comme on le voit (*fig.* 184.), alors la corde BD auroit été la corde d'un arc double de l'arc BA. C'eſt pourquoi

I°. Connoiſſant la corde d'un arc, on peut par la méthode du problême précédent, connoître la corde d'un arc double.

II°. Connoiſſant la corde d'un arc, on peut trouver celle d'un arc triple. Il ne s'agit que de trouver la corde d'un arc double, & enſuite la corde de la ſomme de l'arc ſimple & de l'arc double, (893.) & vous aurez la corde de l'arc triple.

III°. Connoiſſant la corde d'un arc, on peut facilement trouver la corde d'un arc quintuple. Pour cela il faut trouver la corde d'un arc double & la corde d'un arc triple, & enſuite la corde de la ſomme de ces deux arcs (893.), laquelle ſera la corde d'un arc quintuple.

PROBLÊME III.

895. *Connoiſſant la corde* BD *d'un arc, trouver la corde* BA *de la moitié de cet arc* (fig. 184.).

SOLUT. Ayant mené le rayon BF, du quarré de ce rayon ôtez le quarré de BE, moitié (412.) de la corde connue, & le reſte ſera le quarré de FE, dont extrayant la racine, vous aurez la ligne FE: donc AE, qui eſt = AF — EF, ſera connue. Quarrez la ligne AE, & ajoutez ſon quarré à celui de BE, la ſomme ſera le quarré de la corde BA, dont extrayant la racine, on aura la corde cherchée BA d'un arc ſous-double.

PROBLÊME IV.

896. *Connoiſſant la corde d'un arc, trouver la corde du tiers de cet arc.*

SOLUT. L'on ſçait que la corde *a* d'un arc ſous-triple doit être plus grande que le tiers d'une corde *b* d'un arc triple. Suppoſons donc pour la premiere un nombre de parties un peu plus grand que le tiers des parties de la ſeconde, & par cette corde ſuppoſée *a* cherchez la corde d'un arc triple. Si celle que vous trouverez, eſt égale à la corde donnée *b*, la corde *a* ſera la corde d'un arc ſous-triple; mais ſi celle que vous trouvez, n'eſt pas la même que la corde donnée *b*, augmentez, ou diminuez le nombre de parties que vous avez ſuppoſé à la corde *a*, juſqu'à ce

que vous ayez trouvé par la corde *a*, la corde d'un arc triple, qui ſoit la même que la corde donnée *b*.

*Corollaire.*

897. Connoiſſant la corde d'un arc, on peut trouver par la même méthode la corde de la cinquiéme partie de l'arc, en ſuppoſant pour la ſeconde un nombre de parties un peu plus grand que la cinquiéme partie de la premiere, & cherchant par cette corde ſuppoſée la corde d'un arc quintuple.

*Remarque.*

898. Le rayon du cercle étant ſuppoſé diviſé en 10000000 de parties égales, il ſuit que la corde de 60 degrés, qui eſt égale au rayon (516.), ſera de 10000000 de parties. Or connoiſſant la corde de 60 degrés, on voit aſſez comment on peut, par l'uſage des problêmes & des corollaires précédens, trouver les cordes de tous les arcs du quart de cercle, depuis une minute juſqu'à un degré, & depuis un degré juſqu'à 90 degrés; & par conſéquent comment on peut déterminer les ſinus de tous les arcs, puiſque les ſinus ſont les moitiés des cordes qui ſoutiennent des arcs doubles.

De plus nous allons voir comment, ayant trouvé les ſinus de tous les arcs, on peut déterminer leurs co-ſinus, leurs tangentes & leurs ſécantes.

PROBLÊME V.

899. *Connoiſſant le ſinus* AB *d'un arc, trouver le ſinus* FA *de ſon complément* (fig. 178.).

SOLUT. Dans le triangle rectangle FCA, on connoît l'hypothénuſe CA qui eſt égale au rayon; de plus on connoît par l'hypothèſe le côté FC = AB: donc il ſera aiſé de trouver le troiſiéme côté, ou le co-ſinus FA, en retranchant le quarré de FC du quarré de CA, & extrayant la racine quarrée de la différence.

PROBLÊME VI.

900. *Ayant trouvé les ſinus & les co-ſinus des arcs, trouver leurs Tangentes* (fig. 178.).

Solut. Il eſt évident que pour tous les arcs on aura les triangles ſemblables CBA, CEH qui donneront la proportion CB : BA :: CE : EH, dans laquelle on connoît les trois premiers termes, ſçavoir, le co-ſinus CB, le ſinus droit BA, & le ſinus total CE: donc on connoîtra le quatriéme terme, ſçavoir, la tangente EH.

## Problême VII.

901. *Connoiſſant la tangente d'un arc, trouver la Co-tangente, ou la Tangente de ſon complément* (fig. 185.).

Solut. Diviſez le quarré du rayon par la tangente de l'arc, & le quotient ſera la co-tangente.

Démonst. La raiſon en eſt que le quarré du rayon eſt égal au produit de la tangente d'un arc & de la tangente de ſon complément: Car les triangles CEH, CIA ſont ſemblables, & donnent

EH : CE :: CI ou CE : IA :

donc on aura $\overline{CE}^2 = EH \times IA$,

& $\frac{\overline{CE}^2}{EH} = IA$ :

donc diviſant le quarré du rayon par la tangente de l'arc, on aura la co-tangente.

*Remarque.*

902. C'eſt pourquoi ayant trouvé par le problême VI, les tangentes de tous les arcs depuis un degré juſqu'à 45 degrés, on pourra trouver toutes les tangentes depuis 45 degrés juſqu'à 90 par la méthode du problême VII; ce qui donnera les co-tangentes, & cette pratique ſera plus facile que ſi l'on cherchoit immédiatement les tangentes des grands arcs par la méthode du ſixiéme problême.

## Problême VIII.

903. *Connoiſſant les Tangentes de tous les arcs, déterminer les Sécantes* (fig. 178.).

Solut. Le triangle HCE eſt rectangle: donc ajoutant le quarré de la tangente HE au quarré du rayon CE, on aura le quarré de la ſécante CH, dont ex-

trayant la racine quarrée, on aura la sécante CH elle-même.

*Corollaire.*

904. Connoissant la co-tangente IA d'un arc OE (*fig.* 185.), il sera aisé de trouver la co-sécante CA du même arc. Car le triangle ICA étant rectangle, si l'on ajoute le quarré de la co tangente IA au quarré du rayon IC, on aura le quarré de la co-sécante CA.

*Remarque I.*

905. Les Géométres ayant trouvé les sinus, co-sinus, tangentes, &c. de tous les arcs du quart de cercle, en ont dressé une table partagée en différentes colonnes, qui, prises de haut en bas, donnent les sinus, co-sinus, tangentes, &c. de tous les angles par degrés & minutes jusqu'à 45 degrés; & prises de bas en haut, donnent les sinus, co-sinus, tangentes, &c. pour les angles depuis 45 degrés jusqu'à 90; comme on peut le voir par cet exemple, dans lequel on suppose le rayon divisé en 10000000 de parties, & où nous représentons seulement la colonne des sinus & co-sinus pour quelques angles.

1. *Degré,*

| M. | *Sinus.* | *Co-Sinus.* | |
|---|---|---|---|
| 0 | 1745 · 24 | 99984 · 77 | 60 |
| 10 | 2036 · 08 | 99979 · 27 | 50 |
| 20 | 2326 · 90 | 99972 · 92 | 40 |
| 30 | 2617 · 69 | 99965 · 73 | 30 |
| 40 | 2908 · 47 | 99957 · 69 | 20 |
| 50 | 3299 · 22 | 99948 · 81 | 10 |
| 60 | 3489 · 95 | 99939 · 08 | 0 |
| | *Co-Sinus.* | *Sinus.* | M. |

88. *Degrés.*

Il eſt clair qu'étant donné un angle quelconque *par ex :* d'un degré 30 minutes, & cherchant dans la premiere colonne à gauche, qui appartient à l'angle d'un degré, le nombre 30 de minutes de cet angle, vous trouverez à côté le ſinus 2617 · 69, & le co-ſinus 99965 · 73. pareillement ſi l'on donne un ſinus, & qu'il faille trouver à quel nombre de degrés & minutes il appartient, il faut chercher ce ſinus dans la colonne des ſinus; & ſi on ne l'y trouve pas préciſément, s'arrêter à celui qui en approche le plus, & prendre les degrés & minutes qui lui répondent.

*Remarque II.*

906. Pour abréger les calculs de la Trigonométrie, les Géométres, après avoir trouvé les ſinus, tangentes & ſécantes des angles, ont cherché les logarithmes de ces mêmes ſinus, tangentes & ſécantes, & en ont conſtruit des tables, leſquelles procurent dans le calcul des triangles la même facilité que donnent les logarithmes des nombres naturels, dont nous avons parlé. Mais il eſt bon de remarquer,

I°. Que pour plus grande préciſion on a cherché ces logarithmes pour des ſinus & tangentes, dont le rayon, ou le ſinus total, étoit de 10000000000 de parties, ou de onze caracteres; quoique dans les tables il ne ſoit ordinairement que de 10000000 de parties, ou de huit caracteres; parce que l'on en a retranché trois, tant au ſinus total, qu'aux autres ſinus, tangentes & ſécantes.

II°. C'eſt pourquoi ſi l'on vouloit vérifier le logarithme de quelque ſinus, ou tangente, il faudroit auparavant ajouter trois zero à ce ſinus, ou à cette tangente, (ce qui eſt preſque la même choſe que ſi on leur ajoutoit les trois caracteres qu'on en a retranchés,) & on chercheroit enſuite le logarithme de ce nombre augmenté, ſuivant la méthode

qui a été preſcrite (811.) ; & c'eſt par ce procédé que l'on a trouvé les logarithmes des ſinus, tangentes & ſécantes du quart de cercle de minutes en minutes.

III°. Si le logarithme-ſinus, ou le logarithme tangente qui réſulte d'une opération, ne ſe trouve pas exactement dans les tables, & qu'on veuille ſçavoir à quel nombre de degrés, minutes & ſecondes il appartient, il faudra pratiquer la même méthode qui a été donnée (810.) pour les logarithmes des nombres naturels.

## NOMBRE III.

### *De la Réſolution des Triangles.*

Il y a quatre cas à diſtinguer ici : ſçavoir, dans un triangle, ou bien l'on connoît deux côtés & un angle oppoſé à l'un des côtés connus ; ou bien l'on connoît deux angles & le côté compris ; ou bien l'on connoît les trois côtés ; ou bien l'on connoît deux côtés & l'angle compris.

### PROBLÊME I.

907. *Réſoudre un Triangle quelconque* ABC (fig. 176.) *dans lequel on connoît deux côtés* AB *&* BC, *& un angle* A *oppoſé à l'un des côtés connus.*

SOLUT. I°. Faites la proportion ; le côté BC eſt au ſinus de l'angle oppoſé A, comme le côté AB eſt au ſinus de l'angle oppoſé C (882.), ou

$$BC : S \cdot A :: BA : S \cdot C,$$

& par ce moyen on connoîtra un ſecond angle dans le triangle ABC ; & par conſéquent le troiſiéme angle ſera auſſi connu.

II°. De plus le troiſiéme côté AC ſe connoîtra facilement, en faiſant une proportion ſemblable dans laquelle le côté cherché ſoit le quatriéme terme ; ſçavoir, le ſinus de l'angle A eſt au côté oppoſé BC, comme le ſinus de l'angle B eſt au côté oppoſé AC, ou $S \cdot A : BC :: S \cdot B : AC$.

III°. C'eſt pourquoi ſuppoſant l'angle en A de

35 degrés 40 minutes, le côté opposé BC de 336 toises, & que le triangle soit rectangle en B, on trouvera dans les tables que le sinus d'un angle de 35 degrés 40 minutes est 58306 · 87, & que le sinus de l'angle droit, ou le sinus total, est 10000000; ainsi la proportion précédente deviendra

$$58306 \cdot 87 : 336 :: 10000000 : x$$

ou en retranchant les deux derniers chiffres dans les nombres qui expriment les sinus, suivant la regle que nous avons donnée en parlant (791.) des fractions décimales, l'on aura $58307 : 336 :: 100000 : x$, & le quatriéme terme $x$, ou le côté cherché AC, qui est l'hypothénuse, se trouvera être $x = 576$.

IV°. Les Géometres ayant construit une table des logarithmes pour les sinus, co-sinus, tangentes, &c. des différens angles, on pourra, à la place des sinus des angles, substituer leurs logarithmes, & à la place des nombres naturels qui représentent les côtés connus, substituer aussi leurs logarithmes, & dans ce cas la proportion ci-dessus deviendra $976571 \cdot 97 : 252633 \cdot 93 :: 100000000 : x$, dans laquelle on trouvera le quatriéme terme $x$ par la voie d'addition & de soustraction, au lieu de la multiplication & de la division qu'il eût fallu employer dans la précédente proportion.

### Problême II.

908. *Résoudre un Triangle quelconque* ABC (fig. 177.) *dont on connoît deux angles* B & C, *& le côté compris* BC.

Solut. Les deux angles B & C étant connus, le troisiéme angle A est par conséquent connu; c'est pourquoi faisant la proportion

$$S \cdot A : BC :: S \cdot C : AB,$$

on connoîtra le second côté AB; & faisant la proportion $S \cdot A : BC :: S \cdot B : AC$,
on connoîtra le troisiéme côté AC, & le triangle ABC deviendra par-là parfaitement connu.

### Problême III.

909. *Réſoudre un Triangle quelconque ſcalène* CBA (fig. 180.), *dont on connoît les trois côtés.*

Solut. Il faudra diviſer le triangle donné en deux triangles rectangles par une perpendiculaire BE, abbaiſſée du plus grand angle ſur le côté oppoſé.

II°. Faire la proportion (887.), le grand côté AC eſt à la ſomme AG des deux autres côtés, comme la différence AH de ces deux côtés eſt à la différence DA des ſegmens CE, EA, faits par la perpendiculaire, ou AC : AG :: AH : DA.

III°. Connoiſſant le côté CA, ſa moitié eſt auſſi connue : donc ſi à cette moitié vous ajoutez la moitié de la différence DA, vous aurez le plus grand ſegment EA qui eſt égal (298.) à la moitié de la ſomme, plus la moitié de la différence de ces ſegmens inégaux.

IV°. C'eſt pourquoi dans le triangle rectangle BEA, vous connoiſſez maintenant les côtés EA, BA, & l'angle droit en E : donc faiſant

BA : S · E :: EA : S · B,

vous connoîtrez un ſecond angle B, & par conſéquent le troiſiéme angle A.

V°. Maintenant dans le triangle BCA, vous connoiſſez les trois côtés & un angle A oppoſé à l'un de ces côtés : donc il ſera facile de connoître les autres angles par la méthode du premier problême.

### Problême IV.

910. *Réſoudre un Triangle quelconque ſcalène* ABC (fig. 181.), *dans lequel on connoît deux côtés* AB, BC, *& l'angle compris* B.

Solut. I°. Il faut chercher un des angles oppoſés aux côtés connus, en faiſant (888.) la proportion : la ſomme des deux côtés connus CB + BA = CE eſt à leur différence DC, comme la tangente de la demi-ſomme des angles oppoſés aux côtés connus eſt à la

tangente de la demi-différence de ces mêmes angles.

IIº. Le quatriéme terme de cette proportion fera connoître la différence des deux angles oppoſés aux côtés connus. Mais on en connoît la ſomme par l'hypothèſe : donc prenant la moitié de la ſomme, plus la moitié de la différence de ces angles, on connoît le le plus grand des angles, ſçavoir A ; ou prenant la moitié de la ſomme, moins la moitié de la différence, on connoîtra le plus petit des angles, ſçavoir C : donc dans le triangle ABC on connoît maintenant les trois angles.

IIIº. On connoîtra le troiſiéme côté AC par la méthode du premier problême.

## NOMBRE IV.

### *Uſage & Application de la Trigonométrie.*

Iº. L'uſage de la Trigonométrie conſiſte à meſurer ſur le terrein des angles & des lignes. Les lignes ſe meſurent par le moyen de la *perche*, de la *toiſe* ou du *pied* ; les angles ſe meſurent par le moyen du *graphométre*.

IIº. La *Toiſe* eſt une meſure qui contient 6 pieds ; la *perche* de Paris contient 3 toiſes ; 2000 toiſes font la petite lieue ; 2282 toiſes font la lieue commune.

IIIº. Le *Graphométre* eſt un cercle, ou demi-cercle exactement diviſé en ſes degrés & minutes, & accompagné d'une alidade & des deux pinnules (*fig.* 188.). L'alidade eſt un diamétre roulant ſur le centre. Les pinnules ſont deux platines de métal perpendiculairement élevées aux deux extrêmités de l'alidade, & percées pour diriger le rayon viſuel vers l'objet que l'on cherche.

### PROBLÊME I.

911. *Meſurer ſur le terrein un angle* ; par ex : *l'angle* ABC, *dont le ſommet* B *eſt ſuppoſé acceſſible* (fig. 186.).

SOLUT. Iº. Poſez le centre du graphométre au ſommet

ſommet B de l'angle à meſurer, & plantez des piquets ſur chacun des deux côtés de l'angle, *par ex:* aux points A & C.

II°. Dirigez l'alidade vers le piquet A, en regardant par les fentes des deux pinnules; faites enſuite tourner l'alidade, pour la diriger vers le piquet C.

III°. Comptez enſuite ſur le graphométre les degrés & minutes compris entre les deux directions BC & BA de l'alidade, & vous aurez la meſure de l'angle propoſé.

### PROBLÊME II.

912. *Meſurer ſur le terrein un Angle ſaillant* BCD, *dont le ſommet* C *eſt ſuppoſé inacceſſible* (fig. 192.).

SOLUT. I°. Poſez le graphométre horiſontalement, & tournez l'alidade de façon qu'elle aligne le côté CD, & plantez un piquet à un point quelconque *b* de l'alignement.

II°. Par le moyen du graphométre alignez auſſi le côté BC, & plantez un piquet à un point quelconque *d* de l'alignement.

III°. Aux points *b* & *d* meſurez immédiatement les angles C*bd*, & C*db*, & vous connoîtrez le troiſiéme angle *b*C*d*=BCD oppoſé au ſommet.

### PROBLÊME III.

913. *Meſurer ſur le terrein un Angle rentrant* ABC, *dont le ſommet* B *eſt ſuppoſé inacceſſible* (fig. 193.).

SOLUT. I°. Alignez, comme dans le problême précédent, les côtés AB & BC de l'angle, & plantez des piquets dans des points quelconques *a* & *c*, pris dans les alignemens des côtés.

II°. Aux points *a* & *c* meſurez immédiatement les angles B*ac*, & B*ca*, & vous connoîtrez le troiſiéme angle ABC, qui eſt le ſupplément des deux autres.

### PROBLÊME IV.

914. *Meſurer une hauteur acceſſible par le pied*, par

ex: *la hauteur perpendiculaire* AB *d'une Tour* (fig. 187.).

Solut. I°. Prenez un point de ſtation D, d'où vous viſerez par le moyen de l'alidade du graphomètre les points A & B, pour meſurer l'angle ADB.

II°. Meſurez la diſtance, ou ligne DB, qui eſt la baſe du triangle ADB, lequel eſt rectangle en B, & dont l'angle B eſt par conſéquent connu.

III°. Dans le triangle ADB vous connoiſſez deux angles D & B, & le côté compris DB: vous connoîtrez donc le côté AB, ou la hauteur perpendiculaire de la tour, en faiſant la proportion, le ſinus de l'angle A eſt au côté oppoſé & connu DB, comme le ſinus de l'angle D eſt au côté cherché AB, ou,

S · A : DB :: S · D : AB.

## Problême V.

915. *Meſurer une Hauteur inacceſſible par le pied*, par ex: *la hauteur perpendiculaire d'une Tour* AB (fig. 187.) *dont le point* B *eſt ſuppoſé inacceſſible.*

Solut. I°. Prenez deux points de ſtation C & D, & meſurez la diſtance CD.

II°. Du point C viſez les points A & D pour meſurer l'angle ACD, & du point D viſez les points A & C, pour meſurer l'angle ADC.

III°. Cela poſé, vous connoiſſez dans le triangle ACD deux angles & le côté compris, le troiſiéme angle ſera par conſéquent connu: c'eſt pourquoi vous pourrez connoître le côté AD, en faiſant la proportion S · A : CD :: S · C : AD.

IV°. Au point de ſtation D viſez les points A & B, pour meſurer l'angle ADB. D'ailleurs on connoît l'angle en B qui eſt droit; dans le triangle ABD vous connoiſſez donc tous les angles & un côté; c'eſt pourquoi vous connnoîtrez le côté AB, en faiſant la proportion

S · B : AD :: S · D : AB.

## PROBLÊME VI.

916. *Mesurer une hauteur oblique & inaccessible par le pied*, par ex : *la pente* AB *d'une montagne, dont le point* B *est supposé inaccessible* (fig. 189.).

SOLUT. I°. Prenez, comme ci-devant, deux points de station C & D, & résolvez par la méthode ci-dessus le triangle ACD, pour connoître le côté AD.

II°. Au point de station D mesurez l'angle ADB d'un second triangle ADB, dans lequel vous connoîtrez par conséquent deux choses, sçavoir le côté AD, & l'angle ADB.

III°. Maintenant si l'on pouvoit mesurer immédiatement le côté BD du second triangle, ce triangle seroit aisé à résoudre, parce que l'on y connoîtroit deux côtés & l'angle compris; mais ce côté ne peut pas être mesuré immédiatement, à cause du point B inaccessible.

IV°. Il faut donc prendre un troisiéme point de station E, duquel visant les points D & B, vous formerez par les rayons visuels un troisiéme triangle dans lequel vous connoîtrez les angles en E & D en les mesurant par le graphométre, & le côté ED que l'on peut mesurer immédiatement : la solution de ce triangle BED fera connoître le côté cherché BD.

V°. Cela posé, dans le triangle ADB vous connoissez trois choses, sçavoir, les deux côtés AD, BD, & l'angle compris ADB. Il faut donc maintenant chercher la valeur d'un des angles opposés à l'un des côtés connus, en faisant la proportion (888.).

*La somme des deux côtés connus* AD + DB *est à leur différence, comme la tangente de la demi-somme des angles opposés à ces côtés, est à la tangente de la demi-différence de ces mêmes angles.*

Cette proportion fera connoître les angles du triangle ABD, lesquels étant connus, vous connoî-

trez facilement le côté AB, en faiſant la proportion

S · A : BD :: S · D : AB.

PROBLÊME VII.

917. *Meſurer ſur le terrein une diſtance acceſſible par une ſeule de ſes extrêmités*, par ex: *la largeur d'une Riviere.*

SOLUT. La largeur de la riviere ſoit repréſentée par la ligne AB (*fig.* 176.): pour la meſurer prenez deux points de ſtation B & C, & meſurez leur diſtance CB; de plus à l'autre bord de la riviere choiſiſſez un objet viſible, *par ex:* A, que vous puiſſez viſer des deux points de ſtation B & C. Or au point de ſtation B meſurez l'angle ABC, & au point de ſtation C meſurez l'angle ACB: donc dans le triangle ACB vous connoiſſez deux angles & le côté compris: donc vous connoîtrez le côté AB, en faiſant la proportion (882.).

S : A : BC :: S · C · AB.

PROBLÊME VIII.

918. *Meſurer la diſtance de deux objets inacceſſibles, tels que* C & D (fig. 186.).

SOLUT. I°. Prenez deux points de ſtation A & B, & meſurez leur diſtance AB.

II°. Du point A meſurez l'angle CAB, & du point B meſurez l'angle CBA, & réſolvez le triangle CBA pour connoître le côté BC.

III°. Réſolvez de la même maniere le triangle ABD pour connoître le côté BD.

IV°. Si dans le triangle CBD vous meſurez l'angle CBD, vous y connoîtrez trois choſes, ſçavoir, les deux côtés BD & BC, & l'angle compris B.

V°. Pour réſoudre le triangle CBD, il faut de plus chercher l'un des angles oppoſés aux côtés connus par la méthode donnée au ſixiéme problême (916.).

VI°. Connoiſſant par-là tous les angles de ce triangle, il ſera aiſé de trouver le côté CD, en faiſant la proportion S · C : BD :: S · B : CD.

## PROBLÊME IX.

919. *Mesurer la distance de plusieurs objets considérés comme inaccessibles, ou lever une Carte Géographique* (fig. 194.).

SOLUT. I°. Prenez une base MN, dont vous vérifierez la longueur le plus exactement qu'il sera possible. Posez le graphométre au point de station M, & visez successivement les points A, B, C, D, pour mesurer les angles NMD, NMC, NMB, NMA, (on doit passer l'angle NME, parce qu'il est trop aigu, & l'angle NML, parce qu'il est trop obtus.) Ensuite transportez le graphométre au point de station N & visez successivement les mêmes points A, B, &c. pour mesurer les angles MND, MNC, MNB, MNA.

II°. Les rayons visuels partis des extrêmités M & N formeront les triangles MAN, MBN, MCN, MDN, dont la solution vous donnera la position des points A, B, C, D. Car dans le triangle MAN connoissant la base MN, & les angles formés sur cette base, vous connoîtrez évidemment par la Trigonométrie les côtés AM & AN, & vous aurez conséquemment la position du point A. Pareillement dans le triangle MBN connoissant la base MN & les angles sur cette base, vous aurez les côtés BM, BN, & par conséquent la position du point B, & ainsi de suite.

III°. Maintenant du point N visez les points K, H, G, F, pour mesurer les angles MNK, MNH, MNG, MNF; & pareillement de l'extrêmité M visez les mêmes points K, H, &c. pour mesurer les angles NMK, NMH, NMG, NMF, ce qui vous donnera comme ci-devant, des triangles dont vous connoîtrez les côtés, & conséquemment la position des points K, H, G, &c. Car, *par ex:* dans le triangle MNK, connoissant la base MN & les angles sur cette base, vous trouverez les côtés NK & MK, & conséquemment la position du point K. Il faut

dire la même choſe pour les points H, G, F.

IV°. Pour avoir les points E & L, prenez dans les triangles déjà réſolus des côtés quelconques connus pour ſervir de baſes; *par ex:* pour avoir le point L prenez pour baſe le côté connu AM. Or ſi du point M vous meſurez l'angle AML, & du point A l'angle LAM, vous connoîtrez dans le triangle AML la baſe AM, & les deux angles ſur cette baſe: donc vous connoîtrez aiſément les côtés AL, & ML, & par conſéquent la poſition du point L.

## ARTICLE III.

### *La Stéréométrie.*

#### PROBLÊME I.

920. *Trouver la ſolidité d'un Cube.*

SOLUT. Meſurez un côté du cube, & multipliez-le par lui-même, le produit ſera la baſe: multipliez cette baſe par la hauteur du cube, ou par le côté, (qui n'eſt pas diſtingué de la hauteur,) ce ſecond produit donnera la ſolidité du cube. *Par ex:* ſi le côté du cube eſt de 4 pieds, vous aurez $4 \times 4 = 16$, & c'eſt la baſe: faites enſuite $16 \times 4 = 64$, & c'eſt la ſolidité du cube.

#### PROBLÊME II.

921. *Trouver la ſolidité d'un Priſme.*

SOLUT. Cherchez la baſe du priſme, en multipliant l'un par l'autre les deux produiſans, d'où réſulte cette baſe; multipliez enſuite la baſe par la hauteur du priſme, & vous en aurez la ſolidité. *Par ex:* ſi la baſe du priſme eſt un exagone régulier, dont chaque côté ſoit de 5 pieds, & dont la circonférence ſera par conſéquent de 30 pieds, cherchez-en le rayon droit, que je ſuppoſe être de 4 pieds; & vous aurez $4 \times 30 = 120$, dont la moitié 60 ſera (581.) la baſe du priſme: multipliez cette baſe par la hauteur, que je ſuppoſe être de 8 pieds, & vous aurez $60 \times 8 = 480$, pour la ſolidité du priſme.

*Corollaire.*

922. La pyramide étant (752.) le tiers d'un priſme de même hauteur & de même baſe, vous trouverez la ſolidité de la pyramide, en cherchant celle d'un priſme de même hauteur & de même baſe, & que vous diviſerez par 3.

## PROBLÊME III.

923. *Trouver la ſolidité d'un Cylindre.*

SOLUT. Cherchez la ſurface du cercle qui eſt la baſe du cylindre, en multipliant le rayon par la demi-circonférence, & multipliez cette baſe par la hauteur du cylindre; le produit ſera la ſolidité du cylindre.

*Corollaire.*

924. Le cône étant le tiers (756.) d'un cylindre de même baſe & de même hauteur, vous trouverez la ſolidité du cône en cherchant celle d'un cylindre de même baſe & de même hauteur, & dont vous prendrez le tiers.

## PROBLÊME IV.

925. *Trouver la ſolidité d'un Cône tronqué* CADF (fig. 141.).

SOLUT. I°. Cherchez la hauteur du cône entier CIF par le moyen des deux triangles ſemblables CGA, CBI, leſquels donnent la proportion, CG, différence des rayons CB & Ao, eſt à GA, hauteur du cône tronqué, comme le plus grand rayon CB eſt à la hauteur BI du cône entier; ou

CG : GA :: CB : BI.

II°. Connoiſſant la hauteur BI du cône entier CIF, cherchez-en la ſolidité en prenant le tiers du produit de ſa baſe par ſa hauteur.

III°. Retranchez la hauteur oB du cône tronqué de la hauteur IB du cône entier, & vous aurez la hauteur du petit cône AID.

IV°. Connoiſſant la hauteur du petit cône, dont

IV°. Donc la solidité de la sphere sera à celle du cube circonscrit, comme 523333 $\frac{1}{3}$ est à 1000000; & en multipliant par 3, comme 1570000 est à 3000000; & en divisant par 10000, comme 157 est à 300. Ainsi la sphere est au cube circonscrit à peu près dans le rapport de 157 à 300.

## PROBLÊME VII.

928. *Mesurer la capacité d'un vase circulaire*, par ex: *la capacité d'un Tonneau* (fig. 190.).

SOLUT. Comme le tonneau forme un ventre vers le milieu, & que de ce milieu il va toujours en diminuant vers ses deux extrêmités, on a coutume de le considérer comme un cylindre, dont la base est un cercle moyen proportionnel arithmétique entre le cercle qui forme le fond & celui qui forme le ventre.

II°. C'est pourquoi mesurez l'aire ou la surface d'un des fonds AB, & celui du plus grand cercle CD; prenez-en la somme, & la moitié de cette somme multipliée par la longueur EF du tonneau, donnera à peu près la capacité du tonneau. Car ce produit donnera un cylindre, qui aura pour hauteur la longueur du tonneau, & pour base un cercle moyen arithmétique entre le plus petit & le plus grand cercle du tonneau.

### *Corollaire I.*

929. Lorsque l'on connoît la capacité d'un vase cylindrique, ou la quantité de fluide qu'il peut contenir, il est facile de déterminer celle d'un autre vase cylindrique de même hauteur, mais de différent diamétre. Car les cylindres de même hauteur sont entr'eux comme leurs bases. Mais les bases étant des cercles, sont entr'elles comme les quarrés de leurs diamétres; & par conséquent les capacités de deux vases cylindriques qui ont même hau-

teur, ſont entr'elles comme les quarrés de leurs diamétres.

*Corollaire II.*

930. De ce principe les Géométres déduiſent une méthode facile & ingénieuſe de meſurer la capacité d'un vaſe cylindrique quelconque, étant connue celle d'un vaſe cylindrique plus petit & ſemblable.

I°. Soit (*fig.* 191.) AB le diamétre d'un vaſe cylindrique donné, & qui ſoit ſuppoſé contenir une meſure : ſur l'extrêmité A élevez une perpendiculaire indéfinie, ſur laquelle prenez A1 = AB, & menez B1 ; B1 ſera le diamétre d'un vaſe qui contiendra deux meſures, mais qui a la même hauteur que le premier.

II°. Faites A2 = B1 ; B2 ſera le diamétre d'un vaſe qui contiendra trois meſures, mais qui aura encore la même hauteur que le premier. On trouve de cette maniere les diamétres B3, B4, ou A4, A5, &c. de pluſieurs autres vaſes plus grands.

III°. Si vous portez ſur une verge de bois ou de fer, d'un côté les diviſions trouvées A1, A2, A3, &c. & ſur l'autre côté, autant de fois qu'il ſera poſſible, la hauteur d'un cylindre qui ne contient qu'une meſure ; cette verge s'appelle *Jauge*, & ſert à meſurer les capacités des vaiſſeaux cylindriques.

IV°. La raiſon en eſt que deux cylindres de même hauteur ( laquelle ſoit celle d'une meſure, ) étant entr'eux comme les quarrés de leurs diamétres (929.), le quarré du diamétre d'un vaſe qui contient deux, trois, quatre, &c. meſures, ſera par conſéquent double, triple, quadruple, &c. du quarré du diamétre d'un vaſe qui n'en contient qu'une. Or le quarré de B1, ou de A2, eſt le double ; le quarré de B2, ou de A3, eſt le triple du quarré de AB, ou de A1, (614.) : donc A2 ſera le diamétre d'un vaſe qui contient deux meſures ; A3, celui d'un vaſe qui contient trois meſures, &c.

V°. Si vous appliquez donc au diamétre d'un vaſe cylindrique le côté de la *jauge* où ſont marquées les diviſions A1, A2, A3, &c. vous verrez tout d'un coup combien ce diamétre donne de meſures; & multipliant ce diamétre (ou le nombre de meſures indiqué par ce diamétre) par la hauteur du vaſe, le produit ſera la quantité de meſures que tout le vaſe peut contenir : ainſi le diamétre étant A5, & la hauteur 8, vous aurez $5 \times 8 = 40$ meſures.

# LIVRE TROISIÉME.

## *INTRODUCTION*

## AUX SECTIONS CONIQUES.

SI dans le cône on fait différentes ſections par le moyen d'un plan, les lignes qui paroîtront décrites à l'extrêmité de ces ſections, ſeront des courbes que l'on appelle *Sections coniques*. Ces courbes ont des propriétés remarquables & intéreſſantes pour les ſciences & les arts. C'eſt pourquoi les Géométres ſe ſont appliqués à en faire connoître la nature, à démontrer leurs différentes propriétés, & à remarquer les différens phénoménes qui en peuvent réſulter. On peut conſidérer les ſections coniques, ſoit dans le cône même où elles prennent leur origine; ſoit hors du cône, ou dans un plan ſur lequel on peut les décrire, ou les concevoir décrites. Nous allons les enviſager ſous ces deux rapports.

## SECTION I.

### *Des Sections Coniques conſidérées dans le Cône.*

### HYPOTHESE.

931. SI dans le cône on fait des ſections par le moyen d'un plan coupant, les figures, ou ſections coniques qui en réſulteront, ſeront de différente eſ-

pece, ſuivant la direction qu'aura ſuivi le plan, comme on va le voir.

I°. Si l'on coupe le cône par un plan qui tombe du ſommet ſur la baſe, ſoit perpendiculairement, ſoit obliquement, la ſection faite par ce plan ſera un *Triangle*.

II°. Si l'on coupe le cône par un plan parallele à la baſe, la ſection donnera un *Cercle*.

III°. Si le plan coupant qui vient de donner le cercle, au lieu d'être parallele à la baſe, venoit un peu à s'incliner & à devenir oblique ſur cette baſe, alors la ſection Ss (*fig.* 2.), qui en réſultera, ne ſera plus un cercle, mais pourra être regardée comme un cercle allongé dans un ſens, & rétréci dans un autre; ou comme un cercle qui auroit deux axes inégaux: cette courbe s'appelle *Ellipſe*.

IV°. Si le plan coupant qui vient de donner l'ellipſe, devenoit oblique ſur la baſe, de façon qu'il devint tout-à-fait parallele au côté AB (*fig.* 1.), alors la ſection ne ſera plus une ellipſe, mais pourra être regardée comme une ellipſe infinie, ou dont le ſommet inférieur ſeroit infiniment éloigné. Car le plan coupant étant parallele au côté AB du cône, ne pourra jamais couper ce côté, & donner un ſecond ſommet oppoſé au premier S; cette ſection s'appelle *Parabole*.

V°. Si le plan coupant qui vient de donner la parabole, devenoit perpendiculaire à la baſe du cône; ou même s'il tomboit ſur cette baſe, de façon à être incliné ſur elle, mais ſans être parallele au côté du cône, alors la ſection donneroit une courbe infinie, comme la précédente, & on l'appelle *Hyperbole*. Telle eſt la courbe *m*S*m* (*fig.* 3.). Si au cône CAB on joignoit par le ſommet A un autre cône égal au premier, & ſi le plan coupant étoit ſuppoſé prolongé, il rencontreroit le ſecond cône, & y feroit une ſection, laquelle ſeroit encore une hyper-

bole, comme la premiere, & on l'appelle *Hyperbole conjuguée.*

*Propoſition I.*

932. Il n'eſt pas poſſible de faire dans un cône des ſections d'où réſultent d'autres figures que les cinq que nous venons de nommer, ſçavoir, le *Triangle*, le *Cercle*, l'*Ellipſe*, la *Parabole*, & l'*Hyperbole.*

Démonst. En effet le plan coupant commence la ſection, ou par le ſommet du cône, ou par un point de la ſurface du cône.

I°. Si la ſection commence au ſommet du cône, elle donnera un *Triangle.*

II°. Si elle commence à un point de la ſurface du cône, ou bien le plan coupant ſortira du cône, ou bien il reſtera en dedans du cône.

Si le plan coupant ſort du cône, ou il ſera parallele à la baſe, & alors la ſection donnera un *cercle*; ou il ſera incliné ſur la baſe, & alors la ſection donnera une *ellipſe.*

Si le plan coupant reſte en dedans du cône, ou il ſera parallele au côté du cône, ou il ſera parallele à l'axe du cône, ou il ſera incliné ſur la baſe, ſans être parallele ni au côté, ni à l'axe du cône. Or dans le premier cas la ſection ſera une *parabole*; dans le ſecond & le troiſiéme la ſection ſera une *hyperbole.*

*Propoſition II.*

933. La nature d'une courbe dépend de la direction qu'elle ſuit dans ſes différens points. Il eſt aiſé de déterminer la direction d'une *ligne droite*, parce qu'elle ne dépend que de deux points: on peut auſſi déterminer facilement celle d'une *circonférence* de cercle, parce qu'elle ne dépend que de trois points. Mais la poſition & la direction d'une ligne courbe

différente du cercle n'eſt pas aiſée à déterminer, parce que ſa courbure n'étant pas uniforme comme celle du cercle, ſa poſition & ſa direction varie dans ſes différens points. Or

I°. Les Géométres pour pouvoir déterminer la poſition & la direction d'une courbe, & connoître par ce moyen ſa nature, ont imaginé de tirer d'un point pris dans la courbe, une ligne telle que *Sp*, ou *Ss* (*fig.* 1. 2. 3.) autour de laquelle on concevroit que la courbe pût faire une révolution. Ils ont appellé cette ligne, l'*axe* de la courbe, & le point, ou les points de la courbe qui terminent cet axe, s'appellent le *ſommet*, ou les *ſommets* de la courbe.

II°. De plus de chaque point de la courbe les Géométres menent ſur cet axe des lignes MP, *mp* (*fig.* 1. 2. 3.) tirées perpendiculairement, ou même obliquement, mais dans le même degré d'obliquité : ces lignes MP, *mp*, s'appellent *ordonnées* à l'axe de la courbe ; la portion de l'axe compriſe entre chaque ordonnée & le ſommet S de la courbe, s'appelle *abſciſſe*, & la portion de l'axe compriſe de l'autre côté entre la même ordonnée & le ſommet oppoſé *s*, ſe nomme *co-abſciſſe*.

III°. Or le rapport conſtant qui ſe trouve entre une certaine fonction de chaque *ordonnée*, & une certaine fonction de ſes *abſciſſes* correſpondantes, eſt ce qui détermine la nature de la courbe, & en fait découvrir les propriétés & les affections.

## *DÉFINITIONS.*

### I.

934. L'ordonnée & l'abſciſſe conſidérées enſemble s'appellent *co-ordonnées*, & ce ſont les différens rapports que les co-ordonnées peuvent avoir entre elles, qui différencient les courbes.

### II.

935. Dans le *cercle* & l'*ellipſe* chaque ordonnée a

ſon abſciſſe & ſa co-abſciſſe ; dans la *parabole* il n'y a point de co-abſciſſe ; dans l'*hyperbole* la co-abſciſſe ſe trouve du même côté que l'abſciſſe, & ſe prend depuis l'ordonnée juſqu'au ſommet de l'hyperbole oppoſée ou conjuguée.

III.

936. Si dans un même cône on fait une ſection triangulaire & une ſection hyperbolique, paralleles l'une à l'autre, & ſi l'on ſuppoſe que les branches de l'hyperbole ſoient en dedans du triangle, & poſées ſur le même plan que lui ; alors les branches de l'hyperbole prolongées s'approcheront toujours de plus en plus des côtés du triangle, ſans jamais ſe confondre avec eux. Or les côtés de ce triangle s'appellent les *Aſſymptotes* de l'hyperbole, & le triangle lui-même s'appelle Triangle *Aſſymptotique*.

THÉORÊME I.

937. *Dans la parabole les Quarrés des Ordonnées ſont entr'eux comme les Abſciſſes* (fig. 1.).

DÉMONST. Concevez que par le point E paſſe le plan d'un cercle parallele à la baſe. Si par le ſommet A on conçoit faite une ſection triangulaire BAC perpendiculaire à la baſe, & que par le point S il ſoit fait une ſection parabolique *mSm*, perpendiculaire ſur le plan du triangle ; le plan du cercle EDE, (il faut dire la même choſe du plan du cercle BCB,) & le plan de la parabole ſe couperont & feront les ſections MM, ou *mm*. Or le plan du cercle & le plan de la parabole ſont chacun perpendiculaires ſur le plan du triangle : donc leur commune ſection PM ſera perpendiculaire (651.) au plan du triangle : donc PM ſera auſſi perpendiculaire (639.) tant au diamétre ED du cercle, qu'à l'axe S*p* de la parabole (il faut dire la même choſe de *pm*,) donc les lignes PM, *pm*, ſont des ordonnées communes au cercle & à la parabole.

Or

Or on a par la propriété du cercle (539.).

$$\overline{PM}^2 : \overline{pm}^2 :: PD \times PE : pC \times pB;$$

& à cauſe des paralleles AB, S*p*, qui donnent PE $= pB$, on aura $\overline{PM}^2 : \overline{pm}^2 :: PD : pC$. Mais à cauſe des triangles ſemblables SPD, S*p*C; on a $PD : pC :: SP : Sp$; donc $\overline{PM}^2 : \overline{pm}^2 :: SP : Sp$, c'eſt-à-dire, que les quarrés des ordonnées PM, *pm*, ſont entr'eux comme les abſciſſes correſpondantes.

## THÉORÊME II.

938. *Dans l'Ellipſe les Quarrés des Ordonnées ſont entr'eux comme les Rectangles des Abſciſſes correſpondantes* (fig. 2.).

DÉMONST. Ayant fait paſſer deux plans paralleles à la baſe du cône, on aura deux cercles E*m*F, GMH, qui couperont le plan de la ſection elliptique; & on verra, comme ci-deſſus, que PM & *pm* ſont des ordonnées communes au cercle & à la ſection elliptique.

Or on a (539.) par la propriété du cercle

$$\overline{PM}^2 : \overline{pm}^2 :: PG \times PH : pE \times pF.$$

Mais les triangles ſemblables SPH, S*p*F donnent d'une part $PH : pF :: SP : Sp$, & les triangles ſemblables *sp*E, *s*PG donnent de l'autre part $PG : pE :: sP : sp$; donc en multipliant les deux dernieres proportions l'une par l'autre, ce qui donne

$$PG \times PH : pE \times pF :: SP \times sP : Sp \times sp,$$

on aura $\overline{PM}^2 : \overline{pm}^2 :: SP \times sP : Sp \times sp$, dans laquelle proporrion les deux derniers termes ſont les rectangles des abſciſſes correſpondantes.

## THÉORÊME III.

939. *Dans l'Hyperbole les Quarrés des Ordonnées ſont entr'eux comme les Rectangles des Abſciſſes correſpondantes* (fig. 3.).

DÉMONST. Par la propriété du cercle on a

$$\overline{MP}^2 : \overline{mp}^2 :: PD \times PE : pC \times pB.$$

Or à cauſe des triangles ſemblables SPD, S$p$C, on a la proportion PD : $p$C :: SP : S$p$ ; & à cauſe des triangles ſemblables $s$PE, $sp$B, on a auſſi PE : $p$B :: $s$P : $sp$; donc en multipliant les deux proportions l'une par l'autre, on aura

PD × PE : $p$C × $p$B :: SP × $s$P : S$p$ × $sp$ ;

donc on aura $\overline{PM}^2 : \overline{pm}^2$ :: SP × $s$P : S$p$ × $sp$, dans laquelle proportion les deux derniers termes ſont les rectangles des abſciſſes correſpondantes.

## THÉORÊME IV.

940. *Dans l'Hyperbole les branches s'approchent toujours de plus en plus des Aſſymptotes, ſans jamais les toucher, quelque prolongées qu'on les ſuppoſe.*

DÉMONST. Si dans le cône on conçoit qu'il ſoit fait une ſection triangulaire, perpendiculaire à la baſe, & une ſection hyperbolique parallele au triangle, les côtés du triangle ſeront appuyés ſur le diamétre du cercle de la baſe du cône, & les branches de l'hyperbole ſur une corde du même cercle, laquelle ſera parallele au diamétre. Or plus le cône ſera prolongé, plus le cercle de la baſe deviendra grand, & moins la corde différera du diamétre. Car une corde parallele au diamétre, & qui reſte toujours à la même diſtance du diamétre, différe d'autant moins du diamétre, que le cercle eſt plus grand: donc les branches de l'hyperbole appuyées ſur la corde approcheront toujours de plus en plus de l'égalité en ouverture avec les côtés du triangle appuyés ſur le diamétre.

Or quelque prolongé qu'on ſuppoſe le cône, ou quelque grand que l'on ſuppoſe le cercle de la baſe, la corde différera toujours du diamétre, & ſera plus petite que lui: donc les branches de l'hyperbole ne pourront jamais atteindre les côtés du triangle. Mais ſi l'on conçoit pour un moment que les branches de l'hyperbole ſoient ſur un même plan que les

côtés de ce triangle, ces côtés seront les asymptotes de l'hyperbole: donc, &c.

*Proposition II.*

941. Etant donnée une section hyperbolique faite par le plan coupant,

I°. Si vous supposez qu'il y ait deux cônes opposés au sommet, le plan coupant qui aura donné une hyperbole dans le premier cône, donnera une hyperbole conjuguée dans le second, comme nous l'avons dit: & si par les sommets des deux cônes vous faites passer un plan qui fasse dans les deux cônes des sections triangulaires paralleles aux sections hyperboliques, les côtés de ces triangles seront les asymptotes des hyperboles.

II°. Si au lieu de deux cônes vous supposez quatre cônes opposés par les sommets, alors le plan coupant qui fera une section hyperbolique dans l'un des cônes, prolongé, fera de semblables sections dans tous les autres, ce qui donnera quatre hyperboles conjuguées, qui, prises toutes ensemble, forment ce que l'on appelle le *Système entier* de l'hyperbole (*fig.* 4.) Vous aurez pareillement les asymptotes de ces hyperboles, en faisant passer par les sommets des quatre cônes un plan coupant qui y fasse des sections triangulaires paralleles aux sections hyperboliques.

III°. Les axes de ces hyperboles se prennent depuis le sommet de l'une jusqu'au sommet de l'hyperbole opposée, & s'appellent l'un le *premier axe*, l'autre le *second axe*, ou l'*axe conjugué*. Lorsque les deux axes sont égaux, l'hyperbole s'appelle *circulaire*, ou *équilatere*: lorsqu'ils sont inégaux, elle s'appelle hyperbole *elliptique*.

IV°. Tout ce que nous venons de dire aura lieu, soit que les cônes soient *droits*, soit qu'ils soient *obliques*, soit qu'ils soient *égaux*, ou *inégaux*; pour-

vu que les côtés de l'un des cônes étant prolongés au-delà du ſommet, deviennent les côtés du cône conjugué.

*Corollaire I.*

942. Dans le cas où l'on ſuppoſe deux cônes oppoſés au ſommet, le plan coupant qui auroit donné une ſection parabolique dans le premier cône, ne pourra jamais, quelque prolongé qu'on le ſupposât, donner une *parabole* conjuguée dans l'autre cône. Car la ſection parabolique étant toujours parallele au côté du cône, le plan coupant ſorti du premier cône demeurera parallele au côté du ſecond: donc il ne le rencontrera jamais, & par conſéquent ne pourra jamais entrer dans le ſecond cône.

*Corollaire II.*

943. La parabole n'a point d'aſſymptotes. Car les aſſymptotes d'une ſection conique ſont les côtés d'un triangle, dont le ſommet eſt le même que celui du cône, & dont le plan eſt parallele au plan de la ſection conique. Or il n'eſt pas poſſible de faire dans le cône de ſection triangulaire parallele à la ſection parabolique; parce que celle-ci eſt toujours parallele au côté du cône, & celle-là ne peut jamais l'être: donc, &c.

## SECTION II.

### *Des Sections Coniques conſidérées ſur un Plan.*

LORSQU'ON enviſage les ſections coniques ſur un plan, on peut les conſidérer ou abſolument & en elles-mêmes; ou par comparaiſon. Nous allons les conſidérer ſous ces deux points de vue.

# CHAPITRE I.

*Des Sections Coniques conſidérées en elles-mêmes.*

NOus parlerons, 1°. de la parabole; 2°. de l'ellipſe; 3°. de l'hyperbole.

## ARTICLE I.

*De la Parabole.*

### *HYPOTHESE.*

944. Si ſur une droite AD, poſée ſur un plan, (*fig.* 5.) on mene une perpendiculaire AC, ſur laquelle on prenne à volonté un point F; & ſi par tant de points que l'on voudra de la droite AD, on mene des paralleles DM, ſur chacune deſquelles on prenne un point M, tel que l'on ait toujours MD = MF, la courbe qui paſſera par tous ces points M, s'appelle *Parabole*; & a les mêmes propriétés que celle que nous avons conſidérée dans le cône, comme nous le prouverons bientôt. La ligne AD, ou DD s'appelle *Directrice*, & le point F s'appelle *Foyer*.

*Corollaire I.*

945. La ligne AF eſt partagée en deux également au point S; c'eſt-à-dire, que l'on a SA = SF. Car S étant un point de la courbe décrite, doit être également diſtant de F & de la ligne DA.

*Corollaire II.*

946. C'eſt pourquoi le point S eſt de tous les points de la courbe le plus proche de DA, & par cette raiſon eſt le point le plus élevé, & s'appelle le *ſommet* de la parabole.

## *DÉFINITIONS.*

I.

947. La ligne AC dans laquelle ſe trouve le foyer F, & autour de laquelle on conçoit que la courbe en tournant feroit ſa révolution, s'appelle l'*Axe* de la courbe; le point S où l'axe prend ſon origine, s'appelle le *ſommet de la courbe*, ou l'*Origine de l'axe.*

II.

948. Nous appellerons *Paramétre* de l'axe, une ligne A quadruple de SA, ou quadruple de la diſtance de l'origine de l'axe à la directrice.

III.

949. Si du ſommet S, origine de l'axe, ou d'un point quelconque M de la courbe, vous menez une ligne SB, ou SE, ou MT, qui touche la courbe au point S, ou au point M, cette ligne s'appelle *Tangente*, & les points S ou M s'appellent *points de contingence.*

IV.

950. Une ligne quelconque *mp*, MP, tirée d'un point quelconque de la courbe à l'axe, & parallele à la tangente SE, s'appelle *Ordonnée* à l'axe; & les lignes S*p*, ou SP, compriſes entre le ſommet & l'ordonnée, s'appellent *Abſciſſes.*

V.

951. Si de l'extrêmité M d'une ordonnée quelconque MP, vous menez une tangente MT qui rencontre l'axe prolongé, la portion TP de l'axe compriſe entre l'ordonnée & l'extrêmité T de la tangente, s'appelle *Sous-Tangente.*

VI.

952. Si du point M vous menez ſur l'axe une ligne MC qui ſoit perpendiculaire à la tangente,

cette perpendiculaire s'appelle *Normale*; la portion CP de l'axe compriſe entre l'ordonnée & la perpendiculaire MC, s'appelle *Sous-Perpendiculaire*, ou *Sous-Normale*.

## VII.

953. Si l'on ſuppoſe la perpendiculaire, ou *Normale*, prolongée juſqu'à ce qu'elle devienne rayon d'un cercle qui paſſeroit par le point M, & dont la courbure ſe confondroit avec la courbure de cette courbe au point M, elle s'appelle alors *Rayon de courbure*, & ce cercle s'appelle cercle *oſculateur*. L'uſage de ce rayon eſt de déterminer la courbure d'une ſection conique, ou de toute autre courbe en un point quelconque donné.

## VIII.

954. Une ligne FM menée du foyer F à un point quelconque de contingence M, s'appelle *Rayon vecteur*.

### *Corollaire.*

955. On voit par ces définitions que l'axe eſt une ligne que l'on ne doit pas conſidérer toute ſeule, mais comme un terme auquel ſe rapportent pluſieurs lignes qui en dépendent, & qui forment un ſyſtême fixe & déterminé, que l'on peut appeller *Syſtême de l'axe*. Ce ſyſtême de l'axe comprend l'*ordonnée* & ſes *abſciſſes*; la *tangente* & la *ſous-tangente*; la *perpendiculaire* & la *ſous-perpendiculaire*; le *paramétre* & le *rayon vecteur*.

### THÉORÊME I.

956. *Dans la courbe que l'on vient de décrire le Quarré de l'ordonnée* MP ($y$) *eſt égal au rectangle de l'abſciſſe correſpondante* PS ($x$) *par le paramétre p de l'axe* (fig. 5.); *c'eſt-à dire, que l'on a* $yy = px$.

DÉMONST. Suppoſant la quantité conſtante SA, ou SF $= a$, on aura MF $=$ MD (944.) $=$ PS $+$ SA

$= x + a$, & PF $= x - a$, ou $= a - x$, ſelon que le point P ſe trouve au-deſſous, ou au-deſſus du foyer F.

Or le triangle rectangle MPF donne $\overline{MF}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{PF}^2$, ou algébriquement.

$$aa + 2ax + xx = yy + aa - 2ax + xx :$$

donc tranſpoſant on aura $yy = 4ax$. Or (948.) $4a = p$ : donc $yy = px$.

*Corollaire I.*

957. La quantité $p$ étant conſtante, on peut à ſa place ſubſtituer l'unité : donc l'expreſſion $yy = px$ ; deviendra $yy = x$, c'eſt-à-dire, que dans la courbe qui vient d'être décrite, les quarrés $yy$ des ordonnées ſeront entr'eux comme les abſciſſes correſpondantes. D'où il ſuit que la courbe qui vient d'être décrite, eſt une *parabole*, & eſt la même que celle que nous avons eue dans le cône par une ſection parallele au côté.

*Corollaire II.*

958. Puiſque $yy = px$, il ſuit que $x : y :: y : p$, ou que $\div\div x : y : p$, c'eſt-à-dire, que le paramétre eſt une troiſiéme proportionnelle à l'abſciſſe & à l'ordonnée.

*Corollaire III.*

959. C'eſt ſur cette propriété du paramétre qu'eſt fondé ſon uſage, qui conſiſte à déterminer le rapport entre la longueur & la largeur de la parabole, lequel eſt le même que celui qui regne entre l'abſciſſe & l'ordonnée correſpondante. En effet dans l'équation $yy = px$, ſuppoſons $p = 1$, & elle deviendra $yy = x$. Or,

I°. Si l'on ſuppoſe l'abſciſſe $x = \frac{1}{2}$, du paramétre, l'on aura $yy = \frac{1}{2}$, & $y = \frac{1}{1}$, c'eſt-à-dire, que lorſque l'abſciſſe eſt un $\frac{1}{2}$ du paramétre, l'ordonnée en eſt le $\frac{1}{1}$, & par conſéquent la parabole alors croît davantage ſelon la largeur que ſelon la longueur.

II°. Suppoſons l'abſciſſe $x = \frac{1}{4}$ du paramétre, & nous aurons $yy = \frac{1}{4}$, & $y = \frac{1}{2}$: c'eſt-à-dire, qu'alors l'ordonnée eſt la moitié du paramétre. Or le point de l'axe où l'abſciſſe eſt $= \frac{1}{4}$ du paramétre, eſt le foyer (945.); d'où l'on conclud que dans la parabole la double ordonnée qui paſſe par le foyer, eſt égale au paramétre, & que dans ce cas la parabole a encore plus de largeur que de longueur.

III°. Suppoſons l'abſciſſe $x = 1$, ou égal au paramétre, & l'on aura $yy = 1$; & $y = 1$, c'eſt-à-dire, que dans ce cas l'ordonnée & l'abſciſſe ſont égales, & que la parabole a autant de longueur que de largeur.

IV°. Suppoſons l'abſciſſe $x = 4$, ou quadruple du paramétre, l'on aura $yy = 4$, & $y = 2$, c'eſt-à-dire, que l'ordonnée n'eſt que double du paramétre, & qu'alors la parabole croît plus ſelon la longueur que ſelon la largeur.

V° En général lorſque les abſciſſes ſont repréſentées par les fractions $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{4}$, &c. les ordonnées ſeront repréſentées par leurs racines $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, &c. Mais lorſque les abſciſſes ſont repréſentées par les nombres $1 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 16 \cdot 25$, &c. les ordonnées ſeront comme les nombres $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot$ &c. Par conſéquent dans le premier cas la parabole croît plus en largeur qu'en longueur, ou s'écarte plus de l'axe que de la directrice; & dans le ſecond cas elle croît plus en longueur qu'en largeur, ou s'écarte plus de la directrice que de l'axe.

### *Corollaire IV.*

960. Ayant mené de l'extrêmité d'une ordonnée MP (*fig.* 7.), une corde MA, & une ligne MD perpendiculaire à cette corde, la portion DP de l'axe compriſe entre l'ordonnée & cette perpendiculaire ſera égale au paramétre. Car à cauſe du

triangle rectangle DMA, on aura AP : PM :: PM : DP, ou $x : y :: y : \frac{yy}{x} = p$.

## Théorême II.

961. *Une perpendiculaire* MT, *qui diviſe en deux également une droite* FB, *tirée du foyer à la directrice, va toucher la Parabole en un point quelconque* M, *& eſt une Tangente* (fig. 5.).

Démonst. La ligne MT, diviſant en deux également la baſe du triangle DMF, qui eſt iſocele (944.), & étant perpendiculaire à cette baſe, paſſe néceſſairement par le ſommet M de l'angle DFM (511.). Or ce ſommet eſt un point de la parabole : donc la ligne MT touche la parabole au point M.

Or elle ne la coupera point ; car elle paſſera par tous les points également diſtans de D & de F. Or les points de la parabole qui ſont au-deſſous de M s'éloignent toujours plus de D que de F, parce qu'ils ſont tous à égale diſtance (944.) du foyer & de la directrice : donc, &c.

### *Corollaire I.*

962. L'angle HMX formé par la ligne HM, parallele à l'axe, & la tangente XMT, eſt égale à l'angle TMF formé par la tangente MT, & le rayon vecteur MF ; car HMX = DMT = TMF.

D'où il ſuit qu'un rayon de lumiere, dirigé ſuivant la ligne HM, ſe réfléchiroit au foyer F ; & pareillement que partant du foyer F au point M, il ſe réfléchiroit ſuivant la ligne MH.

### *Corollaire II.*

963. La perpendiculaire FB diviſe la tangente MT en deux également au point B. Car l'angle MTF = TMD (449.) = HMX (445.) = TMF (962.) : donc l'angle MTF = TMF : donc le triangle TMF eſt iſocele : donc la perpendiculaire FB tirée du ſommet ſur

la baſe, ou ſur la tangente MT, la diviſe en deux également.

### Théorême III.

964. *Dans la Parabole la Sous-perpendiculaire, ou Sous-normale* PC *eſt égale à la moitié du Paramétre, & ſon expreſſion eſt* $s = \frac{1}{2}p$ (fig. 5.).

Demonst. Les lignes DF & MC ſont paralleles, puiſqu'elles ſont perpendiculaires ſur une même ligne MT. Elles ſont auſſi égales, puiſqu'elles ſont paralleles entre des paralleles. De plus les lignes DA & MP ſont paralleles & égales: donc les triangles DFA, MCP ſont équiangles & égaux: donc on aura PC = AF, ou PC $= \frac{1}{2}p$ ou $2a$.

### *Corollaire I.*

965. Le triangle rectangle CPM donne auſſi $\overline{MC}^2 = \overline{PM}^2 + \overline{PC}^2 = yy + \frac{1}{4}pp = px + \frac{1}{4}pp$: donc appellant $m$ la perpendiculaire, ou *normale* MC, ſon expreſſion ſera $m = \sqrt{\overline{px} + \frac{1}{4}\overline{pp}}$.

### *Corollaire II.*

966. La diſtance SC du ſommet au point C, où la normale rencontre l'axe, eſt = SP + PC: donc ſon expreſſion ſera SC $= x + \frac{1}{2}p$.

### Théorême IV.

967. *Dans la parabole la Sous-Tangente* PT *eſt double de l'Abſciſſe, & ſon expreſſion ſera* PT $= 2x$.

Démonst. Dans le triangle rectangle CTM, à cauſe de la perpendiculaire MP abaiſſée du ſommet M ſur l'hypothénuſe CT, on a CP : PM :: PM : PT, ou algébriquement $2a : y :: y :$ PT: donc PT $= \frac{yy}{2a}$: or $yy = 4ax$: donc PT $= \frac{4ax}{2a}$, ou PT $= 2x$.

### *Corollaire.*

968. Le triangle rectangle TPM donne auſſi

$\overline{MT^2} = \overline{PM^2} + \overline{PT^2} = yy + 4xx = px + 4xx$ : donc l'expreſſion de la *tangente* ſera $MT = \sqrt{px + 4xx}$.

## Théorême V.

969. *Dans la Parabole les Perpendiculaires* FB *menées du foyer ſur les tangentes, ſont entr'elles comme les racines des rayons vecteurs r, menés du foyer au point de contingence* M, *& ſon expreſſion ſera* $FB = \sqrt{r}$.

Démonst. Si du ſommet B du triangle rectangle FBT, on mene la ligne BI parallele à l'ordonnée MP, les deux triangles ſemblables TBI, TMP donneront TB : TM :: TI : TP. Or TB (963.) eſt la moitié de TM : donc TI ſera la moitié de la ſous-tangente TP, & par conſéquent la perpendiculaire BI tombe ſur le ſommet S de la parabole.

Cela poſé, à cauſe des triangles ſemblables FBS, FBT, on aura TF : BF :: BF : SF : donc $BF^2 = TF \times SF$. Or $SF = a$ (945.), & TF = MF, à cauſe du triangle iſocele MFT : donc $\overline{BF^2} = MF \times a$ ; & à cauſe de la quantité conſtante *a* on aura $\overline{BF^2}$ proportionnel à MF, & par conſéquent BF proportionnel à $\sqrt{MF}$, ou $FB = \sqrt{r}$.

## Théorême VI.

970. *Dans la Parabole, le rayon vecteur* FM *eſt égal à l'Abſciſſe, plus au quart du Paramétre de l'axe, & ſon expreſſion eſt* $r = x + \frac{1}{4}p$.

Démonst. On a (944.) FM = MD = AP = AS + SP = $x + \frac{1}{4}p$ : donc FM, ou $r = x + \frac{1}{4}p$.

## *DÉFINITIONS.*

### I.

971. Dans une ſection conique on appelle *Diamétre*, toute ligne qui paſſe par le centre de la ſection, & eſt terminée de part & d'autre par des points oppoſés de la courbe. D'où il ſuit que puiſque dans la parabole le centre eſt infiniment éloigné, le diamétre

ſera toujours une ligne quelconque MH, parallele à l'axe. Le point M s'appelle l'*Origine du diamétre.*

II.

972. On appelle *Diamétre conjugué* à une autre diamétre, celui qui eſt parallele aux ordonnées du premier, ou à la tangente qui paſſe par ſon extrêmité. D'où il ſuit encore que la parabole n'a point de diamétre *conjugué.*

III.

973. Le diamétre, de même que l'axe, a un paramétre, qui dans la parabole eſt une ligne quadruple de la diſtance MD de l'origine du diamétre à la directrice.

IV.

974. Une ligne quelconque *m*O, tirée d'un point de la parabole au diamétre, & parallele à la tangente qui paſſe par l'extrêmité du diamétre, s'appelle *Ordonnée* au diamétre, & la ligne M*o* compriſe entre l'origine du diamétre & l'ordonnée, s'appelle l'*Abſciſſe* de cette ordonnée.

*Corollaire.*

975. On voit par ces définitions que le *diamétre*, de même que l'*axe*, eſt une ligne que l'on ne doit pas conſidérer toute ſeule; mais comme un ſecond terme, auquel ſe rapportent pluſieurs autres lignes qui forment le *ſyſtême du diamétre*, dans lequel entrent un *paramétre*, une *ordonnée*, une *abſciſſe*, une *tangente*, &c.

THÉORÊME VII.

976. *Le Paramétre d'un diamétre quelconque eſt plus grand que le Paramétre de l'axe du quadruple de l'Abſciſſe.*

Démonst. Le paramétre $d$ d'un diamétre quelconque MH eſt $d = 4MD$. Or $4MD = 4AS + 4SP = 4a + 4x = p + 4x$ : donc, &c.

## Théorême VIII.

977. *Le Paramétre* d *d'un diamétre quelconque eſt une troiſiéme proportionnelle à la moitié* ST *de la ſoustangente, & à la tangente* MT.

C'eſt-à-dire, que l'on aura ST : MT :: MT : $d$, ou parce que ST $= x$, on aura $\dot{\dot{x}}$ : MT : $d$.

Démonst. Nous avons eu (968.) $\overline{MT}^2 = px + 4xx = x \times \overline{p + 4x}$. Or (973.) $d = 4\,DM = p + 4x$ (976.) : donc $\overline{MT}^2 = dx$, & par conſéquent $x$ : MT :: MT : $d$, ou $\dot{\dot{x}}$ : MT : $d$.

## Théorême IX.

978. *Le quarré d'une ordonnée quelconque* Om *à un diamétre, eſt égal au produit du paramétre* d *de ce diamétre par ſon abſciſſe* a, *ou* MO ; *c'eſt-à-dire, on aura* $\overline{Om}^2 = MO \times d = ad$.

Démonst. Du point $m$ menez l'ordonnée $mp$, & du point O la parallele OR $=$ MP ; ſoit SP $= x$ ; MP, ou N$p$, ou O$r = y$ ; NO, ou $p$R $= \zeta$ ; MO, ou PR $= a$. Cela poſé, les deux triangles ſemblables TMP, NO$m$ donnent la proportion O$m$ : ON :: TM : TP, & $\overline{Om}^2 : \overline{ON}^2 :: \overline{TM}^2 : \overline{TP}^2$, ou algébriquement $\overline{Om}^2 : \zeta\zeta :: dx : 4xx$ ; donc $\overline{Om}^2 = \frac{\zeta\zeta \times dx}{4xx}$ ; dans laquelle l'équation ſe trouve une inconnue $\zeta\zeta$ dont il faut chercher la valeur, & que l'on trouvera en cherchant celle de l'ordonnée $mp$. En effet,

I°. L'abſciſſe de l'Ordonnée $mp$ eſt S$p$ $=$ SP $+$ PR $-$ $p$R $= x + a - \zeta$. Or par la nature de la parabole l'on a $\overline{mp}^2 : \overline{MP}^2 ::$ S$p$ : SP, ou algébriquement $\overline{mp}^2 : yy :: x + a - \zeta : x$ : donc $\overline{mp}^2 = yy + \frac{ayy - \zeta yy}{x}$ ; & c'eſt une premiere équation, ou une premiere

valeur de $\overline{mp^2}$. Mais comme il s'y trouve deux eſpeces d'inconnues, ſçavoir $z$ & $\overline{mp^2}$, il faut (265.), pour faire évanouir l'une des inconnues, chercher une ſeconde équation, ou une ſeconde valeur de $\overline{mp^2}$.

II°. A cauſe des triangles ſemblables TMP, ON$m$, on aura N$m$ : ON :: PM : TP, ou N$m$ : $z$ :: $y$ : $2x$; donc N$m$ $= \frac{zy}{2x}$. Or $mp$ = N$p$ — N$m$ = MP — N$m$ = $y - \frac{zy}{2x}$: donc $\overline{mp^2} = yy - \frac{zyy}{x} + \frac{zzyy}{4xx}$, & c'eſt une ſeconde valeur de $\overline{mp^2}$, qui nous donne une ſeconde équation; & par conſéquent il y a maintenant autant d'équations que d'inconnues.

III°. Prenons la valeur de $\overline{mp^2}$ dans la premiere équation, pour la ſubſtituer à la place de $\overline{mp^2}$ dans la ſeconde équation; ou, ce qui eſt le même, comparons les deux valeurs que nous venons de trouver pour $\overline{mp^2}$, & nous aurons

$$yy - \frac{zyy}{x} + \frac{zzyy}{4xx} = yy + \frac{ayy}{x} - \frac{zyy}{x},$$

& réduiſant, $\frac{zzyy}{4xx} = \frac{ayy}{x}$: donc $\overline{ON^2}$, ou $zz = 4ax$.

IV°. Maintenant ſi nous ſubſtituons cette valeur de $zz$ à la place de $zz$ dans l'équation $\overline{Om^2} = \frac{zzdx}{4xx}$, nous aurons $\overline{Om^2} = \frac{4adxx}{4xx} = ad$.

*Corollaire.*

979. D'où il faut conclure que les propriétés de l'axe conviennent auſſi au diamétre, & que le diamétre n'eſt autre choſe que l'axe lui-même qui a changé de poſition, & qui en changeant de poſition, a fait auſſi changer celle de toutes les lignes qui formoient ſon ſyſtême. En effet ſi l'on imagine que l'axe SP ſe meut parallélement, juſqu'à ce qu'il devienne MH, on conçoit que la tangente SE cou-

lera le long de la parabole, dont elle touchera toujours un point seulement, & qu'elle deviendra MT; que l'ordonnée MP se changera en *Om*; l'abscisse PS en OM; la distance SA de la directrice en MD, &c.

## Problême.

980. *Trouver deux Moyennes proportionnelles entre deux lignes données* MH, NO; *ou résoudre par le moyen de la Parabole le problême de la duplication du Cube* (fig. 10.).

Construction. I°. Menez la ligne AB = MH: & sur AB prenez AD = NO.

II°. Divisez AD en deux également au point H, & élevez la perpendiculaire HC égale à la moitié de AB.

III°. De C comme centre & de l'intervalle CA décrivez un cercle, & par le point A faites passer une parabole telle que AB en soit l'axe, & AD le paramétre.

IV°. Du point G où la parabole coupe le cercle, menez l'ordonnée GE à l'axe.

Je dis que les lignes GE, AE seront les deux moyennes proportionnelles cherchées entre les deux lignes AB, AD; ou MH, NO.

Démonst. Soit le paramétre AD = $p$; l'ordonnée GE = $y$; l'abscisse AE = $x$; la portion FE = $z$; on aura par conséquent DE = $x - p$. Du point C ayant abbaissé la perpendiculaire CI sur GE, on aura GE + FE, ou $y + z$ = AB. Car CH étant la moitié de AB, IE = CH sera aussi la moitié de AB: donc IE + IE = AB; or IE + IE = GE + FE: donc GE + FE, ou $y + z$ = AB.

Il faut maintenant prouver que AD : GE :: GE : AE :: AE : AB, ou que $p : y :: y : x :: x : y + z$, ou $\div\div p : y : x : y + z$.

I°.

I°. Par la propriété de la parabole $yy = px$: donc $p : y :: y : x$, ou AD : GE :: GE : AE.

II°. Par la propriété du cercle (540.) on a EA : EG :: FE : DE, ou $x : y :: z : x - p$: donc $xx - px = yz$, ou $xx = yz + px$; & ſubſtituant dans cette équation $yy$ à la place de $px$, elle deviendra $xx = yz + yy$: d'où l'on déduit $y : x :: x : y + z$. Mais nous avons eu ci-deſſus $p : y :: y : x$: donc $p : y :: y : x :: x : y + z$, ou $\div\div p : y : x : y + z$, ou $\div\div$ AD : GE : AE : AB. Donc, &c.

Et par conſéquent ſi l'on ſuppoſe AB double de AD, ou MH double de NO, il s'enſuivra que le cube fait ſur GE ſera double du cube fait ſur AD = NO : car dans la progreſſion géométrique $\div\div$ AD : GE : AE : AB, l'on a (242.) AD : AB :: $\overline{AD}^3$ : $\overline{GE}^3$; or AB eſt double de AD; donc auſſi $\overline{GE}^3$ ſera double de $\overline{AD}^3$.

*Remarque.*

981. La parabole ne ſert pas ſeulement pour réſoudre le problême de la duplication du cube, elle a encore pluſieurs uſages applicables aux ſciences & aux arts. On s'en ſert,

I°. Dans la pratique du *jet des bombes*, pour déterminer l'élévation, la portée, & les autres circonſtances du jet, comme on voit dans la *Méchanique*.

II°. Pour déterminer & calculer le cours & le mouvement des *comètes*, comme on le fait voir en *Aſtronomie*.

III°. Dans la *Catoptrique* & la *Dioptrique*, pour déterminer les effets & les uſages des verres & des miroirs paraboliques.

## ARTICLE II.

### *De l'Ellipſe.*

### *HYPOTHESE I.*

982. Ayant mené ſur un plan une ligne AB (*fig.*

11.), dans laquelle on détermine deux points F, *f*, également distans chacun des extrêmités A, B; si vous prenez hors de cette droite des points M, G, &c. tels que la somme des distances de chacun de ces points aux deux points F, *f*, soit constante, & toujours égale à la droite AB, la courbe qui passera par ces points M, G, &c. s'appelle une *Ellipse*, & est la même que celle que nous avons considérée dans le cône, comme nous l'allons prouver.

## *DÉFINITIONS.*

### I.

983. La ligne AB s'appelle le *grand Axe* de cette courbe; la ligne perpendiculaire MN, qui partage en deux également le grand axe, s'appelle le *petit Axe*, ou l'*Axe conjugué*; on les appelle aussi *premier* & *second* axes: le point C, où les deux axes se coupent, s'appelle le *Centre*.

### II.

984. Une troisiéme proportionnelle aux deux axes est nommé le *Paramétre* de l'axe, qui fait le premier terme de la proportion; en sorte que si l'on a AB : MN :: MN : *p*, la quantité *p* sera le paramétre du grand axe.

### III.

985. Les points F, *f*, s'appellent *Foyers*, & la somme des distances de ces foyers à chaque point de la courbe est toujours une quantité constante, laquelle est égale au grand axe; sçavoir, l'on a toujours MF + M*f*, ou GF + G*f* = AB.

### IV.

986. Chacun des axes a ses ordonnées & ses abscisses. Les *Ordonnées* sont des lignes menées de différens points de la courbe sur l'axe, & paralleles à l'axe conjugué. Les *Abscisses* se prennent depuis l'origine de l'axe jusqu'aux ordonnées.

## THÉORÊME I.

987. *Dans cette courbe le petit demi-Axe eſt moyen proportionnel entre les diſtances d'un des foyers aux deux extrêmités du grand Axe* (fig. 11.), *c'eſt-à-dire, l'on a* FA : MC :: MC : FB.

DÉMONST. A cauſe du triangle rectangle MCF, on aura $\overline{MC}^2 = \overline{FM}^2 - \overline{FC}^2$. Donc ſi l'on nomme $c$ la diſtance du centre au foyer, $a$ le grand demi-axe, & $b$ le petit demi-axe, on aura algébriquement $bb = aa - cc$ : d'où l'on tire la proportion $a - c : b :: b : a + c$, ou FA : MC :: MC : FB.

## THÉORÊME II.

988. *Dans la courbe qui vient d'être décrite, le quarré de l'ordonnée au grand axe eſt au produit de ſes abſciſſes, comme le quarré du petit axe eſt au Quarré du grand axe* (fig. 12.).

DÉMONST. La ſomme des deux diſtances, ou des rayons vecteurs $fM + FM$ ſoit appellée $2a$, & leur différence $2z$ ; par conſéquent l'on aura (298.) $fM = a + z$, & $FM = a - z$.

Suppoſons la diſtance PC de l'ordonnée au centre $= x$, & l'on aura l'abſciſſe $AP = a - x$, & la co-abſciſſe $Pa = a + x$.

Soit auſſi l'excentricité $FC = c$, & l'on aura $FP = c - x$, & $Pf = c + x$. Cela étant,

I°. Le triangle rectangle PMF donnera $\overline{PM}^2 = \overline{MF}^2 - \overline{PF}^2$, ou algébriquement $yy = aa - 2az + zz - cc + 2cx - xx$.

II°. Pareillement le triangle rectangle PM$f$ donnera $\overline{PM}^2 = \overline{fM}^2 - \overline{Pf}^2$, ou algébriquement $yy = aa + 2az + zz - cc - 2cx - xx$.

III°. Prenant la valeur de $yy$ dans la premiere équation, & la ſubſtituant à la place de $yy$ dans la ſeconde équation, celle-ci deviendra $aa - 2az +$

$zz - cc + 2cx - xx = aa + 2az + zz - cc - 2cx - xx$ ; & réduisant $4az = 4cx$ : donc $z = \frac{cx}{a}$.

IV°. Substituant cette valeur de $z$ à la place de $z$ dans la premiere équation, elle deviendra $yy = aa - 2cx + \frac{ccxx}{aa} - cc + 2cx - xx$ ; & multipliant par $aa$, l'on aura $aayy = a^4 - 2aacx + ccxx - aacc + 2aacx - aaxx = \overline{aa - xx} \times \overline{aa - cc}$ : donc

$$aayy = \overline{aa - xx} \times \overline{aa - cc}.$$

Or (987.) $aa - cc = bb$. Donc divisant le premier membre par $bb$, & le second par $aa - cc$, on aura $\frac{aa}{bb} yy = aa - xx$ ; d'où l'on tire cette proportion $yy$ : $aa - xx :: bb : aa$ ; c'est-à-dire, que dans cette courbe le quarré de l'ordonnée est au produit de ses abscisses, comme, &c.

*Corollaire I.*

989. Si nous prenons une autre ordonnée quelconque MP = Y, l'on prouvera de même que $Y^2 : aa - XX :: bb : aa$ ; d'où l'on conclud $Y^2 : y^2 :: aa - XX : aa - xx$ ; c'est-à-dire, que les quarrés des ordonnées sont entr'eux comme les produits des abscisses, & par conséquent que cette courbe est une *ellipse*, & la même que la section conique à laquelle nous avons donné ce nom.

*Corollaire II.*

990. Les ordonnées au grand axe de l'ellipse sont proportionnelles aux ordonnées correspondantes du cercle décrit sur le grand axe de l'ellipse (*fig.* 25.) car par la propriété du cercle l'on a $\overline{EG^2} : \overline{NL^2} ::$ GA × GB : LA × LB, & par la propriété de l'ellipse l'on a $\overline{FG^2} : \overline{OL^2} ::$ GA × GB : LA × LB ; donc $\overline{FG^2} : \overline{OL^2} :: \overline{EG^2} : \overline{NL^2}$, & par conséquent FG : OL :: EG : NL.

*Corollaire III.*

991. Puiſque les ordonnées de l'ellipſe ſont proportionnelles aux ordonnées correſpondantes du cercle circonſcrit, il ſuit que la ſomme des ordonnées de l'ellipſe eſt à la ſomme des ordonnées du cercle (232.), ou que la ſurface de l'ellipſe eſt à la ſurface du cercle, comme une ſeule ordonnée quelconque de l'ellipſe, eſt à l'ordonnée correſpondante du cercle ; & par conſéquent que la ſurface du cercle décrit ſur le grand axe d'une ellipſe, eſt à la ſurface de l'ellipſe, comme le grand axe eſt au petit axe. Car le grand axe CB & le petit axe CH (*fig.* 25.), ou ce qui eſt le même, CD & CH ſont des ordonnées correſpondantes du cercle & de l'ellipſe.

*Corollaire IV.*

992. Donc la ſurface (E) d'une ellipſe eſt égale à la ſurface (C) d'un cercle, dont le diamétre $x$ ſeroit moyen proportionnel entre les deux axes $a$ & $b$ de l'ellipſe. Car appellant A la ſurface d'un cercle décrit ſur le grand axe, l'on aura par l'hypothèſe $\dot{\dot{.}}\ a : x : b$ : donc (242.) $a : b :: aa : xx$. Or A : E :: $a : b$ (991.) :: $aa : xx$ (242.) :: A : C (610.), & par conſéquent E = C.

*Corollaire V.*

993. La ſurface (E) de l'ellipſe eſt en raiſon compoſée de ſes axes ; ou comme le produit $ab$. Car nous venons de voir que l'ellipſe E eſt = au cercle C, lequel eſt comme le quarré $xx$ de ſon diamétre. Or $xx = ab$, à cauſe de $\dot{\dot{.}}\ a : x : b$ : donc, &c.

THÉORÊME III.

994. *Ayant prolongé la ligne fM, de façon que* Mm = MF, *& ayant tiré la ligne* mF, *je dis qu'une ligne*

MT *qui diviſera en deux également la ligne* m F, *ſera Tangente au point* M *de l'ellipſe* ( fig. 12. )

Démonst. Ayant mené du point M de l'ellipſe une ligne quelconque MT qui diviſe en deux également la ligne *m*F, il n'y aura que le ſeul point M de la ligne MT qui ſoit de l'ellipſe; tous les autres points ſeront hors de l'ellipſe. Car la ſomme de leurs diſtances, *par ex :* des diſtances du point D aux foyers F, *f* ſera plus grande que A*a*, ou *fm*. En effet concevant que l'on ait joint par des lignes les points *f*, D; & D, *m*, ces lignes *f*D, & D*m* ſeroient les deux côtés d'un triangle dont *fm* ſera le troiſiéme côté : donc *f*D + D*m* ſeroient plus grands que *fm*. Or *fm* = A*a* : donc la ſomme *f*D + D*m* ſeroit plus grande que le grand axe A*a*.

*Corollaire.*

995. Les droites tirées des foyers aux points de contingence, (leſquels s'appellent *rayons vecteurs* de l'ellipſe, ) forment avec la tangente des angles *f*MD, FMT égaux. Car *f*MD = TM*m* = TMF (*fig.* 12.). D'où il ſuit qu'un rayon de lumiere allant d'un des foyers *f* à la circonférence de l'ellipſe, ſe réfléchiroit à l'autre foyer F.

## Théorême IV.

996. *Dans l'Ellipſe l'expreſſion du Rayon vecteur* FM *mené du foyer au point de contingence, eſt* $r = \frac{aa - cx}{a}$.

Démonst. Le triangle rectangle FMP donne $\overline{FM}^2 = \overline{PM}^2 + \overline{PF}^2$. Or MP = $y$, & PF = $c - x$ : donc on aura $\overline{FM}^2 = yy + cc - 2cx + xx$. Or nous avons vu (988.) que $yy = bb - \frac{bbxx}{aa}$ : donc ſubſtituant on aura $\overline{FM}^2 = bb - \frac{bbxx}{aa} + cc - 2cx + xx$. Nous avons vu auſſi (987.) que $bb = aa - cc$ : donc ſubſtituant en-

core, on aura $\overline{FM^2} = aa - cc - xx + \frac{ccxx}{aa} + cc - 2cx + xx$; & réduisant, $\overline{FM^2} = aa - 2ccx + \frac{ccxx}{aa}$, ou $\overline{FM^2} = \frac{a^4 - 2aacx + ccxx}{aa}$: donc FM, ou $r = \frac{aa - cx}{a}$.

## THÉORÊME V.

997. *L'expreſſion de la Sous-Perpendiculaire* PE *eſt* $\frac{bbx}{aa}$, ou $\frac{px}{2a}$.

DÉMONST. Ayant mené EM perpendiculaire ſur MT, & parallele à F*m*, on aura $fm : fF :: Mm : FE$, ou $2a : 2c :: \frac{aa - cx}{a} : FE$; donc $FE = \frac{aac - ccx}{aa}$: donc retranchant $PF = c - x$ de la quantité précédente, le reſte ſera $PE = \frac{aac - ccx}{aa} - c + x = \frac{aax - ccx}{aa} = x \times \frac{aa - cc}{aa}$. Or (987.) $aa - cc = bb$: donc ſubſtituant, on aura pour l'expreſſion de la ſous-perpendiculaire $PE = \frac{bbx}{aa}$, ou $\frac{px}{2a}$.

## THÉORÊME VI.

998. *L'expreſſion de la Sous-Tangente* PT *eſt* $\frac{aa - xx}{x}$.

DÉMONST. Le triangle rectangle EMT, dans lequel la ligne MP eſt une perpendiculaire abbaiſſée du ſommet ſur l'hypothénuſe, donne $EP : PM :: PM : PT$, ou algébriquement $\frac{bbx}{aa} : y :: y : PT$; donc $PT = \frac{aayy}{bbx}$, & ſubſtituant à la place de $yy$ ſa valeur, on aura $PT = \frac{aabb - bbxx}{bbx}$; & diviſant par $bb$, $PT = \frac{aa - xx}{x}$.

*Corollaire.*

999. Il ſuit,

I°. Que ſi l'on ajoute CP $= x$ à la quantité PT, on aura CT $= \frac{aa}{x}$, ce qui donne $x : a :: a :$ CT, ou CP : CA :: CA : CT. Donc le grand demi-axe eſt moyen proportionnel entre la diſtance du centre à l'ordonnée, & ſa diſtance à l'extrêmité de la tangente; ce qui donne une autre méthode de déterminer la ſous-tangente.

II°. Si l'on ſuppoſe TP $= z$, on aura CT $= x + z$ : donc la proportion précédente ſe changera en $x : a :: a : x + z$; d'où l'on conclud $xx + xz = aa$, & $xz = aa - xx$, c'eſt-à-dire, que le produit CP × PT eſt égal au rectangle des abſciſſes.

III°. Que retranchant CA $= a$ de CT $= \frac{aa}{x}$, on aura AT $= \frac{aa - ax}{x}$; d'où l'on peut conclure encore $x : a :: a - x :$ AT, ou CP : CA :: PA : AT.

## THÉORÊME VII.

1000. *L'expreſſion de la Sous-Tangente* GD, *appartenante au petit axe, eſt* $\frac{bb - yy}{y}$

DÉMONST. Les triangles ſemblables TPM, MGD donnent TP : PM, ou GC :: MG, ou PC : DG; c'eſt-à-dire, algébriquement $\frac{aa - xx}{x} : y :: x :$ DG; donc DG $= \frac{xxy}{aa - xx}$. Or (988.) $aa - xx = \frac{aayy}{bb}$, & par conſéquent $xx = \frac{aabb - aayy}{bb}$; mettant donc cette valeur de $xx$ à ſa place dans le numérateur de la fraction DG $= \frac{xxy}{aa - xx}$, & au dénominateur à

la place de $aa - xx$ sa valeur $\frac{aayy}{bb}$, on aura DG $=$ $\frac{bb - yy}{y}$.

*Corollaire.*

1001. Ajoutant CG $= y$ à DG, on aura CD $=$ $\frac{bb}{y}$ : donc $y : b :: b :$ CD, ou CG : CB :: CB : CD. Donc le petit demi-axe est moyen proportionnel entre la distance du centre à l'ordonnée du petit axe, & sa distance à l'extrêmité de la tangente.

## *DÉFINITIONS.*

### I.

1002. Si d'un point quelconque M de l'ellipse & par le centre C (*fig.* 18.) on mene une droite M*m*, elle s'appelle *Diamétre* de l'ellipse, & si par le même point M on fait passer une tangente BMA, & par le centre C on mene une droite N*n* parallele à cette tangente, cette droite s'appelle le *diamétre conjugué.*

### II.

1003. Une droite quelconque TS, parallele à M*m*, s'appelle l'*Ordonnée* au diamétre N*n*, & les portions NT, *n*T s'appellent les *Abscisses* du diamétre N*n*.

### III.

1004. Une droite troisiéme proportionnelle à deux diamétres conjugués quelconques, s'appelle le *Paramétre* du premier terme de la proportion.

## THÉORÊME VIII.

1005. *Dans l'ellipse, le quarré d'une ordonnée quelconque à un diamétre est au rectangle de ses abscisses, comme le quarré du demi-diamétre conjugué est au quarré du premier demi-diamétre* (fig. 15.).

CONSTRUCTION. I°. Sur le grand axe ED de l'ellipſe décrivez un cercle, & menez-y les ordonnées OH, VG, RS, &c. & vous aurez dans l'ellipſe les ordonnées correſpondantes *o*H, *u*G, *r*S, &c. qui ſeront proportionnelles (990.) à celles du cercle.

II°. Menez dans le cercle deux diamétres quelconques OCF, PCR perpendiculaires l'un ſur l'autre, & dans l'ellipſe menez auſſi deux diamétres *o*C*f*, *p*C*r* correſpondans aux diamétres du cercle: & dans ce cas VX ſera une ordonnée du cercle par rapport au diamétre PCR, & *ux* ſera une ordonnée correſpondante de l'ellipſe par rapport au diamétre *p*C*r*.

III°. Soit dans l'ellipſe l'ordonnée $ux = z$; le demi-diamétre $Cr = e$; ſon conjugué $Co = d$; le rayon du cercle $= r$; la portion $Cx = u$; & par conſéquent on aura l'abſciſſe $xr = e - u$, & la co-abſciſſe $xp = e + u$.

IV°. Cela poſé, je dis que le quarré de l'ordonnée *ux* à un diamétre quelconque *p*C*r* de l'ellipſe eſt au rectangle $xr \times xp$ de ſes abſciſſes, comme le quarré $\overline{Co}^2$ du demi-diamétre conjugué eſt au quarré $\overline{Cr}^2$ du premier demi-diamétre, ou algébriquement $zz : ee - uu :: dd : ee$.

DÉMONST. I°. Les deux triangles *x*XM, VM*u* ſont ſemblables & donnent XM : MV :: *x*M · M*u* : M*u*; donc XM + MV : MV :: *x*M + M*u* : M*u*; & par conſéquent XV : MV :: *xu* : M*u*; ou

$$MV \cdot Mu :: XV : xu.$$

II°. Les deux triangles VM*u*, OC*o* ſont encore ſemblables, puiſque tous leurs côtés homologues ſont paralleles, & donnent par conſéquent MV : M*u* :: CO : C*o*; donc on aura XV : *xu* :: CO : C*o*; d'où l'on tire $XV = \frac{rz}{d}$.

III°. Les deux triangles ſemblables CX$x$, CR$r$ donnent CX : CR :: C$x$ : C$r$, ou CX : $r$ :: $u$ : $e$; donc $CX = \frac{ru}{e}$.

IV°. Suppoſant dans le cercle un rayon mené du centre C au point V, ce qui donnera un triangle rectangle CXV, on aura $\overline{XV}^2 + \overline{CX}^2 = rr$, & ſubſtituant à la place de $\overline{XV}^2$ & $\overline{CX}^2$ leurs valeurs algébriques, on aura $\frac{rr\zeta\zeta}{dd} + \frac{rruu}{ee} = rr$; donc $\frac{rree\zeta\zeta}{dd} + rruu = eerr$, ou $\frac{ee\zeta\zeta}{dd} + uu = ee$; d'où l'on tire pour l'équation de l'ellipſe rapportée à ſes diamétres $\frac{ee}{dd}\zeta\zeta = ee - uu$, ce qui donne la proportion $\zeta\zeta : ee - uu :: dd \cdot ee$, laquelle étoit à démontrer.

*Corollaire.*

1006. Les propriétés des diamétres de l'ellipſe ſont donc les mêmes que celles des axes, & l'on peut faire ici pour l'ellipſe un raiſonnement ſemblable à celui que nous avons fait pour la parabole : c'eſt-à-dire, que les diamétres de l'ellipſe ne ſont autre choſe que les axes eux-mêmes, qui ont changé de poſition, & ont fait en même-tems changer celle de toutes les lignes qui formoient leur ſyſtême.

*Remarque.*

1007. On fait uſage de l'ellipſe dans la *Dioptrique* & la *Catoptrique*, pour la conſtruction des verres & des miroirs ardens ; dans l'*Architecture*, pour la conſtruction des voûtes ; dans l'*Acouſtique*, pour la direction du ſon ; dans l'*Aſtronomie*, pour déterminer & calculer le cours des planétes.

## ARTICLE III.

### *De l'Hyperbole.*

### *HYPOTHESE.*

1008. Si ſur une droite A*a* (*fig.* 14.) on prend deux points F, *f*, également éloignés du milieu C, & que dans le plan ſur lequel la droite eſt poſée, on prenne tant de points que l'on voudra, comme M, tels que la différence de leurs diſtances FM, *f*M aux points F, *f*, ſoit conſtante & toujours égale à la ligne A*a*, la courbe qui paſſera par tous ces points M, s'appelle *Hyperbole*, & eſt la même que celle que nous avons conſidérée dans le cône, comme nous l'allons voir; & comme vous pouvez prendre du côté oppoſé des points ſemblables, la courbe qui paſſera de même par tous ces points, s'appelle *Hyperbole conjuguée.*

### *DÉFINITIONS.*

I.

1009. La droite A*a* ſe nomme le *premier Axe*; les points *A*, *a*, ſont les *Sommets*; les points F, *f*, les *Foyers*; le point *c* s'appelle le *Centre*; la droite B*b* (*fig.* 17.) perpendiculaire au premier axe *Aa*, paſſant par le centre, & terminée en B, *b* par des ſections d'arcs de cercle décrits des points A & *a* avec un rayon égal à l'excentricité CF, ou C*f*, s'appelle le ſecond *Axe.*

II.

1010. Une troiſiéme proportionnelle aux deux axes, ou à deux diamétres conjugués quelconques, s'appelle le *Paramétre* du premier terme de la proportion.

III.

1011. Si dans cette courbe, comme dans l'ellipſe, on ſuppoſe le premier demi-axe CA = *a*, le ſecond

demi-axe CB $= b$, le paramétre du premier axe $= p$, l'ordonnée MP $= y$, la diſtance de l'ordonnée au centre $= x$, l'excentricité CF $= c$, on aura par conſéquent AP $= x - a$, & $aP = x + a$; l'on aura auſſi FP $= x - c$, & $fP = x + c$.

THÉORÊME I.

1012. *Le ſecond demi-Axe eſt moyen proportionnel entre les diſtances d'un des Foyers aux deux ſommets de la Courbe que l'on vient de décrire, c'eſt-à-dire, que* FA : CB :: CB : F*a*, *ou algébriquement* $c - a : b :: b : c + a$.

DÉMONST. Le triangle rectangle BAC (*fig.* 17.) donne $\overline{BC^2} = \overline{AB^2} - \overline{CA^2}$, ou algébriquement $bb = cc - aa$, d'où l'on tire la proportion $c - a : b :: b : c + a$.

THÉORÊME II.

1013. *Dans cette même courbe le Quarré de l'ordonnée au premier Axe eſt au produit de ſes Abſciſſes, comme le Quarré du ſecond Axe eſt au Quarré du premier Axe* (fig. 14.).

DÉMONST. Nous avons la différence $fM - FM = 2a$; ſoit donc la ſomme $fM + FM = 2\zeta$, & l'on aura par conſéquent (298.) $fM = \zeta + a$, & $FM = \zeta - a$. Or

I°. Le triangle rectangle PMF donne $\overline{MP^2} = \overline{FM^2} - \overline{FP^2}$, ou algébriquement $yy = \zeta\zeta - 2a\zeta + aa - xx + 2cx - cc$.

II°. Le triangle rectangle PM$f$ donne auſſi $\overline{MP^2} = \overline{Mf^2} - \overline{Pf^2}$, ou algébriquement $yy = \zeta\zeta + 2a\zeta + aa - xx - 2cx - cc$.

III°. Comparant ces deux valeurs de $\overline{MP^2}$, ou $yy$, on aura $\zeta\zeta - 2a\zeta + aa - xx + 2cx - cc = \zeta\zeta + 2a\zeta + aa - xx - 2cx - cc$: donc on aura $4cx = a\zeta$: donc $\zeta = \frac{cx}{a}$.

IV°. Subſtituant cette valeur de $\zeta$ à la place de $\zeta$ dans la premiere équation, elle deviendra $yy =$

$\frac{ccxx}{aa} - 2cx + aa - xx + 2cx - cc$, ou $aayy = ccxx - 2aacx + a^4 - aaxx + 2aacx - aacc$, & réduisant $aayy = ccxx + a^4 - aaxx - aacc$.

V°. Or nous avons vu (1012.) que $bb = cc - aa$; donc diviſant dans cette équation le premier membre par $bb$, & le ſecond par $cc - aa$, l'on aura $\frac{aa}{bb} yy = xx - aa$. D'où l'on conclud $yy : xx - aa :: bb : aa$; c'eſt-à-dire, que le quarré de l'ordonnée eſt au rectangle de ſes abſciſſes, comme le quarré du ſecond axe eſt quarré du premier axe.

*Corollaire I.*

1014. Il ſuit que dans cette courbe les quarrés des ordonnées ſont entr'eux comme les rectangles des abſciſſes correſpondantes, & par conſéquent que cette courbe eſt une *Hyperbole*, & la même que celle que nous avons conſidérée dans le cône.

*Corollaire II.*

1015. L'on avoit pour l'ellipſe la proportion $yy : aa - xx :: bb : aa$, & l'on a pour l'hyperbole $yy : xx - aa :: bb : aa$. Ces deux courbes ont donc les mêmes propriétés, & il n'y a de différence que dans les ſignes + & —, qui affectent la quantité $x$, leſquels donnent pour les abſciſſes de l'ellipſe les expreſſions $a + x$, $a - x$, & pour celles de l'hyperbole $x + a$, $x - a$.

## THEORÊME III.

1016. *Si d'un point quelconque* M *de l'hyperbole & de l'intervalle* MF, *on décrit un Arc de cercle entre les deux rayons vecteurs* MF, M*f*, *une droite* MT *qui diviſera cet Arc en deux également, ſera tangente à l'hyperbole au point* M (fig. 6.).

DÉMONST. La droite MT n'aura que le ſeul point M commun avec l'hyperbole; tout autre point tel

que D ſera hors de l'hyperbole. En effet ſi du point D on mene aux foyers F, *f*, les lignes DF, D*f*, on verra que leur différence ſera toujours plus petite que le grand axe ; car du point D, comme centre & de l'intervalle DF, ayant décrit un arc entre DF & D*f*, cet arc coupera D*f* en *o*, & M*f* en *x* ; or l'on aura toujours la différence des lignes DF, D*f*, laquelle eſt *fo* plus petite que *fn* = A*a*, différence entre MF & M*f* : car de deux ſécantes extérieures *fx*, *fo* menées d'un même point *f* à l'arc convexe F*o* décrit du centre D, la plus courte (408.) eſt la ligne *fo*, qui prolongée paſſe par le centre D : donc *fo* < *fx*, donc à plus forte raiſon *fo* < *fn*, & par conſéquent *fo* < A*a* ; donc le point D n'eſt point à l'hyperbole.

## THÉORÊME IV.

1017. *Dans l'hyperbole l'expreſſion du rayon vecteur* FM *mené du foyer au point de contingence* M, *eſt* $r = \frac{cx - aa}{a}$ (fig. 14.).

DÉMONST. Le triangle rectangle FMP donne $\overline{FM}^2 = \overline{PM}^2 + \overline{PF}^2$ ; or PM = *y* & PF = *x* — *c* : donc on aura $\overline{FM}^2 = yy + xx - 2cx + cc$ : maintenant ſi nous ſubſtituons à la place de *yy* ſa valeur priſe dans l'équation de l'hyperbole, laquelle valeur eſt $yy = \frac{bbxx}{aa} - bb$, & ſi à la place de *bb* on ſubſtitue auſſi ſa valeur qui eſt (1012.) $bb = cc - aa$, nous trouverons après les ſubſtitutions & les réductions FM, ou $r = c\frac{x - aa}{a}$.

## THÉORÊME V.

1018. *L'expreſſion de la Sous-perpendiculaire* PE eſt PE = $\frac{bbx}{aa}$ ou $\frac{px}{2a}$ (fig. 14.)

DÉMONST. Ayant mené EM perpendiculaire

ſur MT, & parallele à F$n$, les deux triangles ſemblables $f$EM, $f$F$n$ donneront $fn$ : $f$F :: M$n$ : FE; or l'on a dans l'hyperbole la différence des rayons vecteurs, ſçavoir, $fn = 2a$; la diſtance $f$F $= 2b$; la portion M$n$ = MF $= \frac{cx - aa}{a}$: donc ſubſtituant on aura la proportion $2a : 2c :: \frac{cx - aa}{a}$ : FE; donc FE $= \frac{ccx - aac}{aa}$; donc retranchant PF $= x - c$ de la quantité précédente, on trouvera d'une maniere ſemblable que pour l'ellipſe, PE $= \frac{bbx}{aa}$, ou parce que $\frac{bb}{2a} = p$, l'on aura auſſi PE $= \frac{px}{2a}$.

## THÉORÊME VI.

1019. *Dans l'hyperbole l'expreſſion de la Sous-tangente* PT *appartenante au grand axe, eſt* PT $= \frac{xx - aa}{x}$.

DÉMONST. Elle eſt entiérement ſemblable à celle de l'ellipſe, en obſervant ſeulement de prendre la valeur de $yy$ dans l'hyperbole, au lieu de la prendre dans l'ellipſe.

*Corollaire.*

1020. Otant PT de CP, c'eſt-à-dire, $\frac{xx - aa}{x}$ de $x$, il reſtera CT $= \frac{aa}{x}$; & l'on aura dans l'hyperbole, comme dans l'ellipſe, CP : CA :: CA : CT.

## THÉORÊME VII.

1021. *Dans l'hyperbole l'expreſſion de la Sous-tangente* GD *appartenante au petit axe, eſt* GD $= \frac{yy - bb}{y}$. (fig. 13.).

DÉMONST. Ayant mené au petit axe l'ordonnée MG parallele à PC, & prolongé le petit axe juſqu'en G, la Sous-tangente appartenante au petit axe

axe de l'hyperbole ſera GD = CD + CG, par la raiſon contraire à ce que dans l'ellipſe GD = CD — CG : or les triangles ſemblables TPM, MGD donnent TP : PM ou CG :: MG ou PC : DG, ou algébriquement $\frac{xx-aa}{x} : y :: x : GD$, d'où l'on tirera en ſuivant le même procédé que pour l'ellipſe DG = $\frac{yy-bb}{y}$.

*Corollaire.*

1022. Dans l'ellipſe on a eu CG + GD = CD = $\frac{bb}{y}$, d'où l'on a conclu $y : b :: b : CD$; ou CG : CB :: CB : CD; dans l'hyperbole au contraire on aura DG — CG = CD = $\frac{bb}{y}$, mais d'où l'on conclura comme pour l'ellipſe $y : b :: b : CD$; ou GC : BC :: BC : CD.

## *DÉFINITIONS.*

### I.

1023. Si par le ſommet A (*fig.* 17.) on mene AB, *ab*, aux extrêmités du ſecond axe, & qu'on mene par le centre C deux droites paralleles aux lignes AB, A*b*, ces deux droites s'appellent les *Aſymptotes* de l'hyperbole.

### II.

1024. Les lignes KM, HM, GM s'appellent *Ordonnées* à l'aſymptote, leſquelles ſont, ou paralleles au premier axe, ou paralleles au ſecond axe, ou paralleles à l'aſymptote oppoſée.

### THÉORÊME VIII.

1025. *Dans l'Hyperbole le rectangle de l'ordonnée* KM *à l'Aſymptote & parallele au ſecond Axe, par* ML *prolongement de l'ordonnée juſqu'à l'Aſymptote oppoſée, eſt toujours égal au quarré du ſecond Axe, c'eſt-à-dire, on aura toujours* KM × ML = bb (fig. 17.).

Démonst. Suppoſant comme ci-deſſus (1011.) CA $= a$, CB, ou AE $= b$, PM $= y$, CP $= x$; à cauſe des triangles ſemblables CAE & CPK, on aura $a : b :: x :$ PK; donc on aura PK $= \frac{bx}{a}$, & par conſéquent on aura KM $=$ PK $-$ PM $= \frac{bx}{a} - y$, & la quantité ML $=$ PL (ou PK) $+$ PM $= \frac{bx}{a} + y$: donc KM $\times$ ML $= \frac{bbxx}{aa} - yy$; & ſi à la place de $yy$ nous ſubſtituons ſa valeur priſe dans l'équation de l'hyperbole, nous aurons KM $\times$ ML $= \frac{bbxx}{aa} - \frac{bbxx}{aa} + bb = bb$: donc le rectangle KM $\times$ ML eſt toujours égal au quarré du ſecond axe. On peut prouver la même choſe de tout autre rectangle ſemblable.

*Corollaire.*

1026. L'aſymptote ne peut jamais toucher l'hyperbole, quelque prolongée qu'on la ſuppoſe.

Démonst. L'aſymptote ne peut toucher l'hyperbole & la rencontrer, tant que les points K & M ſeront différens, ou tant que la quantité KM ſera réelle, ou, ce qui eſt le même, tant que PK ſera plus grand que PM. Or on aura toujours PK $>$ PM. Car on a toujours PK $= \frac{bx}{a}$, & par conſéquent $\overline{PK^2} = \frac{bbxx}{aa}$. Or $\overline{PM^2}$, ou $yy = \frac{bbxx}{aa} - bb$: donc $\overline{PK^2} > \overline{PM^2}$, & par conſéquent PK $>$ PM.

## Théorême IX.

1027. *Le Rectangle de l'ordonnée* MH *à un Aſymptote, & parallele à l'autre Aſymptote, par ſon abſciſſe* HC, *eſt toujours égal au Rectangle* AD $\times$ DC, *& ſera par conſéquent une quantité conſtante.*

Démonst. I°. Remarquez que les triangles

BDC, BA*b* ſont ſemblables, ce qui donne la proportion BC : C*b* :: BD : DA. Or BC = C*b*: donc BD = DA. Pareillement BA : A*b* :: BD : CD. Or BA = A*b*: donc BD = DC: donc on aura BD = DA = DC.

II°. Soit menée la ligne M*f* parallele & égale à l'abſciſſe HC; les triangles KMH, EAD ſont ſemblables, & donnent la proportion EA : AD :: KM : MH. Pareillement les triangles *f*ML, EAD ſont ſemblables, & donnent EA : AD :: ML : M*f*; donc multipliant par ordre les termes des deux proportions, on aura EA × EA : AD × AD :: KM × ML : MH × M*f*. Or KM × ML = EA × EA = $\overline{EA^2}$ = $\overline{BC^2}$ = *bb*, comme nous l'avons prouvé (1025.): donc auſſi MH × M*f* = AD × AD; & puiſque M*f* = HC, on aura MH × HC = $\overline{AD^2}$ = AD × DC.

*Corollaire I.*

1028. Le rectangle AD × DC, ou plutôt le quarré $\overline{AD^2}$, ou $\overline{DC^2}$ eſt ce que les Géométres appellent la *Puiſſance* de l'hyperbole. Or ce rectangle eſt une quantité conſtante, & eſt toujours égal à la quatriéme partie de la ſomme des quarrés des deux demi-axes CA, CB. Car puiſque AD n'eſt que la moitié de l'hypothénuſe AB, on aura $\overline{AD^2} = \frac{\overline{AB^2}}{4}$. Or $\overline{AB^2} = \overline{AC^2} + \overline{CB^2}$ : donc $\overline{AD^2} = \frac{\overline{CB^2} + \overline{AC^2}}{4}$.

*Corollaire II.*

1029. Si l'on ſuppoſe l'ordonnée MH = *y*, la ligne M*f*, ou ſon égale l'abſciſſe HC = *x*, la ligne AD, ou DC = *r*, ou la puiſſance $\overline{AD^2} = rr$, on aura l'équation *xy* = *rr*, que l'on appelle l'équation de l'hyperbole rapportée à ſon aſymptote, de même

que $\frac{aa}{bb}yy = xx - aa$ eſt l'équation de l'hyperbole rapportée à ſon axe. Or

I°. Puiſque $xy = rr$, donc on aura $y = \frac{rr}{x}$, & la grandeur conſtante & connue $rr$ pouvant être ſuppoſée $= 1$, on aura $y = \frac{1}{x}$; c'eſt-à-dire, que l'ordonnée à l'aſymptote eſt toujours en raiſon réciproque de l'abſciſſe, ou que les ordonnées à l'aſymptote vont toujours en décroiſſant, à meſure que les abſciſſes augmentent.

II°. D'où il ſuit que les abſciſſes augmentant ſuivant la progreſſion des nombres naturels $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$, &c. les ordonnées ſeront repréſentées par la ſuite des fractions $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$, &c. d'où l'on conclud que l'aſymptote s'approche toujours de plus en plus de l'hyperbole. D'ailleurs nous avons prouvé (1026.) que l'aſymptote ne peut jamais toucher ou rencontrer l'hyperbole, quelque prolongées qu'on les ſupposât l'une & l'autre (du moins ſi ce n'eſt à l'infini); & c'eſt-là une propriété remarquable qui caractériſe l'hyperbole, & qui la différencie ſur-tout des autres ſections coniques.

## THÉORÊME X.

1030. *Le Rectangle de l'ordonnée* MG *à l'aſymptote & parallele au premier axe, par* NO, *qui eſt la même ordonnée prolongée juſqu'à la rencontre de l'autre aſymptote, eſt toujours égal au Quarré du premier demi-axe, c'eſt-à-dire, que* $MG \times MO = aa$.

DÉMONST. Les triangles GMK, CAE ſont ſemblables, & donnent la proportion GM : KM :: CA : AE. Pareillement les triangles OLM, CAE ſont ſemblables, & donnent la proportion MO : ML :: CA : AE; donc multipliant par ordre les termes des deux proportions, on aura $GM \times MO : KM \times ML ::$

$\overline{AC^2} : \overline{AE^2}$. Or $KM \times ML = \overline{AE^2} = bb$, comme nous l'avons prouvé (1025.): donc $GM \times MO = \overline{CA^2} = aa$.

*Remarque I.*

1031. L'hyperbole a ſon uſage & ſes applications dans la *Dioptrique* & dans la *Catoptrique*, pour la conſtruction & l'uſage des verres & des miroirs. Si l'on ſuppoſe, *par ex:* une ſurface hyperbolique formée par la révolution d'une hyperbole AMD (*fig.* 14.), & qu'un rayon de lumiere tombe ſur la convexité de cette hyperbole dans une direction VM, laquelle prolongée, aboutiroit au foyer F, ce rayon ſe réfléchira au foyer *f* de l'hyperbole conjuguée. Car, puiſque l'angle de réflexion doit être égal à l'angle d'incidence, ſelon les loix de la Phyſique, le rayon VM ſera réfléchi dans la direction M*f*, laquelle, ſuivant la nature de l'hyperbole, forme avec la tangente DMT l'angle FMT égal à l'angle d'incidence VMD.

*Remarque II.*

1032. On ſe ſert auſſi fort ingénieuſement de l'hyperbole pour repréſenter les logarithmes des nombres. En effet

1°. Suppoſons que l'aſymptote CL (*fig.* 17.) ſoit diviſée en parties continuement proportionnelles, de façon que ces parties priſes toutes depuis le centre C de l'hyperbole, ſoient en progreſſion géométrique, telle, *par ex:* que $\div\div$ 1:2:4:8:16:32, &c. ou telle autre quelconque, & que par les points de diviſion on mene juſqu'à la rencontre de l'hyperbole des lignes paralleles à la ſeconde aſymptote CK, ces paralleles partageront l'eſpace aſymptotique en des portions que l'on appelle *Quadrilateres aſymptotiques*. Or les Géomètres prouvent que tous ces quadrilateres ſont égaux entr'eux, & par conſéquent le premier quadrilatere étant ſuppoſé = 1,

les deux premiers ſeront repréſentés par 2, les trois premiers par 3, les quatre premiers par 4, & ainſi du reſte. C'eſt pourquoi les parties auxquelles on a diviſé l'aſymptote, repréſentant les termes d'une progreſſion géométrique, les quadrilateres repréſenteront ceux d'une progreſſion arithmétique, leſquels ſeront par conſéquent les logarithmes des premiers.

II°. Le tout étant ſuppoſé comme ci-deſſus, ſi du centre C on mene des diamétres aux points où les paralleles qui forment les quadrilateres, rencontrent l'hyperbole, ces diamétres partageront l'eſpace aſymptotique en des ſurfaces que l'on appelle *Secteurs hyperboliques*; & il y aura autant de ces ſecteurs, qu'il y a de quadrilateres formés par les paralleles. Or les Géométres prouvent que chaque ſecteur hyperbolique eſt égal à chaque quadrilatere correſpondant: d'où il ſuit qu'au lieu des quadrilateres on peut prendre des ſecteurs hyperboliques pour repréſenter les logarithmes; car le premier ſecteur étant ſuppoſé = 1, les deux premiers ſeront repréſentés par 2, les trois premiers par 3, & ainſi du reſte.

## CHAPITRE II.

### *Des Sections Coniques Comparées.*

NOus allons conſidérer & comparer les ſections coniques, 1°. dans leur deſcription; 2°. dans leurs équations; 3°. dans leurs affections; 4°. dans leurs meſures.

## ARTICLE I.

*Des Sections coniques comparées dans leur Deſcription.*

### *DÉFINITIONS.*

I.

1033. La deſcription d'une courbe eſt ou *géométrique* ou *méchanique*. On appelle deſcription géométrique, celle dans laquelle on aſſigne pluſieurs points par leſquels paſſe la courbe. On appelle deſcription *méchanique*, ou *organique*, celle dans laquelle on décrit la courbe d'un mouvement continu à l'aide des inſtrumens.

II.

1034. Lorſqu'on conſidere les ſections coniques ſur un plan, on appelle *Section conique* toute ligne qui eſt telle que les deux diſtances de chacun de ſes points, l'une MF à un même point F, l'autre MG à une même droite GA (*fig.* 20, 21 & 22.), ſoient toujours en même raiſon, ou dans un rapport conſtant, *par ex:* dans le rapport de $a : p$.

III.

1035. La ligne droite AG s'appelle *Directrice*, ou *Génératrice* de la ſection; le point F s'appelle le *Foyer*.

IV.

1036. La ſection eſt une *Ellipſe*, ſi MF $<$ MG (*fig.* 22.); une *Hyperbole*, ſi MF $>$ MG (*fig.* 21.); une *Parabole*, ſi MF $=$ MG (*fig.* 20.); un *Cercle*, ſi MG eſt infini par rapport à MF; car dans ce dernier cas la ligne MF n'ayant plus de rapport avec MG, reſte ſeule pour déterminer la diſtance de chaque point M au foyer F, laquelle diſtance par cette raiſon ſe trouve toujours égale dans tous les points de la courbe. Ainſi la ſection eſt une ellipſe, une hyperbole, une parabole, ou un cercle, ſuivant que dans

le rapport $a : p$, on aura $a < p$, ou $a > p$, ou $a = p$; ou $\infty\ a = p$.

### Problême I.

1037. *La Directrice* GG *étant donnée de poſition, étant donnés le foyer* F, *& le ſommet* S, *trouver tant de points que l'on voudra d'une Section conique, & par conſéquent décrire géométriquement une Section conique* (fig. 20, 21 & 22.).

Solut. Du ſommet S élevez perpendiculairement à l'axe une ligne SB = SF; par les points A & B menez la ligne indéfinie ABD, & ayant mené tant de droites PD, PD, &c. que l'on voudra, perpendiculaires à l'axe, il faut marquer ſur chacune de ces droites un point M, tel que chaque MF ſoit égale à chaque PD.

Démonst. Car ſi de l'un de ces points on éleve à la directrice la perpendiculaire MG, à cauſe des triangles ſemblables ASB, APD, on aura PD : PA :: SB : SA, ou ce qui eſt le même, MF : MG :: SF : SA :: $a : p$; donc, &c.

### *Corollaire I.*

1038. La ligne SB, ou la diſtance SF du ſommet de la ſection au foyer, eſt par rapport à SA, diſtance du ſommet à la directrice, égale dans la parabole, plus petite dans l'ellipſe, plus grande dans l'hyperbole.

### *Corollaire II.*

1039. L'angle SAB dans la parabole eſt de 45 degrés, parce que SB = SA; il eſt plus petit dans l'ellipſe, parce que SB < SA; il eſt plus grand dans l'hyperbole, parce que SB > SA.

### Problême II.

1040. *Déterminer la longueur du grand Axe d'une ſection conique, ou, ce qui eſt le même, déterminer les Sommets* S, *s, oppoſés d'une ſection conique.*

Solut. Le premier ſommet S étant donné par l'hypothèſe, il ne s'agit que de trouver le ſommet oppoſé *s*. Pour le trouver,

I°. Du foyer F menez une ligne F*x*, qui faſſe avec l'axe de la ſection un angle de 45 degrés, & continuez-la juſqu'à ce qu'elle rencontre la ligne indéfinie AD.

II°. Du point de rencontre menez la perpendiculaire *xs* ſur l'axe prolongé, autant qu'il le faudra : le point *s* ſera le ſommet oppoſé que l'on cherche, & la diſtance S*s* ſera la longueur du grand axe.

Démonst. Par la conſtruction l'angle en *s* eſt droit, & l'angle *s*F*x* = 45 degrés : donc l'angle F*xs* eſt auſſi de 45 degrés : donc le triangle F*xs* eſt iſocele : donc *s*F = *sx*. Or à cauſe des triangles ſemblables ASB, A*sx*, on a *sx*, ou *s*F : *s*A :: SB : SA :: *a* : *p* ; donc le point *s* eſt un point de la ſection.

*Corollaire I.*

1041. Dans l'ellipſe (*fig.* 22.) la ligne F*x* rencontre AD au-deſſous du premier ſommet S, parce que l'angle *s*F*x* > *s*A*x*. Dans la parabole (*fig.* 20.) la ligne F*x* eſt parallele à la ligne AD, parce que l'angle *s*F*x* = *s*AD. Dans l'hyperbole (*fig.* 21.) la ligne F*x* rencontre AD au-deſſus du ſommet S, parce que l'angle *s*F*x* < *s*AD.

*Corollaire. I I.*

1042. Dans l'ellipſe les deux ſommets S, *s* ſont à une diſtance finie l'un de l'autre, & ſont oppoſés par leur concavité. Dans la parabole le ſecond ſommet eſt infiniment éloigné du premier ; où l'axe eſt infini. Dans l'hyperbole les deux ſommets ſont poſés à contre-ſens, & ſe tournent leur convexité ; c'eſt ce que les Géométres ont coutume d'exprimer, en diſant que *le ſecond ſommet eſt éloigné plus qu'à l'infini du premier.*

## THÉORÊME.

1043. *Dans une Section conique l'intervalle* Ff *des deux foyers eſt au grand Axe* Ss *dans la raiſon de* $a:p$: *c'eſt-à-dire*, $Ff:Ss :: a:p$ ; *ou* $2c:2a :: a:p$.

DÉMONST. Nous avons prouvé (1037.) que $sF:sA :: SB:SA :: a:p$; donc $sF-SB:sA-SA :: a:p$. Or par la conſtruction (1037.) $SB=SF=sf$, & par conſéquent $sF-SB=Ff$; pareillement $sA-SA=sS$: donc on aura $fF:sS :: a:p$.

### *Corollaire I.*

1044. Dans le *cercle* la quantité $a$ eſt infiniment petite par rapport à la quantité $p$ : donc l'intervalle $fF$ des foyers eſt infiniment petit par rapport à l'axe, c'eſt-à-dire, qu'il eſt nul. Dans la *parabole* $a=p$, & par conſéquent on y aura $fF=sS$ : c'eſt-à-dire, que l'intervalle des foyers eſt égal à l'axe, & par conſéquent infini. Dans l'*ellipſe* $a<p$, d'où il ſuit que l'intervalle des foyers $fF$ ſera plus petit que l'axe. Dans l'*hyperbole* $a>p$, d'où il ſuit que l'intervalle des foyers ſera plus grand que l'axe.

### *Corollaire II.*

1045. Il ſuit que le *cercle* peut être regardé comme une ſection, dont les foyers ſe réuniſſent en un ſeul & même point C, qui eſt le centre ; que l'*ellipſe* peut être regardée comme un cercle dont les foyers ſe ſont éloignés du centre d'une quantité finie, laquelle s'appelle *excentricité* ; que la *parabole* eſt une ellipſe dont les foyers ſe ſont éloignés infiniment l'un de l'autre ; que l'*hyperbole* eſt une ellipſe dont les foyers ſe ſont éloignés plus qu'à l'infini l'un de l'autre, & ſe ſont poſés à contre-ſens.

Comme le centre eſt toujours placé entre les deux foyers, il arrive que dans la *parabole* il n'y a point de centre ; que dans le *cercle* & l'*ellipſe* il eſt en dedans

de la courbe ; & que dans l'*hyperbole* il eſt en dehors de la courbe, placé entre les ſommets des hyperboles conjuguées.

## PROBLÊME III.

1046. *Etant donné le Rapport entre les ordonnées & les abſciſſes ; ou étant donné l'équation d'une Section conique, la décrire ſur un plan.*

SOLUT. Ayant mené une ligne droite, & l'ayant diviſé en parties égales pour avoir des abſciſſes, qui, priſes depuis l'origine, croiſſent dans le rapport des nombres 1 · 2 · 3 · 4 · 5, &c. élevez à chaque point de diviſion des ordonnées perpendiculaires qui ſoient avec les abſciſſes correſpondantes dans le rapport exprimé dans l'équation donnée. C'eſt pourquoi

I°. Si les ordonnées ſont entr'elles dans le rapport conſtant des abſciſſes correſpondantes, la ligne qui paſſera par les extrêmités de ces ordonnées, donnera un *triangle* : car dans un triangle, *par ex* : ACD (*fig.* 103.). Ayant mené des ordonnées paralleles à la baſe, ces ordonnées ſont toujours entr'elles comme les abſciſſes correſpondantes, à cauſe de la ſimilitude des triangles ACD, A*mo*, A*mo*, &c.

II°. Si les ordonnées ſont telles que le quarré de chaque ordonnée ſoit égal au rectangle des abſciſſes correſpondantes, la courbe qui paſſera par les extrêmités de ces ordonnées ſera un *Cercle* (*fig.* 25.). Car nous avons prouvé (539.) qu'une ligne quelconque menée d'un point de la circonférence perpendiculairement ſur le diamétre (laquelle ligne eſt toujours *ordonnée* du cercle) étoit moyenne proportionnelle entre les deux ſegmens (ou *abſciſſes*) du diamétre, & que par conſéquent ſon quarré étoit égal au rectangle des abſciſſes correſpondantes.

III°. Si dans ce cercle vous diviſez les ordonnées proportionellement, c'eſt-à-dire, ſi vous en prenez,

ſoit la moitié, ſoit le tiers, ſoit le quart, &c. & ſi vous faites paſſer une ligne courbe par tous les points de diviſion (*fig.* 25.), cette courbe ſera une *Ellipſe.* Car les ordonnées FG, HC, &c. de cette courbe étant proportionnelles aux ordonnées correſpondantes EG, DC, &c. du cercle par la conſtruction, leurs quarrés ſeront auſſi proportionnels aux quarrés des ordonnés du cercle. Or les quarrés des ordonnées du cercle ſont égaux aux produits des abſciſſes correſpondantes : donc les quarrés des ordonnées de la courbe décrite, ſeront proportionnels aux produits des abſciſſes, & par conſéquent la courbe décrite eſt une *Ellipſe.*

IV°. Si ſur la ligne des abſciſſes vous élevez des ordonnées, telles que leurs quarrés ſoient entr'eux comme les abſciſſes correſpondantes, la courbe qui terminera les ordonnées, ſera une *Parabole.*

V°. Si ſur la ligne des abſciſſes vous élevez des ordonnées, telles que leurs quarrés ſoient comme les produits des abſciſſes, mais en prenant la co-abſciſſe du même côté que l'abſciſſe, vous aurez une *Hyperbole.*

*Remarque.*

1047. La courbe qui paſſe par les extrêmités des ordonnées, s'appelle *lieu Géométrique*, & l'équation qui exprime le rapport des co-ordonnées s'appelle *lieu Algébrique.* Ainſi le problême précédent conſiſte à trouver & à déterminer le *lieu géométrique* des ordonnées, dont le *lieu algébrique* eſt connu.

## PROBLÊME IV.

1048. *Décrire méchaniquement, ou par un mouvement continu une Section conique ſur un plan* (fig. 23, 24 & 28.).

SOLUT. I°. Pour le *Cercle*, il n'y a point de difficulté. Il ſe décrit, comme l'on ſçait, en fixant une des pointes du compas, & en faiſant tourner l'au-

tre, gardant toujours la même ouverture : ou bien l'on prend un point quelconque C que l'on appelle *centre*, & où ſe réuniſſent les deux foyers ; on y plante un piquet dans lequel on engage une corde, dont les deux bouts ſont réunis, & l'on fait tourner autour de ce centre une pointe ou ſtilet qui tienne toujours la corde tendue ; cette pointe dans ſon mouvement trace la circonférence d'un cercle.

II°. Comme l'*Ellipſe* a deux foyers qui ſont diſtingués du centre, il faut concevoir que les foyers qui étoient réunis au centre C dans la deſcription du cercle, s'en ſont éloignés, & ſont devenus les points F, *f* (*fig.* 24.) ; par conſéquent pour décrire l'ellipſe, au lieu d'un piquet, il en faut planter deux aux points F, *f*, autour deſquels ſera engagée la corde ci-deſſus, & la pointe M, qui tiendra cette corde tendue, décrira par ſon mouvement une ellipſe. Car il eſt évident que la ſomme des diſtances de chaque point de la courbe aux deux foyers F, *f* eſt conſtante, & qu'elle eſt égale à toute la quantité de cette corde priſe des deux foyers, laquelle quantité meſure le grand axe.

III°. Si l'ellipſe étoit infinie, ou devenoit une *Parabole*, elle auroit par conſéquent ſes foyers infiniment éloignés l'un de l'autre, & en ce cas la portion M*f* de la corde ne couperoit point l'axe, ſi ce n'eſt à une diſtance infinie, & deviendroit par conſéquent parallele à l'axe. Donc pour décrire une parabole d'un mouvement continu, il n'y a qu'à faire en ſorte que la portion M*f* de la corde devienne & reſte toujours parallelle à l'axe, & pour cela on ſe ſert de deux regles, l'une droite & immobile BAB (*fig.* 23.), & l'autre EDC mobile & en forme d'équerre. Alors tenant toujours le fil tendu & aſſujetti à la regle mobile par le moyen d'un ſtilet que l'on fera couler le long de la regle mobile, & faiſant mouvoir cette regle en l'éloignant toujours de l'axe

parallelement, ce ſtilet décrira une ellipſe infinie, ou une parabole.

IV°. Si l'ellipſe étoit allongée plus qu'à l'infini, auquel cas elle ſeroit une *Hyperbole*, il arriveroit que l'un de ſes foyers étant au point F (*fig.* 28.) l'autre ſe trouveroit placé à contre-ſens au point *f*; d'où il ſuit que la regle DE (*fig.* 23.), qui étoit parallele à l'axe, & dont l'extrêmité E étoit cenſée tendre au ſecond foyer de la parabole infiniment éloigné, mais dans le même ſens, doit ſe replier pour fixer cette extrêmité E au foyer *f* de l'hyperbole. C'eſt pourquoi, pour décrire l'hyperbole par un mouvement continu, il n'y aura qu'à fixer une des extrêmités de la regle au foyer *f* (*fig.* 28.), & aſſujettir à cette regle le fil, ou le cordon qui part du foyer F. Car faiſant mouvoir cette regle, en l'éloignant toujours de l'axe, le ſtilet qui tiendra la corde tendue & coulera le long de la regle mobile, d'écrira l'hyperbole EAE; & par le moyen d'une ſeconde regle fixée par ſon extrêmité à l'autre foyer F, & à laquelle on fixeroit un fil, ou un cordon qui partiroit du point *f*, on décrira de la même maniere l'hyperbole conjuguée en *eae*.

## ARTICLE II.

### *Des Sections coniques comparées dans leurs Equations.*

#### PROPOSITION I.

1049. Dans le triangle une ordonnée quelconque *mo* (*fig.* 103.) eſt à ſon abſciſſe *m*A, comme une autre ordonnée quelconque CD eſt à ſon abſciſſe CA; car les deux triangles ſemblables A*mo*, ACD donnent la proportion *mo* : *m*A :: CD : CA: c'eſt pourquoi faiſant $mo = y$, $mA = x$, $CD = a$, & $CA = b$, la proportion deviendra $y \cdot x :: a \cdot b$; d'où l'on déduit l'équation $yb = ax$, ou $y = \frac{ax}{b}$, laquelle eſt l'équation du *triangle*.

## PROPOSITION II.

1050. Dans le cercle une ordonnée quelconque EG ($y$) (*fig.* 25.) eſt moyenne proportionnelle entre les abſciſſes, ou ſegmens du diamétre, de ſorte que nommant l'abſciſſe $x$, le diamétre $2a$, la co-abſciſſe ſera $2a - x$, & l'on aura la proportion $x : y :: y : 2a - x$, d'où l'on déduit l'équation $yy = 2ax - xx$, qui eſt l'équation du *Cercle*.

*Corollaire.*

1051. Si l'on prend l'ordonnée DC égale au rayon ($a$), l'abſciſſe ſera CB $= a$, & la co-abſciſſe CA $= a$. Par conſéquent ſi l'on compare les deux ordonnées EG, DC, on aura par la propriété du cercle $\overline{EG}^2 : \overline{DC}^2 :: GB \times GA : CB \times CA$, ou algébriquement $yy : aa :: 2ax - xx : aa$; d'où l'on conclud $\frac{aa}{aa} yy = 2ax - xx$, qui eſt encore l'équation du cercle, & laquelle ne differe de la précédente que par le coefficient $\frac{aa}{aa} = 1$, qui exprime l'égalité des axes, ou diamétres du cercle.

## PROPOSITION III.

1052. Si l'on ſuppoſe que les axes du cercle deviennent inégaux, auquel cas le *cercle* ſe change en ellipſe, alors le premier axe étant exprimé par $a$, le ſecond doit être exprimé par $b$, & la fraction $\frac{aa}{aa}$ ſe changera en $\frac{aa}{bb}$; ainſi l'équation précédente deviendra $\frac{aa}{bb} yy = 2ax - xx$, & c'eſt l'équation de l'*Ellipſe*, laquelle ne differe de celle du cercle que par la fraction $\frac{aa}{bb}$, laquelle exprime l'inégalité des deux axes de l'*ellipſe*.

On peut auſſi prendre l'équation $\frac{bb}{aa} yy = 2bx -$

$xx$, laquelle eſt encore à l'ellipſe, & appartient au petit axe, de même que l'équation $\frac{aa}{bb}yy = 2ax - xx$ appartient au grand axe.

PROPOSITION IV.

1053. Si dans l'ellipſe on ſuppoſe que le grand axe $2a$ ſoit prolongé à l'infini, auquel cas l'ellipſe ſe change en *Parabole*, alors dans l'équation $\frac{aa}{bb}yy = 2ax - xx$, le terme $-xx$ ſera infiniment petit, & par conſéquent nul par rapport au terme $2ax$; & alors l'équation de l'ellipſe deviendra $\frac{aa}{bb}yy = 2ax$, & en ſimplifiant $yy = \frac{2bbx}{a}$; & faiſant la quantité connue & conſtante $\frac{2bb}{a} = p$, on aura $yy = px$, & c'eſt l'équation de la *Parabole*.

PROPOSITION V.

1054. Si dans l'équation de l'ellipſe $\frac{aa}{bb}yy = 2ax - xx$, on ſuppoſe que les ſommets A, $a$, & les foyers F, $f$, ſoient placés à contre-ſens, auquel cas l'ellipſe devient une *Hyperbole*; alors la co-abſciſſe qui étoit $2a - x$, ſe trouvera placée dans le même ſens que l'abſciſſe, & ſera par conſéquent $2a + x$: donc le rectangle des abſciſſes alors ſera $2ax + xx$, & l'équation précédente ſe changera en $\frac{aa}{bb}yy = 2ax + xx$; & c'eſt l'équation de l'*Hyperbole* appellée *elliptique*, c'eſt-à-dire, de l'hyperbole dont les deux axes ſont inégaux, & qui par cette raiſon eſt dite dériver de l'ellipſe.

Si dans cette derniere équation on ſuppoſe $a = b$, ou ſi l'on ſuppoſe que les deux axes de l'hyperbole ſoient

ſoient égaux, alors on aura $\frac{aa}{bb} = \frac{aa}{aa} = 1$ ; & l'équation ſe changera en celle-ci, $yy = 2ax + xx$ ; & c'eſt l'équation de l'*Hyperbole* appellée *circulaire*, c'eſt-à-dire, de l'hyperbole dont les deux axes ſont égaux, & qui par cette raiſon eſt dite dériver du cercle.

*Corollaire I.*

1055. Il ſuit que les équations de l'hyperbole ſoit circulaire, ſoit elliptique, ne différent des équations du cercle & de l'ellipſe, que par le ſigne + qui affecte le terme $xx$ pour les hyperboles, au lieu que le ſigne — affecte le même terme $xx$ pour le cercle & l'ellipſe.

*Corollaire II.*

1056. On voit par ce qui vient d'être dit, que les équations des ſections coniques dérivent toutes d'une équation primitive ; ſçavoir, de l'équation du cercle ; & par conſéquent que la nature des ſections coniques peut être repréſentée par une équation générale, qui pourra s'appliquer à chaque ſection en particulier, en la modifiant ſuivant les différences qu'admettent les ſections en particulier par rapport aux axes, aux abſciſſes, aux co-abſciſſes, &c. Cette équation générale ſera $\frac{aa}{bb} yy = 2ax \pm xx$ ou $yy = \frac{2bbx}{a} \pm \frac{bbxx}{aa}$, que l'on appelle l'équation généraliſſime à l'*axe* des ſections coniques & de laquelle on peut déduire l'équation à l'axe de chaque ſection en particulier. Car

1°. Si l'on ſuppoſe $a = b$, & qu'on prenne dans le ſecond membre le ſigne —, alors de l'équation générale $\frac{aa}{bb} yy = 2ax \pm xx$, on déduira l'équation $yy = 2ax - xx$, qui eſt celle du *Cercle*.

II°. Si l'on ſuppoſe $a > b$, & qu'on prenne dans le ſecond membre le ſigne —, on aura $\frac{aa}{bb} yy = 2ax - xx$, qui eſt l'équation de l'*Ellipſe*.

III°. Si l'on ſuppoſe $a = \infty\ b$, le terme $- xx$ ſera nul par rapport à $2ax$, & on aura $\frac{aa}{bb} yy = 2ax$, ou $yy = \frac{2bbx}{a}$, pour l'équation de la *Parabole*.

IV°. Si l'on prend le ſigne + dans le ſecond membre, & qu'on laiſſe tout le reſte, on aura $\frac{aa}{bb} yy = ax + xx$, & c'eſt l'équation de l'hyperbole *Elliptique*; & ſuppoſant $a = b$, on aura $yy = 2ax + xx$, pour l'équation de l'hyperbole *Circulaire*.

## PROPOSITION V.

1057. Dans les équations précédentes on peut ſuppoſer la quantité $\frac{2bb}{a} = p$. Or la quantité $p = \frac{2bb}{a}$ s'appelle le *Paramétre*, lequel eſt une troiſiéme proportionnelle aux quantités $a$ & $b$, ou au grand & au petit axe; car $2a : 2b :: 2b : \frac{4bb}{2a} = \frac{2bb}{a} = p$. Or

I°. Puiſque $p = \frac{2bb}{a}$, il s'enſuit qu'en ſuppoſant $a = b$ on aura $p = \frac{2aa}{a} = 2a$, c'eſt-à-dire, que dans le cercle le paramétre eſt égal au diamétre.

II°. Puiſque $p = \frac{2bb}{a}$, il s'enſuit que $\frac{p}{2a} = \frac{bb}{aa}$; par conſéquent ſi dans l'équation généraliſſime $yy = \frac{2bbx}{a} \pm \frac{bbxx}{aa}$, on ſubſtitue $p$ à la place de $\frac{2bb}{a}$, & $\frac{p}{2a}$ à la place de $\frac{bb}{aa}$, elle deviendra $yy = px \pm \frac{pxx}{2a}$, que l'on appelle l'équation généraliſſime au *Paramétre*.

*Corollaire.*

1058. Comme de l'équation généraliſſime à l'axe nous venons de déduire l'équation à l'axe de chacune des ſections coniques, de même de l'équation généraliſſime au paramétre, on peut déduire les équations particulieres aux paramétres des ſections, en la modifiant à-peu-près ſuivant la méthode ci-deſſus. Car

I°. Si l'on ſuppoſe $p = 2a$, & ſi l'on prend le ſigne —, le ſecond terme du ſecond membre deviendra $-xx$, & l'équation ſera $yy = px - xx$, qui eſt l'équation au paramétre du *Cercle*.

II°. Si dans l'équation généraliſſime on ſuppoſe $p > 2a$, ou $p < 2a$, & que l'on prenne le ſigne —, l'équation deviendra $yy = px - \frac{pxx}{2a}$, & c'eſt l'équation au paramétre de l'*Ellipſe*.

III°. Si l'on ſuppoſe $2a = \infty$, alors le ſecond terme du ſecond membre devenant nul, l'équation ſera $yy = px$, & c'eſt l'équation au paramétre de la *Parabole*.

IV°. Si dans l'équation au paramétre du cercle, vous ſubſtituez le ſigne + au lieu de —, l'équation ſera $yy = px + xx$, & c'eſt l'équation au paramétre de l'*Hyperbole circulaire*.

V°. Si dans l'équation au paramétre de l'ellipſe, vous ſubſtituez le ſigne + au lieu du ſigne —, l'équation deviendra $yy = px + \frac{pxx}{2a}$, & c'eſt l'équation au paramétre de l'*Hyperbole elliptique*.

## ARTICLE III.

*Des Sections coniques comparées dans leurs affections.*

### THÉORÊME I.

1059. *Dans une ſection conique le Paramétre eſt égal à la double ordonnée qui paſſe par le foyer.*

Démonst Si l'on appelle $x$ la distance du centre à l'ordonnée $y$, alors l'équation généralissime $\frac{aa}{bb}yy = 2ax \pm xx$, deviendra $\frac{aa}{bb}yy = \mp aa \pm xx$.

Or lorsqu'on prend l'ordonnée qui passe par le foyer, alors la distance de l'ordonnée au centre sera la même que celle du foyer au centre, & l'on aura $x = c$ : donc mettant $c$ à la place de $x$, l'équation généralissime se changera en $\frac{aa}{bb}yy = \mp aa \pm cc$. Or $aa \pm cc = bb$ : donc $\frac{aa}{bb}yy = bb$ : donc $aayy = b^4$ ; & divisant par $aa$, $yy = \frac{b^4}{aa}$ : donc $y = \frac{bb}{a} = \frac{p}{2}$, & $2y = \frac{2bb}{a} = p$ ; c'est-à-dire, que la double ordonnée $2y$ qui passe par le foyer d'une section conique, est égale au paramétre.

## Théorême II.

1060. *Le Paramétre d'une Section conique est par rapport à la distance du sommet au plus proche foyer*, quadruple *dans la Parabole* ; moins que quadruple *dans l'Ellipse* ; plus que quadruple *dans l'Hyperbole.*

Démonst. Nous venons de prouver que l'ordonnée $y$ qui passe par le foyer, est $y = \frac{p}{2}$ : donc $yy = \frac{pp}{4}$. Or substituant cette valeur de $yy$ dans l'équation au paramétre des sections coniques, laquelle est $yy = px \pm \frac{pxx}{2a}$, cette équation deviendra $\frac{pp}{4} = px \pm \frac{pxx}{2a}$ : donc divisant par $p$, on aura $\frac{p}{4} = x \pm$

$\frac{xx}{2a}$ : donc $p = 4x \pm \frac{2xx}{a}$. Or la quantité $x$ exprime ici la distance du sommet au plus proche foyer ; d'où il s'ensuit

I°. Que dans la parabole $a$ étant infini, le terme $\frac{2xx}{a}$ devient infiniment petit, & par conséquent nul par rapport à $4x$ : donc dans la parabole on aura $p = 4x$ ; c'est-à-dire, que le paramétre $p$ est quadruple de la distance du foyer au sommet.

II°. Dans l'ellipse on a $p = 4x - \frac{2xx}{a}$ ; c'est-à-dire, que le paramétre est moins que quadruple par rapport à la distance $x$, de toute la quantité $\frac{2xx}{a}$.

III°. Dans l'hyperbole on a $p = 4x + \frac{2xx}{a}$ ; c'est-à-dire, que $p$ est plus que quadruple par rapport à $x$, de toute la quantité $\frac{2xx}{a}$.

## THÉORÊME III.

1061. *Dans toute Section conique la Sous-tangente est par rapport à l'abscisse, double dans la Parabole ; plus que double dans l'Ellipse ; moins que double dans l'Hyperbole.*

DÉMONST. I°. Dans la parabole l'abscisse est $x$, & la sous-tangente est (967.) $PT = 2x$ : donc, &c.

II°. Dans l'ellipse l'abscisse est $a - x$, & la sous-tangente est $PT = \frac{aa - xx}{x}$ : donc on a $PT : a - x :: a + x : x$. Or dans l'ellipse $a$ est toujours plus grand que $x$ : donc $a + x$ est plus que double de $x$ : donc aussi PT est plus que double de l'abscisse $a - x$.

III°. Dans l'hyperbole l'abscisse est $x - a$, & la

ſous-tangente eſt PT $= \frac{xx-aa}{x}$: donc PT : $x-a$ :: $x+a$ : $x$. Or dans l'hyperbole $a$ eſt toujours plus petit que $x$ : donc $x+a$ eſt moins que double de $x$ : donc PT eſt auſſi moins que double de l'abſciſſe $x-a$.

## THÉORÊME IV.

1062. *Dans toute Section conique, la Sous-perpendiculaire eſt par rapport à la moitié du Parametre, egale dans la Parabole; moindre, dans l'Ellipſe; plus grande, dans l'Hyperbole.*

DÉMONST. I°. Dans la parabole le paramétre eſt $4a$. Or la ſous-perpendiculaire eſt PC $= 2a$ (*fig.* 5.): donc, &c.

II°. Dans l'ellipſe, & dans l'hyperbole la ſous-perpendiculaire (*fig.* 12 & 14.) eſt PE $= \frac{px}{2a}$: donc PE : $\frac{1}{2}p$ :: $x$ : $a$. Or $x$ eſt toujours plus petit que $a$ dans l'ellipſe, & eſt plus grand que $a$ dans l'hyperbole: donc PE $< \frac{1}{2}p$ dans l'ellipſe, & $> \frac{1}{2}p$ dans l'hyperbole.

## THÉORÊME V.

1063. *Le quarré du petit demi-axe dans une Section conique eſt égal au Rectangle de deux Perpendiculaires ſur la tangente, l'une menée d'un point de l'axe au point de contingence,* (& qui eſt par conſéquent *Normale,*) *l'autre menée du centre de la courbe à la tangente; c'eſt-à-dire, que l'on aura* $bb =$ EM $\times$ CN (fig. 16.).

DÉMONST. I°. Dans l'ellipſe prolongez le petit demi-axe CB juſqu'à la rencontre de la tangente, menez l'ordonnée MP au grand axe, & l'ordonnée MG au petit axe, on aura les triangles PME, NCD, ſemblables: donc on aura PM, ou CG : ME :: NC : CD: donc ME $\times$ CN $=$ CG $\times$ CD $= \overline{CB}^2 = bb$; car nous

avons prouvé (1001.) que $CG \times CD = \overline{CB}^2$, à cauſe de CG : CB :: CB : CD.

II°. Dans la parabole la ligne CN eſt infinie, à cauſe du centre infiniment éloigné du ſommet; d'où il ſuit que dans la parabole on a $bb = EM \times \infty = \infty$, ou que le quarré du petit axe, & par conſéquent le petit axe lui même, eſt infini.

III°. Dans le cercle la ligne EM n'eſt pas diſtinguée de CN, parce que dans le cercle toute ligne perpendiculaire ſur la tangente au point de contingence, paſſe par le centre, ou eſt rayon : donc dans le cercle on aura $EM = CN = a$, & par conſéquent $bb = EM \times CN = \overline{CN}^2 = aa$; c'eſt-à-dire, que dans le cercle le petit axe eſt égal au grand axe, ou que tous les axes ſont égaux.

VI°. Dans l'hyperbole on aura, comme dans l'ellipſe, $EM \times CN = CG \times CD = \overline{CB}^2 = bb$, avec cette différence que dans l'hyperbole le centre C, & par conſéquent la perpendiculaire CN ſe trouvant au-deſſus du ſommet (*fig.* 13.), la valeur de CD ſe trouve être pour l'hyperbole $CD = GD - CG$, au lieu qu'elle eſt pour l'ellipſe $CD = GD + CG$.

## THÉORÊME VI.

1064. *Le Quarré du petit demi-axe dans une Section conique eſt égal au Rectangle de deux perpendiculaires élevées des deux extrêmités du grand Axe, juſqu'à la rencontre de la Tangente; c'eſt-à-dire, que l'on a* $bb = AO \times aR$ (fig. 16.).

DÉMONST. I°. Dans l'ellipſe les deux triangles ſemblables TAO, TPM, donnent la proportion TA : AO :: TP : PM. Pareillement les deux triangles ſemblales T*a*R, TCD donnent la proportion T*a* : *a*R :: CT : CD. Multipliant ces deux proportions par ordre, on a $TA \times Ta : AO \times aR$ :: PT × CT : PM ou CG × CD. Si dans cette proportion les antécédens ſont égaux, les conſéquens le ſe-

ront auſſi. Or l'on a TA × T$a$ = TP × CT, car (999.) TA = $\frac{aa-ax}{x}$, T$a$ = $\frac{aa-ax}{x}+2a=\frac{aa-ax+2ax}{x}=\frac{aa+ax}{x}$ : donc TA × T$a$ = $\frac{aa-ax}{x}\times\frac{aa+ax}{x}=\frac{a^4-a^3x+a^3x-aaxx}{xx}=\frac{a^4-aaxx}{xx}$. Maintenant (998.) PT = $\frac{aa-xx}{x}$, & (999.) CT = $\frac{aa}{x}$ : donc PT × CT = $\frac{aa-xx}{x}\times\frac{aa}{x}=\frac{a^4-aaxx}{xx}$ : donc PT × CT = TA × T$a$ : donc auſſi AO × $a$R = CD × CG = $bb$ (1001.).

II°. Dans le cercle, comme dans l'ellipſe, on trouvera AO × $a$R = CD × CG = $bb$ ; mais dans le cercle $bb = aa$, & par conſéquent AO × $a$R = $aa$.

III°. Dans la parabole la ligne $a$R eſt infinie à cauſe du ſecond ſommet $a$ infiniment éloigné, & par conſéquent on aura AO × $a$R = $bb = \infty$ ; c'eſt-à-dire, qu'on ne pourra pas déterminer la valeur du rectangle AO × $a$R, ni du quarré du petit axe, l'un & l'autre étant infini.

IV°. Dans l'hyperbole on démontrera, comme dans l'ellipſe, que AO × $a$R = CD × CG = $bb$, en obſervant de changer les + en —, & les — en + dans les valeurs que les lignes TA, T$a$ & TP, CT avoient dans la démonſtration pour l'ellipſe.

## THÉORÊME VII.

1065. *Le Quarré du petit demi-axe dans une Section conique eſt égal au Rectangle de deux Perpendiculaires, menées des foyers ſur la tangente ; c'eſt-à-dire, l'on a* $bb$ = Fl × $f$H (fig. 16.).

DÉMONST. I°. Dans l'ellipſe, les deux triangles ſemblables TFl, TEM donnent la proportion TF : Fl :: TE : EM. Pareillement les deux triangles ſem-

blables $Tf$H, TCN donnent la proportion $Tf : f$H :: TC : CN. Multipliant par ordre les deux proportions, l'on aura TF × $Tf$ : FI × $f$H :: TE × TC : EM × CN ; ſi les antécédens ſont égaux, les conſéquens le ſeront auſſi. Or l'on a TF × $Tf$ = TE × TC : car TF = CT — CF = $\frac{aa}{x} - c = \frac{aa - cx}{x}$ ; & $Tf$ = CT + C$f$ = $\frac{aa}{x} + c = \frac{aa + cx}{x}$ : donc TF × $Tf$ = $\frac{aa - cx}{x} + \frac{aa + cx}{x} = \frac{a^4 - ccxx}{xx}$.

Pareillement TE = PT + PE = $\frac{aa - xx}{x} + \frac{bbx}{xx}$ (997 & 1001.), & CT = $\frac{aa}{x}$ (999.) : donc TE × CT = $\frac{aa - xx}{x} + \frac{bbx}{aa} \times \frac{aa}{x} = \frac{a^4 - aaxx}{xx} + \frac{aabbx}{aax} = \frac{a^4 - aaxx}{xx} + bb = \frac{a^4 - aaxx + bbxx}{xx}$. Or ( 987. ) $bb = aa - cc$ : donc ſubſtituant, on aura TE × CT = $\frac{a^4 - aaxx + aaxx - ccxx}{xx} = \frac{a^4 - ccxx}{xx}$ : donc TE × TC = TF × $Tf$ ; & par conſéquent FI × $f$H = EM × CN = $bb$.

II°. Dans le cercle les deux foyers F, $f$ ſe trouvant réunis en un même point C, qui eſt le centre du cercle, on aura FI = $f$H = $a$ ; & par conſéquent FI × $f$H = $\overline{FI}^2 = aa = bb$.

III°. Dans la parabole la ligne $f$H eſt infinie à cauſe du ſecond foyer $f$ infiniment éloigné, d'où il arrive, comme ci-deſſus, qu'on ne peut pas déterminer la valeur du rectangle FI × $f$H, ni du quarré $bb$ dans la parabole.

IV°. Dans l'hyperbole on démontrera, comme dans l'ellipſe, que le rectangle FI × $f$H = EM × CN = $bb$, en obſervant de changer les + en — & les — en +, dans les valeurs que les lignes TF, $Tf$,

& TE, TC avoient dans la démonſtration pour l'ellipſe.

*Corollaire.*

1066. Nous avons donc pluſieurs valeurs de $bb$, ou du quarré du petit demi-axe dans une ſection conique ; ſçavoir,

I°. L'on a $bb = \frac{ap}{2}$, parce que le paramétre $p = \frac{2bb}{a}$.

II°. L'on a $bb = aa - cc$, parce que le petit demi-axe eſt moyen proportionnel entre les diſtances d'un des foyers aux deux ſommets.

III°. L'on a (*fig.* 16.) $bb = EM \times CN$, parce que le quarré du petit demi-axe eſt égal au produit de deux perpendiculaires menées ſur la tangente, l'une du centre, l'autre d'un point de l'axe au point de contingence.

IV°. L'on a $bb = aR \times AO$, parce que le quarré du petit demi-axe eſt égal au produit de deux lignes menées de la tangente perpendiculairement aux extrêmités du grand axe.

V°. Enfin l'on a $bb = FI \times fH$, comme nous venons de le prouver.

## THÉORÊME VIII.

1067. *Les Perpendiculaires menées du foyer ſur les tangentes aux différens points de la Courbe, croiſſent dans la Parabole, ſuivant la progreſſion des Racines des rayons vecteurs ; dans l'Ellipſe, elle croiſſent dans une plus grande raiſon; dans l'Hyperbole, elles croiſſent dans une moindre raiſon.*

DÉMONST. I. Partie. Dans la parabole (*fig.* 5.) nous avons prouvé (969.) que $\overline{FB}^2 = FM$ : donc $FB = \sqrt{FM}$.

DÉMONST. II. Partie. Dans l'ellipſe (*fig.* 8.) les triangles ſemblables FMT ; $f$NT donnent la

proportion FT : FM :: $fT$ : $fN$ ; donc $fN = \frac{FM \times fT}{FT}$ ; & multipliant par FM, on aura $fN \times FM = \frac{\overline{FM}^2 \times fT}{FT}$. Or (1065.) $fN \times FM = bb$ : donc $bb = \frac{\overline{FM}^2 \times fT}{FT}$, & $\overline{FM}^2 = \frac{bb \times FT}{fT}$ ; & puiſque $bb$ eſt une quantité conſtante, on aura $\overline{FM}^2 = \frac{FT}{fT}$, & par conſéquent ſi $fT$ étoit une quantité conſtante, ou ſi l'on avoit $\overline{FM}^2 = \frac{FT}{1}$, alors $\overline{FM}^2$ ſeroit dans le rapport conſtant du rayon vecteur FT.

Mais $fT$ diminue, lorſque FT augmente ; parce que dans l'ellipſe la ſomme des rayons vecteurs eſt toujours égale au grand axe : donc la raiſon $\frac{FT}{Tf} >$ FT : donc $\overline{FM}^2$ croît en plus grande raiſon que FT, & FM en plus grande raiſon que $\sqrt{FT}$.

Demonst. III. Partie. Dans l'hyperbole par la même raiſon $\overline{FM}^2$ croîtroit dans la même proportion que FT, ſi $fT$ étoit une grandeur conſtante, ou ſi l'on avoit $\overline{FM}^2 = \frac{FT}{1}$ ; mais dans l'hyperbole $fT$ croît en même tems que FT ; parce que dans l'hyperbole la différence des rayons vecteurs eſt toujours égale au grand axe ; donc l'un ne peut augmenter, ſans que l'autre augmente de la même quantité : donc la raiſon $\frac{FT}{fT} < \frac{FT}{1}$, & par conſéquent $\overline{FM}^2$ croît en moindre raiſon que FT, & FM en moindre raiſon que $\sqrt{FT}$.

## Théorême IX.

1068. *Dans l'Ellipſe & dans l'Hyperbole la Portion* SM *du rayon vecteur, compriſe entre la tangente* MT, *& le diamétre* Hh *parallele à la tangente, eſt toujours*

*égale au grand Demi-axe, ou* SM = a (*fig.* 12. & 14.).

DÉMONST. I°. Dans l'ellipſe (*fig.* 12.) à cauſe des triangles ſemblables *f*SC, *f*MT, on a *f*T : CT :: *f*M : SM. Or $fT = CT + Cf = \frac{aa}{x} + c = \frac{aa+cx}{x}$; mais FM le plus petit des rayons vecteurs eſt (996.) $= \frac{aa-cx}{a} = a - \frac{cx}{a}$. Or la quantité *a* eſt la demi-ſomme des rayons vecteurs (982.) : donc $\frac{cx}{a}$ en eſt la demi-différence : donc *f*M le plus grand des rayons vecteurs eſt $= a + \frac{cx}{a} = \frac{aa+cx}{a}$ : donc ſubſtituant, la proportion deviendra $\frac{aa+cx}{x} : \frac{aa}{x} :: \frac{aa+cx}{a} : SM$ : donc $SM = \frac{a^4x + aacxx}{a^3x + acxx} = a$.

II°. Dans l'hyperbole (*fig.* 14.) l'on a auſſi les triangles ſemblables *f*CS, *f*TM qui donnent *f*T CT :: *f*M : SM. Or $fT = CT + Cf = \frac{aa}{x} + c$ (1065.) $= \frac{aa+cx}{x}$. Mais FM le plus petit des rayons vecteurs eſt (1017.) $= \frac{cx-aa}{a} = \frac{cx}{a} - a$. Or la quantité *a* eſt la demi-différence des rayons vecteurs (1008.) ; donc $\frac{cx}{a}$ en eſt la demi - ſomme : donc *f*M le plus grand des rayons vecteurs eſt $= \frac{cx}{a} + a = \frac{cx+aa}{a}$, ou $\frac{aa+cx}{a}$ : donc ſubſtituant, la proportion deviendra $\frac{aa+cx}{x} : \frac{aa}{x} :: \frac{aa+cx}{a} : SM$, donc on aura $SM = \frac{a^4x + aacxx}{a^3x + acxx} = a$.

## THÉORÊME X.

1069. *Dans l'Ellipſe & dans l'Hyperbole les rectangles faits ſous les Axes, ſont égaux aux Parallélogrammes faits ſous les diamétres conjugués.*

DEMONST. I. Partie. Dans l'ellipſe (*fig.* 18.) joignez les points M, S; par le point M menez IP parallele au grand axe, & par le point S menez RT, parallele au diamétre conjugué. Cela poſé,

I°. Le triangle CSM eſt la moitié du parallélogramme CTRM, parce qu'il a même baſe CM, & eſt compris entre les mêmes paralleles que le parallélogramme. Pareillement ce même triangle CMS eſt, par la même raiſon, la moitié du parallélogramme CSIP: donc CTRM = CSIP.

II°. Les trois parallélogrammes COVB, CNAM, CTRM, qui ſont compris entre les mêmes paralleles CO, AB, ſont entr'eux comme leurs baſes CO, CN, CT, qui ſont en proportion continue, comme nous l'avons dit (999.) ∴ CO : CN : CT.

III°. Pareillement les trois parallélogrammes COVB, CSDL, CSIP, qui ſont entre mêmes paralleles, ſont entr'eux comme leurs baſes CB, CL, CP, qui ſont en proportion continue (1001.) ∴ CB : CL : CP : donc on a ∴ COVB : CNAM : CTRM, & ∴ COVB : CSDL : CSIP. Or le parallélogramme CTRM = CSIP: donc, puiſque dans ces deux progreſſions les deux extrêmes d'une part ſont égaux aux deux extrêmes de l'autre, les moyens ſont auſſi égaux, c'eſt-à-dire, l'on aura CNAM = CSDL, dont l'un eſt le parallélogramme fait ſous les demi-diamétres conjugués, & l'autre eſt le rectangle fait ſous les demi-axes.

DEMONST. II. Partie. Dans l'hyperbole (*fig.* 19.) ayant joint les points S, M; par le point S menez SO parallele au diamétre conjugué, & par le point M menez BV parallele au grand axe: de plus menez

PI, & prolongez SA juſqu'en N ; CL juſqu'en B, & CT juſqu'en V. Cela poſé,

I°. On aura par la même raiſon que pour l'ellipſe ∴ CP : CL : CB, & par conſéquent

∴ CSP : CSDL : CSAB.

l'on aura auſſi ∴ CI : CT : CV, donc

∴ CINP : CTRM : CVOM.

II°. Mais l'on a CINP=CSP, parce que ces deux parallélogrammes ont même baſe CP, & ſont compris entre mêmes paralleles : pareillement CVOM =CSAB ; car CVOM = CSVM, parce qu'ils ont même baſe CM & ſont compris entre les mêmes paralleles CM, SO : mais CSVM = CSAB, parce qu'ils ſont chacun doubles du triangle CSM ; donc CVOM = CSAB, & par conſéquent par la même raiſon que pour l'ellipſe, l'on aura CTRM=CSDL ; dont l'un eſt le rectangle fait ſous les demi-diamétres, & l'autre eſt le rectangle fait ſous les demi-axes.

*Corollaire.*

1070. C'eſt pourquoi ſi l'on fait CS = $a$, CL = $b$, CN = $g$, & MC = $n$, on aura $ab = gn$.

THÉORÊME XI.

1071. *Dans l'Ellipſe & dans l'Hyperbole le Rayon de courbure, en un point quelconque* M, *eſt égal au quarré du diamétre conjugue* Hh, *diviſé par la perpendiculaire* MR *menée du point* M *ſur ce diamétre conjugué* (fig. 27.).

DÉMONST. Le rayon de courbure en un point quelconque M d'une courbe, eſt, comme nous l'avons dit (953.) le rayon d'un cercle (que l'on nomme *oſculateur*) qui paſſeroit par ce point M, & dont la courbure ſe confondroit avec la courbure de cette courbe au point M. Soit donc dans l'ellipſe le premier diamétre MG = $2g$, le diamétre conjugué H$h$ = $2h$, la perpendiculaire MR = $n$, l'or-

donnée $mI$ au diamétre $= y$, l'abſciſſe $MI = x$.

I°. Suppoſez que le point K pris ſur le diamétre MG ſoit un point de la circonférence, qui paſſe par les trois points infiniment proches $m$, M, O, & l'on aura par la propriété du cercle (536.) $mI \times IO = MI \times IK$, ou $y \times IO = x \times IK$, ou parce que $mI = IO$, à cauſe des points $m$, M, O infiniment proches, $y^2 = x \times IK$.

II°. Par la propriété des diamétres d'une ſection conique (1005.) l'on a $y^2 : 2gx :: hh : gg$; donc $x \times IK : 2gx :: hh : gg$, & parce que $IK = MK$, à cauſe de MI infiniment petit, on aura $x \times MK : 2gx :: hh : gg$, ou $MK : 2g :: hh : gg$: donc $MK = \frac{2hh}{g}$.

III°. Soit maintenant MN le diamétre du cercle oſculateur, ou du cercle dont la circonférence paſſe par les points infiniment proches $m$, M, O; ayant mené la corde NK, le triangle MKN eſt ſemblable au triangle MCR, à cauſe de l'angle commun CMR, & des angles droits en R & K: donc on a $MR : MC :: MK : MN$, ou algébriquement $n : g :: \frac{2hh}{g} : 2r$: donc $2r = \frac{2ghh}{gn} = \frac{2hh}{n}$; & $r = \frac{hh}{n}$ ce qu'il falloit prouver.

La démonſtration peut s'appliquer à l'hyperbole, en y menant, comme dans l'ellipſe, des lignes de conſtruction, & en leur donnant la poſition & les autres déterminations qu'exige la nature de l'hyperbole.

*Corollaire I.*

1072. Nous avons prouvé (1069.) que $hn = ab$: donc $n = \frac{ab}{h}$: donc ſubſtituant cette valeur de $n$ dans l'expreſſion $r = \frac{hh}{n}$, elle deviendra $r = \frac{h^3}{ab}$; c'eſt-à-dire, que le rayon de courbure eſt égal au cube du diamétre conjugué diviſé par le produit des deux demi-axes.

*Corollaire II.*

1073. Puiſque $n = \frac{ab}{h}$, donc $nn = \frac{aabb}{hh}$. Or ayant mené du centre C la perpendiculaire CE ſur la tangente, & ayant déjà la normale SM ($m$), nous aurons (1063.) $bb = CE \times SM = MR \times SM = nm$; donc $nn = \frac{aanm}{hh}$ & $hh = \frac{aam}{n}$ : donc ſubſtituant dans l'équation $r = \frac{hh}{n}$ à la place de $hh$, ſa valeur, elle deviendra $r = \frac{aam}{nn}$.

Mais de plus $\frac{ap}{2} = bb$ (1066.) $= nm$ : donc $nm = \frac{ap}{2}$, & $n = \frac{ap}{2m}$, & $nn = \frac{aapp}{4mm}$ : donc ſubſtituant cette valeur de $nn$ dans l'équation $r = \frac{aam}{nn}$, elle deviendra $r = \frac{4aam^3}{aapp} = \frac{4m^3}{pp} = \frac{m^3}{\frac{1}{4}pp}$; c'eſt-à-dire, que le rayon de courbure eſt égal au cube de la normale diviſé par le quart du quarré du paramétre.

## ARTICLE IV.

*Des Sections coniques comparées dans leurs meſures.*

La meſure des ſections coniques, & en général de toutes les lignes courbes, eſt de trois eſpeces, la *Rectification*, la *Quadrature*, & la *Cubature*. La rectification eſt la meſure de la ligne courbe elle-même. La quadrature eſt la meſure de la ſurface, ou de l'aire compriſe ſous la ligne courbe. La cubature eſt la meſure du ſolide que l'on concevroit décrit par la révolution de la ſurface terminée par une ligne courbe, laquelle tourneroit autour de ſon axe.

PROBLÊME.

## PROBLÊME I.

1074. *Trouver la Quadrature de la Parabole, ou mesurer la surface* AMMP, *comprise entre l'ordonnée, l'abscisse & la Parabole elle-même* (fig. 9.).

SOLUT. La surface de la parabole est égale à la somme de toutes les ordonnées MP, MP, &c. lesquelles croissent comme les racines quarrées, ou en raison sous doublée des abscisses. Or les abscisses AP, AP, &c. croïssent comme les nombres naturels $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots \infty$ : donc les ordonnées seront comme $\sqrt{1} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{4} \cdots \sqrt{\infty}$, ou (137.) comme les puissances fractionnaires $1^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{1}{2}} \cdots \infty^{\frac{1}{2}}$. Or nous avons prouvé (259.) que la somme des puissances quelconques $m$ des nombres consécutifs $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots \infty$ étoit $S = \frac{\infty^{m+1}}{m+1}$ : donc la somme des termes $1^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{1}{2}} \cdots \infty^{\frac{1}{2}}$ sera $S = \frac{\infty^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{\infty^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\infty^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\infty^{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\infty \times \infty^{\frac{1}{2}}$; & parce que la derniere abscisse $x = \infty$, & que l'ordonnée $y = \infty^{\frac{1}{2}}$, on aura $S = \frac{2}{3}xy$, c'est à-dire, que la surface de la parabole est égale aux $\frac{2}{3}$ du produit de l'abscisse par l'ordonnée, ou aux deux tiers du parallélogramme APMN circonscrit à la parabole.

## PROBLÊME II.

1075. *Trouver la Cubature du* Paraboloïde, *ou mesurer le solide que l'on conçoit décrit par la révolution d'une Parabole autour de son Axe* (fig. 9.).

SOLUT. Si l'on suppose que la parabole AMMP fasse avec le rectangle ANMP une révolution autour de l'axe AP, les ordonnées de la parabole décriront des surfaces de cercles, dont la somme donnera la cubature, ou la solidité du *paraboloïde*; & les or-

données du rectangle décriront des surfaces de cercles, dont la somme donnera la cubature ou la solidité du cylindre circonscrit au paraboloïde. Or les cercles dont la somme donne le paraboloïde, ayant pour rayons les ordonnées de la parabole, sont entr'eux comme les quarrés de ces ordonnées; les quarrés de ces ordonnées sont (957.) comme les abscisses, & les abscisses sont comme les nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5 .... ∞; donc la somme de tous ces cercles, ou la solidité du paraboloïde sera représentée par la somme des termes 1 · 2 · 5 · 4 · 5 .... ∞, laquelle est (256.) $= \frac{\infty^2}{2}$. Mais les cercles dont la somme donne la solidité du cylindre étant tous uniformes & égaux chacun au cercle décrit par la derniere ordonnée MP, seront représentés par les termes de la série uniforme ∞ · ∞ · ∞ · ∞ · ∞ .... ∞ : dont la somme est $\infty^2$ : donc la solidité du paraboloïde est à celle du cylindre circonscrit, ou $P : C :: \frac{\infty^2}{2} : \infty :: \frac{1}{2} : 1 :: 1 : 2$; c'est-à-dire, que le paraboloïde est la moitié du cylindre circonscrit.

## PROBLÊME III.

1076. *Chercher la Quadrature, ou la Mesure de la surface de l'Ellipse.*

SOLUT. Nous avons prouvé que la surface de l'ellipse est égale à celle d'un cercle, dont le diamétre seroit moyen proportionnel entre les deux axes de l'ellipse: donc si l'on pouvoit *quarrer*, ou mesurer la surface de ce cercle, on auroit la mesure de la surface de l'ellipse. Mais nous avons vu (597.) que l'on ne pouvoit pas mesurer géométriquement la surface du cercle, & par conséquent on ne peut pas avoir la quadrature *absolue*, mais seulement *hypothétique* de l'ellipse.

PROBLÊME IV.

1077. *Trouver la Cubature de l'*Ellipſoïde, *ou meſurer le Solide décrit par la révolution d'une Ellipſe autour de ſon Axe* (fig. 26.).

SOLUT. Si l'on ſuppoſe qu'un demi-cercle & une demi-ellipſe décrits ſur un même axe $Aa$ faſſent l'un & l'autre une révolution autour de cet axe, les ordonnées de l'ellipſe décriront des cercles, dont la ſomme (E) donnera l'*ellipſoïde*, & les ordonnées du demi-cercle décriront des cercles, dont la ſomme (S) donnera une ſphere circonſcrite à l'ellipſe. Or déſignant par $y$ & $x$ les ordonnées de l'ellipſe & du cercle, nous avons (990.) $y : x :: b : a$, & $y^2 : x^2 :: bb : aa$. Mais les cercles décrits par les ordonnées correſpondantes de l'ellipſe & du cercle ſont entr'eux comme les quarrés $y^2$, $x^2$, de ces ordonnées : donc ils ſont auſſi comme le quarré du petit axe eſt au quarré du grand axe, ou comme $bb : aa$, & par conſéquent la ſomme des cercles décrits par les ordonnées de l'ellipſe eſt à la ſomme des cercles décrits par les ordonnées du demi-cercle, ou $E : S :: bb : aa$. Maintenant ſi l'on conçoit des cylindres circonſcrits, l'un (A) à l'ellipſe, & l'autre (B) au cercle ; ces cylindres ayant même hauteur, ſeront entr'eux comme leurs baſes qui ſont des cercles décrits, l'un par le petit axe, l'autre par le grand axe de l'ellipſe : donc ils ſeront entr'eux comme le quarré du petit axe eſt au quarré du grand axe, ou $A : B :: bb : aa$ : donc on aura $E : S :: bb : aa :: A : B$, & par conſéquent $E : S :: A : B$. Or la ſphere eſt les $\frac{2}{3}$ du cylindre circonſcrit, ou $S = \frac{2}{3} B$ : donc on aura $E = \frac{2}{3} A$ ; c'eſt-à-dire, que l'ellipſoïde eſt les deux tiers du cylindre circonſcrit.

PROBLÊME V.

1078. *Chercher la Quadrature de l'Hyperbole rapportée à ſon Axe* (fig. 17.).

Solut. Si du trapeze EAPK on retranche l'eſpace aſymptotique EAMK, le reſte donnera la ſurface de l'hyperbole, ou de la portion hyperbolique MAP. Or la ſurface du trapeze eſt égale à la ſomme de ſes ordonnées, & la premiere EA qui eſt égale au petit demi axe (1025.) étant ſuppoſée = 1, toutes les ordonnées du trapeze ſeront repréſentées par la ſuite des nombres naturels 1 · 2 · 3 · 4 · 5, &c. Pareillement la ſurface de la portion aſymptotique EAMK eſt égale à la ſomme de ſes ordonnées, leſquelles ſont repréſentées (1029.) par la ſuite $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$, &c. donc ſi de la premiere ſuite on retranche la ſeconde, terme par terme, on aura la différence $0 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 3 + \frac{1}{4} \cdot 4 + \frac{4}{5}$, &c. laquelle repréſente la ſurface de l'hyperbole: donc ſi l'on pouvoit évaluer la ſomme des termes $0 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 3 + \frac{1}{4} \cdot 4 + \frac{4}{5}$, &c. on auroit la ſurface de l'hyperbole rapportée à ſon axe.

## Problême VI.

1079. *Chercher la Quadrature de l'Hyperbole rapportée à ſon* Aſymptote, *ou quarrer l'eſpace aſymptotique* EAMK (fig. 17.).

Solut. L'eſpace *aſymptotique* EAMK eſt égal à la ſomme de ſes ordonnées, leſquelles ſont (1029.) comme les nombres $\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5}$, &c. dont on ne peut évaluer la ſomme, & par cette raiſon on ne peut point quarrer l'eſpace aſymptotique de l'hyperbole.

FIN.

C10841

# TABLE RAISONNÉE

## ET MÉTHODIQUE

*Des Matieres contenues dans ce Volume.*


*DES Mathématiques en général.*

*Leur nature*, { Science de la grandeur, page 1
Art de mesurer la grandeur, ibid.

*Leur objet*, { Quantité discréte ou numérique, ibid.
Quantité continue ou géométrique, 2

*Leur fin*, { Connoissance de la mesure, ibid.
Usage de la mesure, ibid.

*Leurs espéces*, { Mathém. mixtes, { Méchaniq. ibid.
Astronomie, ibid.
Optique, &c. ibid.
Mathém. pures, { Le Calcul, ibid.
La Géomét. ibid.

LIVRE PREMIER.

*Des Principes du Calcul.*

*Ses élémens*, { Combinaison des quantités, ou Calcul proprement dit, 5

*Ses progrès*, { Combinaison des Rapports ou Analogie, proportion, ibid.

SECTION I.

*Calcul simple des Quantités, ou Calcul proprement dit.*

*Sa nature*, { Combin. des quantités homogènes, 5
Addition & soustraction, 6

*Son objet*, { Quant. déterminées ou numériq. ibid.
Quant. indéterminées ou algébriq. ibid.

*Ses espéces*, { Arithmét. ou Calcul des nombres, 6
Algébre, ou Calcul des lettres, *ibid.*

## ÉLEMENS D'ARITHMÉTIQUE.

### CHAP. I. *Du Calcul des Nombres, ou de l'Arithmétique.*

*Son objet*, { Nombres entiers, 7
Nombres fractionnaires, *ibid.*

*Les chiffres*, { Expreſſion des nombres, 6
Leur valeur, 8
Art de les combiner, *ibid.*
Maniere de les énoncer, 8 & 11

#### ART. I. *Des Opérations ſur les Nombres entiers.*

*Qui ſont* { L'addition & la ſouſtraction, 12
La multiplication & la diviſion, *ibid.*
L'exaltation & l'extraction, *ibid.*

#### Paragraphe I. *De l'Addition & de la Souſtraction.*

*Quantités données*, { Les parties d'un Tout, 12
Le Tout & une de ſes parties, *ibid.*

*Opérations*, { Addition, 13
Souſtraction, 14

*Réſultat*, { Somme, 12
Différence, *ibid.*

#### Paragraphe II. *De la Multiplication & de la Diviſion.*

*Quantités données*, { Multiplicande & multiplicateur, 17
Dividende & diviſeur, 24 & 25

*Opérations*, { Multiplication, 18, &c.
Diviſion, 25, &c.

*Réſultat*, { Produit, 18, &c.
Quotient, 26, &c.

*Uſage*, pour trouver { les facteurs ou diviſeurs, 35
les nombres premiers, 36
les diviſeurs communs, 36
le plus grand commun diviſeur, *ibid.*

#### Paragraphe III. *De l'Exaltation & de l'Extraction.*

*Quantités données*, { La racine, 37
La puiſſance, 38

*Opérations*, { Exaltation, 38
Extraction, 39, &c.

*Réſultat*, { La puiſſance, 31
La racine, 39

ART. II. *Des Opérations ſur les Fractions.*

*Leur notion*, { Leur point de vue, 40 & 41
Leur nature, *ibid.*
*Leur diviſion*, { En général, *ibid.*
Dans leurs eſpéces, *ibid.*

Paragraphe I. *Des fractions conſidérées en général.*

*Leurs termes*, { Numérateur, 41
Dénominateur, *ibid.*
*Leur valeur*, { Raiſon directe des numérateurs, 43
Raiſon réciproque des dénomin. *ibid.*
*Leurs eſpéces*, { Fractions ſimples, *ibid.*
Fractions de fractions, 47
*Leur préparation*, { Transformation, 43
Réduction, 44
*Leur calcul*, { Addition & ſouſtraction, 46
Multiplication & diviſion, 47 & 48
Exaltation & extraction, 49

Paragraphe II. *Des Fractions conſidérées dans leurs eſpéces.*

*Leur nature*, { Parties d'une même meſure, 50
Dénominateur commun, 51
Parties de différentes meſures, 50
Dénominateur différent, *ibid.*
*Leur expreſſion naturelle*, { Celle des raiſons géométriques, *ibid.*
Numérateur, dénominateur, *ibid.*
*Leur expreſſion uſuelle*, { Celle des nombres entiers, 51
Dénominateur ſous-entendu, *ibid.*
*Leur calcul*, { Addition & Souſtraction, 51 & 52
Multiplication & diviſion, 52 & 53

## ÉLEMENS D'ALGEBRE.

CHAP. II. *Du Calcul des Lettres, ou de l'Algébre.*

*Les Lettres*, { Symbole arbitraire, 57
Symbole indéterminé, *ibid.*
*Les Signes*, { Abrégent l'expreſſion, 58
Facilitent la combinaiſon, *ibid.*
*Les Termes*, { Poſitifs, négatifs, *ibid.*
Semblables, diſſemblables, 59
*Les Quantités*, { Incomplexes ou monomes, 58
Complexes ou polynomes, *ibid.*

ART. I. *De l'Addition & de la Souſtraction algébrique.*

*Opération*, { Sur les termes, 61 & 62
Sur les ſignes, *ibid.*

*Simplification*, { Réduction des termes ſemblables, *ibid.*
Expreſſion abrégée, *ibid.*
Origine des coefficiens, 63
Fonctions des coefficiens, *ibid.*

*Réſultat*, { Sommes ou différences indiquées, 61 & 62
Sommes ou différences réduites, 63, &c.

ART. II. *De la Multiplication & de la Diviſion algébrique.*

*Opérations*, { Regle pour les lettres, 64 & 68
Regle pour les coefficiens, 65 & 68
Regle pour les ſignes, 66 & 69

*Simplification*, { Origine des expoſans, 65
Fonctions des expoſans, *ibid.*
Regle pour les expoſans, 66 & 68

*Réſultat*, { Produit ou quot. des lettres, 64 & 68
Produit ou quot. des coefficiens, 65 & 68
Somme ou différ. des expoſans, 66 & 68

ART. III. *De l'Exaltation & de l'Extract. algébriques.*

*Des Quantités*, { Incomplexes, 73
Complexes, 81

*Pour en trouver* { Les puiſſances, 73 & 81
Les racines, 74 & 87,

Paragraphe I. *De l'Exaltation & de l'Extraction des Quantités incomplexes.*

*Regle*, { Multiplication de l'expoſant, 73, &c.
Diviſion de l'expoſant, 74, &c.

*Les Puiſſances*, { Expoſans entiers, 73
Expoſans fractionnaires, 75
Expoſans négatifs, 76

*Les Radicaux*, { Origine des radicaux, 77
Expreſſion des radicaux, *ibid.*
Transformation des radicaux, 78, &c.
Calcul des radicaux, 80

Paragraphe II. *De l'Exaltation & de l'Extraction des Quantités complexes.*

*Regle générale*, { pour indiquer la puiſſance, 81
pour former la puiſſance, 82

*Regle particuliere*, { Immédiate, *ibid.* &c. ; Expéditive, *ibid.* ; Généraliſée, *ibid.* &c. ; Formules, 85, &c.
*Formation des Puiſſances*, { Le nombre des termes, 82 ; Les ſignes des termes, 84 ; Les expoſans des lettres, 85 ; Les coefficiens des termes, 86
*Extraction des Racines*, { pour les quantités algébriques, 87, &c. ; pour les quantités numériques, 93, &c.

## SECTION II.

### *Du Calcul des Rapports des Quantités, ou de l'Analogie & des Proportions.*

*Rapport*, { des termes connus avec des termes connus, 105 ; des termes connus avec des termes inconnus, *ibid.*
*Calcul*, { Analogie ou proportion, *ibid.* ; Calcul analytique ou analyſe, *ibid.*

### CHAP. I. *De l'Analogie & des Proportions.*

*Objet de ce calcul*, { Raiſons, 106 ; Proportions, 111 ; Progreſſions, 120 ; Progreſſions infinies, 132

#### ART. I. *Des Raiſons.*

*Leur nature*, { Maniere d'être d'une grandeur à une autre, 106 ; Comparaiſon d'une grandeur avec une autre, *ibid.*
*Leurs termes*, { Antécédens, *ibid.* ; Conſéquens, *ibid.*
*Leurs eſpèces*, { Arithmétique & géométrique, *ibid.* ; Simple & compoſée, 107, &c. ; Directe & réciproque, 108
*Leur expreſſion*, { ordinaire, $a.b$ / $a:b$, 106 ; générale, $a.a \pm d$, 111 / $a:ap$, 113

*Leur valeur*, { Différence, 106 ; Quotient, *ibid.*

## ART. II. *Des Proportions.*

*Leur nature*, { Egalité de deux raiſons, ou Egalité de deux fractions, 111

*Leurs termes*, { Deux extrêmes, Deux moyens, *ibid.* ou Deux antécédens, Deux conſéquens, *ibid.*

*Leurs eſpéces*, { Arithmétique, *ibid.* ; Geométriqne, *ibid.* ; Proportion ordinaire, 112 & 114 ; Proportion continue, 112 & 115

*Leur expreſſion*, { ordinaire, { $a \cdot b :: c \cdot f$, 112 ; $a : b :: c : f$, 114 ; générale, { $a \cdot a \pm d :: c \cdot c \pm d$, 112 ; $a : ap :: c : cp$, 114

*Leurs propriétés*, { $a + f = b + c$, 112 ; $af = bc$, 114

*Leurs combinaiſons*, { *alternando*, *invertendo*, 115, &c. *permutando*, &c.

*Les conſéquences*, { pour les produits, 116, &c. ; pour les quotiens, *ibid.* ; pour les puiſſances, 117 ; pour les racines, *ibid.*

*L'uſage*, { Regle de trois arithmétique, 113 ; Regle de trois géométrique, 119

## ART. III. *Des Progreſſions.*

*Leur dérivation*, { Raiſon, 120 ; Proportion, *ibid.* ; Proportionnalité, *ibid.* ; Progreſſion, *ibid.*

*Leurs eſpéces*, { Arithmétique, *ibid.* ; Géométrique, *ibid.*

*Leur évaluation*, { pour un terme quelconque, 121 & 125 ; pour la différence, 123 ; pour le nombre des termes, 124 ; pour la ſomme des termes, 122 & 127

ART. IV. *Des Progressions infinies.*


*Principes*, Ordre des infinis, 132, &c.
Ordre des finis, 133
Ordre des infiniment petits, 132, &c.
*Progression arith.* Nouvelle formule, 134, &c.
Nouvel usage, 135, &c.
*Pour évaluer*, un Terme quelconque, *ibid.*
le quarré d'un Terme quelconque, *ibid.*
le cube d'un Terme quelconque, 136
*Pour trouver la somme*, des Unités, *ibid.*
des Nombres naturels, *ibid.*
des Nombres quarrés, 137
des Nombres cubiques, &c. 138, &c.
*Evaluation de la somme*, des Unités, 136
des Nombres naturels, *ibid.*
des Nombres quarrés, 137
des Nombres cubiques, 138
des Puissances quelconques, *ibid.*


CHAP. II. *Du Calcul analytique, ou de l'Analyse.*


*Son point de vue*, en général, 139
dans ses principes, *ibid.*
en particulier, 152
dans ses applications, *ibid.*


ART. I. *Des Principes de l'Analyse.*


*Son objet*, Calcul des rapports, 139, &c.
Rapports des inconnues, *ibid.*
Rapports avec les connues, *ibid.*
*Son but*, Découvrir les valeurs inconnues, 140
Résoudre les problêmes, *ibid.*
*Ses moyens*, Double expres. d'une même quant. *ibid.*
Usage des équations, *ibid.*
*Sa division*, Synthèse ou formation des équat. *ibid.*
Analyse ou résolution des équat. *ibid.*


Paragraphe I. *De la Synthèse, ou formation des Equations.*


*Les Problêmes*, déterminés, indéterminés, 141
numériques, géométriques, *ibid.*
*Les Conditions*, leur expression, 142
le style algébrique, *ibid.*
les équations, 143

*Les Equations*, { leur nature, 139 ; leur construction, 143, &c. ; leur transformation, 146, &c. ; leur simplification, *ibid.*

Paragraphe II. *De l'Analyse, ou résolution des Equations.*

*Son Art*, { développer les rapports, 149 ; trouver les inconnues, *ibid.*
*Ses moyens*, { chercher chaque valeur, *ibid.* ; substituer chaque valeur, *ibid.* ; regles pour substituer, *ibid.* &c.
*Opérations*, { premiere substitution, *ibid.* ; seconde substitution, 150 ; leur différence, *ibid.*
*Résultat*, { réduction des inconnues, de plusieurs à une, 152 ; réduction des équations, de plusieurs à une, *ibid.*
*Fin*, { Inconnues évanouies, *ibid.* ; valeurs trouvées, *ibid.*

ART. II. *Application de l'Analyse aux Equations simples.*

*Regles*, { de fausse Position, 153 ; de Trois, directe, 154 ; inverse, 155 ; de Cinq, 157 ; de Compagnie, 158 ; d'Alliage, directe, 159 ; inverse, 160
*Problêmes*, { du premier Degré, 163, &c. ; du second Degré, 170, &c.

ART. III. *Application de l'Analyse aux Equations composées.*

*Leurs Racines*, { Equations linéaires, 174, &c. ; Positives, Négatives, 175, &c.
*Leur composition*, { Formules générales, 177, &c. ; Usage des formules, 178
*Leur résolution*, { Diviseurs du dernier terme, *ibid.* ; Substitution des diviseurs, *ibid.*

*Leur réſultat*, { Racines réelles, 178, &c.
Racines incommenſurables, 180
Racines imaginaires, 182

## LIVRE SECOND.

## ÉLÉMENS DE GÉOMÈTRIE.

*Son objet*, { l'Etendue en { longueur, largeur, profondeur, 184
*Sa fin*, { Détermination de la meſure, *ibid.*
Application de la meſure, *ibid.*
*Sa diviſion*, { Spéculative, *ibid.*
Pratique, *ibid.*
*Ses principes*, { la Ligne droite, 186
la Ligne circulaire, *ibid.*
*Ses inſtrumens*, { la Regle, *ibid.*
le Compas, *ibid.*

### I. PARTIE.

*Elémens de la Géométrie ſpéculative.*

*Son but*, { la Démonſtration, 184
les Théorêmes, *ibid.*
*Son objet*, { les Lignes,
les Surfaces, 185
les Solides,

### SECTION PREMIERE.

*Des Lignes.*

*Leur point de vue*, { leur Nature,
leurs Propriétés, 185
leurs Rapports,

### CHAP. I. *De la Nature des Lignes.*

*Notions*, { de la Ligne droite, 186
de la Ligne circulaire, 188

### CHAP. II. *Des Propriétés des Lignes.*

*Fondées ſur* { leur Poſition reſpective, 193
leur Aſſortiment, *ibid.*
*D'où réſultent* { les Angles, *ibid.*
les Figures, *ibid.*

ART. I. *De la Position respective des Lignes droites & des Angles.*

*Lignes considérées*, { dans leur position respective, & en tant qu'elles forment les angles, 194

Paragrap. I. *De la position respective des Ligues droites.*

*Par rapport*, { A d'autres droites, *ibid.* Au Cercle, *ibid.*

Nombre I. *De la position de la Ligne droite par rapport à d'autres droites.*

*La Perpendiculaire*, { Ligne la plus simple, 197 Ligne la plus courte, 198 Ligne de mesure, 199

*L'Oblique*, { Le Perpendicule, 198 L'éloignement de Perpendicule, 199 L'Obliquité, { plus grande, plus petite, 200, &c. égale,

*Les Paralleles*, { entr'elles, 203 à une troisiéme ligne, *ibid.* entre deux paralleles, 202 coupées par une perpendiculaire, 203 coupées par une oblique, 204

Nombre II. *De la position de la Ligne droite par rapport au Cercle.*

*Les Sécantes*, { intérieures, { les plus courtes, 205, &c. les plus longues, 206 extérieures, { les plus courtes, *ibid.* les plus longues, *ibid.*

*Les Cordes*, { paralleles entr'elles, 211 Arcs interceptés égaux, *ibid.* paralleles à la tangente, 210 Arcs interceptés, égaux, *ibid.*

*Les Rayons*, { perpendiculaires à une corde, coupant la corde, 207 coupant également,

*Les Tangentes*, {
- paralleles entr'elles, 210
- Arcs interceptés, égaux, *ibid.*
- perpendiculaires au rayon, 209
- touchent la circonférence, 208
- touchent en un seul point, 209
- point de contingence, 211, &c.
- propriétés du point de contingence, *ibid.*

}

Paragraphe II. *Des Angles.*

*Leur point de vue*, {
- Origine des Angles, 212
- Qualité des Angles, *ibid.*
- Evaluation des Angles, *ibid.*

}

Nombre I. *De l'origine des Angles.*

*Leur nature*, {
- le Sommet, 213
- les côtés, *ibid.*
- l'ouverture, *ibid.*

}

*Leur mesure*, {
- Arc de circonférence de Cercle, 215
- Arc décrit du sommet, *ibid.*
- Arc décrit entre les côtés, *ibid.*
- Arc décrit à volonté, *ibid.*

}

*Leurs espéces*, {
- Angle droit, 213
- Angle aigu, { de complement, *ibid.* / de supplément, *ibid.*
- Angle obtus, *ibid.*

}

Nombre II. *De la qualité des Angles.*

*Construction des Angles*, {
- par des Perpendiculaires, 216
- par des Obliques, 217
- sur des Paralleles, 218

}

*Comparaison des* {
- Angles opposés au Sommet, 217
- Angles correspondans, 218
- Angles alternes, internes, 219
- Angles alternes, externes, *ibid.*
- Angles adjacens, *ibid.*

}

Nombre III. *De l'évaluation des Angles.*

*Point fixe*, {
- l'Angle central, 221
- l'Angle donné, *ibid.*

}

*Maniere d'évaluer*, {
- l'Angle de contingence. 222
- l'Angle inscrit, *ibid.*
- l'Angle du segment, 224
- l'Angle circonscrit, *ibid.*
- l'Angle excentrique, 225

ART. II. *De l'Aſſortiment des Lignes ou des Figures.*

*Fig. conſidérées*, { dans leur conſtitution, 226
dans leur aſſortim. ou aſſembl. *ibid.*

Paragraphe I. *De la Conſtitution des Figures.*

*Leur nature*, { les Angles, { au centre, 228, &c.
au périmétre, *ibid.*
intérieurs, *ibid.*
extérieurs, *ibid.*
les côtés, { égaux, 227, &c.
inégaux, *ibid.*
paralleles, *ibid.*
non paralleles, *ibid.*
*Leur énumération*, { le Triangle, *ibid.*
le Quadrilatere,
le Pentagone,
l'Exagone,
le Polygone,
le Cercle, *ibid.*
*Leur point de vue*, { le Triangle, 226
le Cercle, *ibid.*

Nombre I. *Des Figures conſidérées par rapport au Triangle.*

*Evaluation*, { des Angles intérieurs, 228
des Angles extérieurs, 229, &c.
*Comparaiſon*, { des Angles oppoſés aux côtés, 231
des Angles ſur les baſes paralleles, 232
*Egalité*, { des Triangles, 233
des Figures, 235

Nombre II. *Des Figures conſidérées par rapport au Cercle.*

*Le centre*, { Figures régulieres, 236, &c.
Figures irrégulieres, *ibid.*
*Le rayon*, { Droit, 237, &c.
Oblique, *ibid.*
*Le périmétre*, { Figures inſcrites, 238, &c.
Figures circonſcrites, 239
*Rapport entre* { le Rayon oblique & le côté, *ibid.*
le Rayon oblique & le droit, 240

Paragraphe

Paragraphe II. *Assortiment ou Assemblage des Figures.*

*De même espéce,* { 6 Triangles équilatéraux, 4 Quarrés, 3 Exagones réguliers, 242

*De différente espéce,* { un Triangl. équil. & 2 Dodécag. un Quarré & 2 Octogones, un Triangl. équil. & 2 Exagones, 243

ART. III. *Du Rapport des Lignes.*

*Son origine,* { dans les positions semblables, 244 dans les divis. semblablement faites, *ibid.*

*Résultat,* { Lignes proportionnelles, *ibid.* Figures semblables, *ibid.*

Paragraphe I. *Des Lignes proportionnelles.*

*Leur énumération,* { Lignes directement proportionn. 245, &c. Lignes réciproquement proportion. 248 Lignes réciproques, 247 Lignes moyennes proportion. 248, &c. Lignes de moyen. & extr. raif. 251

Paragraphe II. *Des Figures semblables.*

*Constituées par d'où naît la similitude.* { l'égalité des angles, & la proportionnalité des côtés, 2

*la similitude.* { Signes de similitude, *ibid.* Rapports qui en résultent, *ibid.*

Nombre I. *Des Signes de similitude dans les Figures.*

*Pour les Triangles.* { deux Angles égaux, 253 3 côtés proportionnels, *ibid.* un Angle égal & 2 côtés proportion. 254

*Pour les Polygones.* { être réguliers & de même espéce, 255 être concentriques, 256

Nombre II. *Des Rapports résultans de la similitude des Figures.*

*Rapport entre* { les Côtés & les Hauteurs, 257 les Hauteurs & les Bases, *ibid.* les Bases & les Côtés, *ibid.* les Côtés & les Périmétres, 258 les Périmétres & les Rayons, *ibid.* les Rayons & les Cordes, *ibid.* les Cordes & les Arcs, 259

SECTION II.

*Des Surfaces.*

*Leur point de vue,* { comme figures, comme quantités, comme plans, } 260

CHAP. I. *Des Surfaces considérées comme Quantités.*

*Susceptibles,* { d'évaluation, de mesure, de comparaison, } 262

ART. I. *De l'évaluation des Surfaces.*

*Le Parallélogramme,* Produit { de la Hauteur, par la Base, } *ibid. &c.*

*Le Triangle,* Produit { de la Hauteur, par la demi-Base, } 265, &c.

*Le Trapeze,* Produit { de la Hauteur, par la demi-somme des Bases, } 266 *ibid.*

*Le Polygone,* Produit { du Rayon, par le demi-Périmétre, } 267, &c.

*Le Cercle,* Produit { du Rayon, par la demi-Circonférence, } 279

ART. II. *De la Mesure des Surfaces.*

*Transformation,* { du Polygone en triangle, 271
du Triangle en Parallélogramme, *ibid.*
du Parallélogram. en rectangle, 272
du Rectangle en quarré, *ibid.* }

*Le Quarré,* { Mesure simple, *ibid.*
Mesure connue, *ibid.*
Mesure des surfaces rectilignes, 273 }

ART. III. *Du Rapport des Surfaces.*

*Point de vue,* { Rapport des surfaces, Conséquences qui résultent, } 274

Paragraphe I. *Du Rapport des Surfaces.*

*composé* { dans les Parallélogrammes, *ibid.*
dans les Triangles, 275
dans les Polygones réguliers, *ibid.*
dans les Cercles, *ibid.*
dans les Surfaces quelconques, 276 }

*dont les Produi-sans,* sont la Hauteur, & la Baſe, 274, &c.
sont le Rayon droit, & le Périmétre, 275

*doublé* dans les Parallélogramm. ſemblables, 276
dans les Triangles ſemblables, 277
dans les Polygones régul. ſemblabl. *ibid.*
dans les Cercles, 278

*leſquels ſont comme* les Quar. des côtés homologues, 277
les Quar. des lignes ſemblablement tirées, 278

*ou comme* les Fig. ſembl. ſur les côtés homologues, *ibid.*
les Fig. ſembl. ſur les lignes ſemblablem. tirées, *ibid.*

Paragraphe II. *Des conſéquences qui réſultent du rapport des Surfaces.*

*Pour le Triangle équilatéral,* Triangle circonſcrit double, 279
Triangle inſcrit ſous-double, *ibid.*

*Pour le Triangle rectangle,* Egalité entre le quarré de l'hypothénuſe, & les quarrés ſur les côtés, *ibid.* &c.
Egalité entre une figure ſur l'hypothénuſe, & les fig. ſemblables ſur les côtés, 282
Egalité entre une lunule ou portion de cercle, & un triangle rectiligne, 283

*Pour le Quarré,* Diagonale incommenſurable, Côté incommenſurable, 281

*Pour le Quarré, double,* impoſſible arithmétiquement, 284
poſſible géométriquement, 285

*Pour le Cercle,* Cordes commenſurables, Cordes incommenſurables, 281

*Pour l'expreſſion numérique,* Exprime pour les dimenſions commenſurables, dans les nombres naturels, 283
Exprime pour les ſurfaces ſemblables, dans les nombres quarrés, *ibid.*

CHAP. II. *Des Surfaces conſidérées comme Plans.*

*Leur point de vue,* Notion des plans, Section des plans, 286 Aſſortiment des plans,

## ART. I. *De la Notion des Plans.*


*Considérés*, { dans leur formation, dans leur position, dans leurs affections, — 287

*Format. des Plans*, { Mouvement d'un triangle, Axe du mouvement, — *ibid.* &c. Traces laissées dans le mouvement,

*Position des Plans*, { déterminée par trois points, — 288; déterminée par un triangle, — *ibid.*

*Affections des Plans*, { Lignes { Perpendic. { élevées sur le plan, *ib.* &c.; abbaissées sur le plan, *ibid.* } Obliques, { degré d'obliquité, 289; projection de l'obliq. *ibid.* }


## ART. II. *De la Section des Plans.*


*D'un Plan quelconque*, { par une ligne droite, 287; est un point, *ibid.*; par une surface, est une ligne, *ibid.*; par un solide, *ibid.*; est une surface, *ibid.* }

*De deux Plans quelconques*, { est une ligne droite, 291; est une ligne commune, *ibid.* }

*De deux Plans perpendiculaires*, { l'un sur l'autre, { propriétés, *ibid.* &c.; effets, } sur un 3^e^ plan, { propriétés, 293, &c.; effets, } }

*De deux Plans obliques*, { Obliquité, { Angle d'obliquité, 292; Mesure de l'obliquité, } Effets, { Angl. oppos. à la sect. *ibid.* &c.; Angles correspondans, Angles alternes, *ibid.*; Angles adjacens, } }

*De deux Plans paralleles*, { coupés { par deux lignes droites, 294; par un troisiéme plan, 293 } }


## ART. III. *De l'Assortiment des Plans, pour former les Angles solides.*


*Leur origine*, { Concours des angles-plans, 295; Sommet commun, Angle solide, *ibid.* }

*Leur nature*, { Nombre des angles-plans, *ibid.*
Valeur des angles-plans, 296

*Leurs limites*, { 3, 4, 5 Angles de triangl. équilat. 297
3 Angles de quarrés, *ibid.*
3 Angles de pentagones réguliers, *ibid.*

## SECTION III.

### *Des Solides.*

*Leur point de vue*, { Corps figurés,
Corps solides, 298

### CHAP. I. *Des Solides considérés comme corps figurés.*

*Les corps figurés*, { en général,
réguliers, 299

#### ART. I. *Des Corps figurés en général.*

*Leur formation*, { par le mouvem. { de paralléliſ. 300 & 303
de rotation, 305
par l'aſſortim. des plans, { de même eſpéce, 388
de différ. eſpéce, 309

*Leurs claſſes*, { les Priſmes, 311
les Pyramides, *ibid.*
les Sphéroïdes, *ibid.*
les Polyedres, *ibid.*

*Les Priſmes*, { leurs élémens, { plan générat. 300 & 301
plans élémentaires, *ibid.*
leurs eſpéces, { triangulaire, 300
quadrangul. &c. *ibid.*
leurs limites, { le priſme triang.
le cylindre, 301

*Les Pyramides*, { leurs élémens, { plan générateur, 303
plans élémentaires, 304
leurs eſpéces, { triangulaire,
quadrangul. &c. 203
leurs limites, { la pyram. triangul. 304
le cône,

*Les Sphéroïdes*, { leurs élémens, { polygone générat. 305
tranches élément. 306
leurs eſpéces, { le fuſeau, *ibid.*
le ſphéroïde pentagonal,
le ſphéroïde exag. &c.
leurs limites, { le fuſeau, *ibid.*
la ſphére,

*Les Polyedres*, leurs élémens, rayons, pyramides, 308 & 310
leurs espéces, le tétraedre, le cube, le parallélipipede, l'octaedre, &c. 309
leurs limites, le tétraedre, la sphere, 309, &c.

ART. II. *Des Corps réguliers.*

*Leurs espéces & leur nombre*, le Tétraedre, l'Octaedre, l'Icosaedre, l'Exaedre, le Dodécaedre, 312
*Leur développement*, 4 triangles équilatéraux, 8 triangles équilatéraux, 20 triangles équilatéraux, 6 quarrés, 12 pentagones réguliers, 314

CHAP. II. *Des Solides considérés en tant que corps solides.*

*Leur point de vue*, la surface, la solidité,

ART. I. *De la Surface des Solides.*

*Leur formation par* le mouvement conique, 318
le mouvement circulaire, *ibid.*
*Leur évaluation, pour* le prisme, 319
le cylindre, *ibid.*
la pyramide, 321
le cône, *ibid.*
le cône tronqué, 323
le sphéroïde, 324
la sphere, 326
*Rapport des surfaces*, du cylindre, du cône équilatéral, de la sphere, 329

ART. II. *De la Solidité des Solides.*

*Leur point de vue*, Evaluation des solides, Mesure des solides, Rapport des solides, 330

## Paragraphe I. *De l'évaluation des Solides.*


*Evaluation*, du Prisme, 330
de la Pyramide, 332
du Cylindre, 333
du Cône, 334
du Polyedre régulier, *ibid.*
de la Sphere, *ibid.*

*Rapport entre* le Cylindre, le Cône équilatéral, la Sphere, 335, &c.


## Paragraphe II. *De la Mesure des Solides.*


*Transformation*, du Polyedre en pyramide, 337
de la Pyramide en prisme, *ibid.*
du Prisme en parallélipipede, *ibid.*
du Parallélipipede en cube, 338

*Le Cube*, Mesure simple, Mesure connue, Mesure des solides rectilignes, 339


## Paragraphe III. *Du Rapport des Solides.*


*Point de vue*, Rapport des solides, Conséquences qui en résultent, *ibid.*


## Nombre I. *Du Rapport des Solides.*


*Composé*, dans les Solides ordinaires, 339
dans les Polyedres réguliers, 341

*dont les produisans* pour la Hauteur, ou la Largeur, ou la Profondeur, 339
pour la Hauteur, ou la Base, 340
pour le Rayon droit, ou le Périmétre, 341

*Triplé, lorsque* les Produisans sont proportion. *ibid.*
les Solides sont semblables, *ibid.*

*Lesquels sont comme* les Cubes des Côtés homologues, *ibid.*
les Cubes des Lignes semblabl. tirées,

ou comme les Solid. sembl. { sur les Côtés homologues, *ibid.* ; sur les Lignes semblablem. tirées, *ibid.*

Nombre II. *Des Conſéquences qui réſultent du rapport des Solides.*

*Pour le Cube doublé,* { impoſſible arithmétiquement, 343 ; impoſſible dans la Géométr. ſimple, 344 ; poſſible dans la Géométr. compoſée, *ibid.*

*Pour l'expreſſion numérique,* { priſes { pour les dimenſions homolog. 343 ; dans les nombres proportion. 347 ; pour les ſolides ſemblables, *ibid.* ; dans les nombres cubiques,

SECONDE PARTIE.

ÉLÉMENS DE LA GÉOMÉTRIE PRATIQUE.

*Son but,* { l'Exécution, 345. ; les Problêmes,

*Son objet,* { le Calcul, ; les Opérations, *ibid.*

SECTION I.

*Du Calcul de la Géométrie Pratique.*

*Ses eſpéces,* { Calcul décimal, ; Calcul logarithmique, *ibid.*

CHAP. I. *Du Calcul Decimal.*

*Sa nature,* { Fractions décimales, 347, &c. ; Dénominateur décimal arbitaire, *ibid.* ; Dénominat. décimal ſous-entendu, *ibid.*

*Son principe,* { parties d'un tout { diminuées en grandeur, *ibid.* ; augmentées en nombre, *ibid.*

*Ses avantages*, pour négliger les restes, *ibid.*
pour les approximations, *ibid.*

*Ses regles pour réduire*, en fraction décim. un Nombre entier, 349
une Fraction, 350
un Entier & une Fraction, *ibid.*

*Sa pratique*, Addition & Soustraction, 351
Multiplication & Division, *ibid.* &c.
Exaltation & Extraction, *ibid.*

## CHAP. II. *Du Calcul Logarithmique.*

*Son origine*, Progression géométrique,
Progression arithmétique, 353, &c.
Leur réunion,

*Son principe*, Progression géométrique dans les termes, 354
arithmétique dans les exposans, *ibid.*

*Son objet*, Logarithmes, positifs, 355
négatifs, 367
usage des Logarithmes, 354

*Son utilité*, pour abréger le Calcul, 353
pour faciliter le Calcul, *ibid.*

*Par la transformation*, de la Multiplication en Addition,
de la Division en Soustraction, 354, &c.
de l'Exaltation en Multiplication, *ibid.*
de l'Extraction en Division,

*En substituant*, les Logarithm. aux nombres naturels, 355
ou
les Exp. aux termes de la prog. géom. *ibid.*

*Son art*, Construction de la table des log. 356, &c.
Usage de la table des logarithmes, 362

*Construction de la Table*, Moyens proportionnels géométriq. 356
Moyens proportionnels arithmétiq. *ibid.*

*Usage de la Table*, un Nombre étant donné, 363
trouver son Logarithme,
un Logarithme étant donné,
trouver le Nombre correspondant, 364

## SECTION II.

### *Des Opérations de la Géométrie Pratique.*


*Son objet*, { les Mesures, 369
l'Usage des mesures, *ibid.*


### CHAP. I. *Des Mesures.*


*Leur principe*, { la Ligne droite, la Ligne circulaire, *ibid.*
*Les instrumens*, { la Regle, le Compas, *ibid.*
*Condit. requises*, { Division de la regle, Division du cercle, *ibid.*


#### ART. I. *Division de la Regle.*


*Regle*, { ordinaire, { Toises, Pieds, Pouces, 370
géométrique, { Mes. plus petite, Mes. proportion. *ibid.*


#### ART. II. *Division du Cercle.*


*Division en parties égales*, { 3 le Triangle équil. 375
4 le Quarré, 373
5 le Pentagone, 376
6 l'Exagone, 375
8 l'Octogone, 374
10 le Décagone, 376
12 le Dodécagone, 375
15 le Pentédécag. 377
(pair / inscrits)

*Trisect. d'un Arc*, { de 90 dégrés, { possible, 375
de 45 dégrés, { effectuée, 376
quelconque { desirable, 374
inconnue, 376


### CHAP. II. *Usage & Application des Mesures.*


*Objet*, { les Lignes, les Surfaces, les Solides, 378

*Pratique*, { la Longimétrie, la Planimétrie, la Stéréométrie, *ibid.*

ART. I. *La Longimétrie.*

*Son objet,*
- Pratiq. des lig.
  - perpendic. 379, &c.
  - paralleles, 381, &c.
  - proportionn. 385, &c.
- Pratiq. des ang.
  - leur conſtruct. 389
  - leur meſure, 388
- Pratiq. des fig.
  - leur conſtruct. 390, &c.
  - les condit. *ibid.*

*Ses inſtrumens,*
- primitifs,
  - la Regle, 369
  - le Compas, *ibid.*
- dérivés,
  - la double Regle, 382
  - le Comp. de prop. 405
  - le Rapporteur, 389
  - l'Equerre, 391

ART. II. *La Planimétrie.*

*Meſure,*
- des Surfaces en général,
- des Triangles en particulier, 394

Paragraphe I. *Meſure des Surfaces en général.*

*Meſure,*
- d'un Quarré, 394
- d'un Rectangle, *ibid.*
- d'un Triangle, *ibid.*
- d'un Parallélogramme, 395
- d'un Polygone, *ibid.*
- d'un Cercle, 396
- d'un Secteur de cercle, *ibid.*

Paragraphe II. *Meſure des Triangles, ou la Trigonométrie.*

*Ses moyens,*
- les Sinus, Tang. & Sécantes, 397, &c.
- Conſtruction de la table des ſinus, *ibid.*

*Sa fin,*
- Réſolution des triangles, *ibid.*
- Application à des exemples, *ibid.*

Nombre I. *Théorie des Sinus, Tangentes & Sécantes.*

*Leurs eſpéces,*
- Sinus total, 398
- Sinus droit, 297
- Co-ſinus, 398
- Sinus verſe, *ibid.*

*Leur Rapport*, { avec les Cordes des arcs, 404
avec le Rayon du cercle, 405

*Leurs Propriétés*, { dans le Triangle rectangle, 401
dans le Triangle obliquangle, 400, &c.
dans le Triangle obtus angle, *ibid.*

Nombre II. *Conſtruction de la Table des Sinus, Tangentes & Sécantes.*

*Principes*, { les Cordes des arcs, 405, &c.
l'Uſage du compas de propor. *ibid.*

*Uſage*, { de ces principes pour trouv. les cordes, 406, &c.
des cordes, les ſinus, 408
des ſinus, les tangentes, 409
des tangentes, les ſécantes, 410

Nombre III. *De la Réſolution des Triangles.*

*Etant donnés*, { deux côtés & un angle oppoſé, 413
deux angles & un côté compris, 414
les trois côtés, 415
deux côtés & l'angle compris, *ibid.*

Nombre IV. *Uſage & Application de la Trigonométrie.*

*Inſtrumens*, { la Toiſe, 416
le Graphométre, *ibid.*

*Meſ. un angle*, { acceſſible par le ſommet, *ibid.*
inac. par le ſom. { ſaillant, 417
rentrant, *ibid.*

*Meſ. une hauteur*, { acceſſible par le pied, *ibid.*
inacceſſible par le pied, 418
perpendiculaire, *ibid.*
oblique, 419

*Meſ. une largeur*, { acceſſible par une extrêmité, 420
inacceſſible par ſes deux extrêm. *ibid.*

*Meſ. la diſtance*, { de deux objets, *ibid.*
de pluſieurs objets, 421
conſt. d'une carte géographique, *ibid.*

ART. III. *La Stéréométrie.*

*Le toiſé*, { Meſure des ſolides, 422
Evaluation des ſolides, *ibid.*

*Application*, au Cube, *ibid.*
au Prisme, *ibid.*
au Cylindre, 423
à la Pyramide, *ibid.*
au Cône, *ibid.*
au Cône tronqué, *ibid.*
à la Sphere, 424
*Le Jaugeage*, Mesure des capacités, 425
Constructᵗ. de la verge de jauge, 426
Usage de la verge de jauge, *ibid.*

## LIVRE III.

## INTRODUCTION AUX SECTIONS CONIQUES.

*Leur point de vue*, dans le Cône, 428
sur un Plan, *ibid.*

### SECTION I.

### *Des Sections coniques considérées dans le Cône.*

*Leur origine*, Sections faites dans le cône, *ibid.* & 429
Plan coupant,
Direction du plan,
Extrêmités des sections, *ibid.*
*Leur nombre*, le Triangle, 430
le Cercle, *ibid.*
l'Ellipse, *ibid.*
la Parabole, *ibid.*
l'Hyperbole, *ibid.*
*Leur notion*; Points princip. le Foyer, 431
le Sommet, *ibid.*
Lignes princip. le Ordonnées, *ibid.*
les Abscisses, *ibid.*
*Leur nature*, Fonctions des ordonnées, 432, &c.
Fonctions des abscisses, *ibid.*
Rapport constant entre ces fonctions, *ibid.*

### SECTION II.

### *Des Sections coniques considérées sur un Plan.*

*Considérés*, absolument ou en elles-mêmes, 436
par comparaison, *ibid.*

CHAP. I. *Des Sections coniques considérées absolument ou en elles-mêmes.*


*Théorie*, { de la Parabole, 437 ; de l'Ellipse, 449 ; de l'Hyperbole, 460

ART. I. *De la Parabole.*

*Sa description*, { Conditions requises, 437 ; Courbe résultante, *ibid.* ; La même que dans le cône, 440

*Sa notion*, { Points princip. { un Sommet, 437 ; un Foyer, *ibid.* } ; Lignes princip. { un Axe, 438 ; un Diamétre, 444, &c. }

*Système de l'axe*, { sa Position, 438 ; son Paramétre, *ibid.* ; ses Propriétés, 439, &c.

*Système du diam.* { sa position, 444 ; son Paramétre, 445 ; ses Propriétés, *ibid.* &c.

*Ses affections*, { propriétés de la Tangente, 442, &c. ; expression de la Sous-tangente, 443 ; expression de la Sous-normale, *ibid.* ; expression du Rayon vecteur, 444 ; rapport des Rayons vecteurs, *ibid.*

*Ses usages*, { pour la duplication du Cube, 448 ; pour la Méchanique, 449 ; pour l'Astronomie, *ibid.* ; pour l'Optique, *ibid.*

ART. II. *De l'Ellipse.*

*Sa description*, { Conditions requises, *ibid.* ; Courbe résultante, 450 ; la même que dans le Cône, 452

*Sa notion*, { Points princip. { 2 Sommets, 450 ; 1 Centre, *ibid.* ; 2 Foyers, *ibid.* } ; Lignes princip. { 2 Axes, *ibid.* ; 2 Diamétres, 457 }

*Système des axes*, { leur Position, 450 ; leurs Propriétés, 451, &c.

*Syſtême des diam.* { leur Poſition, 457 ; leurs Propriétés, *ibid.* &c.

*Ses affections,*
- la Tangente, 453
- la Sous-tangente, { au grand axe, 455 ; au petit axe, 456
- la Sous-normale, 455
- le Rayon vecteur, 454

*Ses uſages,*
- dans l'Aſtronomie, 459
- dans l'Optique, *ibid.*
- dans l'Architecture, *ibid.*

ART. III. *De l'Hyperbole.*

*Sa deſcription,*
- Conditions requiſes, 460
- Courbe réſultante, *ibid.*
- la même que dans le Cône 362

*Sa notion,*
- Points princip. { les Sommets, 460 ; le Centre, *ibid.* ; les Foyers, *ibid.*
- Lignes princip. { les Axes, *ibid.* ; les Aſymptotes, 465

*Syſtême des axes,*
- Leur Poſition, { hyp. conjug. 460 ; hyp. équil. 435 ; hyp. ellyptiq. *ibid.*
- leurs Propriétés, { générales, 461 ; particulieres, 462, &c.

*Syſtême des aſymp.*
- leur Poſition, 465
- leurs Ordonnées, *ibid.*
- leurs Propriétés, 465, &c.

*Sa comparaiſon,*
- ſes reſſemblances avec l'Ellipſe, 462, &c.
- ſes différences avec l'Ellipſe, *ibid.*

*Ses affections,*
- la Tangente, 462
- la Sous-tangente, { au grand axe, 464 ; au petit axe, *ibid.*
- la Sous-normale, 463
- le Rayon vecteur, *ibid.*

*Ses uſages,*
- dans la Dioptrique, 469
- dans la Catoptrique, *ibid.*
- pour les Logarithmes, *ibid.*

CHAP. II. *Des Sections coniques comparées.*

*Objets de comparaiſon,*
- leur Deſcription, 470
- leurs Equations,
- leurs Affections,
- leurs Meſures, *ibid.*

ART. I. *Des Sections coniques comparées dans leur deſcription.*


*Deſcript. géométr.*
- étant donnés,
  - la Directrice; 472
  - le Foyer,
  - un Sommet; *ibid.*
- trouver,
  - le Sommet oppoſé, *ibid.*
  - un Point quelconq. *ibid.*
  - le grand Axe, *ibid.*
  - la diſt. des Foyers, 474
- étant donné
  - l'Equation ou le Lieu algébriq. 475
- trouver
  - la Courbe réſult. ou le Lieu géom. *ibid.* &c.

*Deſcript. méchaniq.*
- les Inſtrumens,
  - le Compas, 476
  - les deux Regles, 477
  - les Stilets,
  - les Cordons, *ibid.*
- les Points fixes,
  - le Centre, *ibid.*
  - le double Foyer, *ibid.*
  - le Foyer à l'infini, *ibid.*
  - le Foy. à contre-ſens, 478
- Courbe réſul.
  - le Cercle, 476
  - l'Ellipſe, 477
  - la Parabole, *ibid.*
  - l'Hyperbole, 478


ART. II. *Des Sections coniques comparées dans leurs équations.*


*Générale,*
- principe,
  - Propriété du cercle, 479
  - Equation primitive, *ibid.*
- Conſtruction
  - de l'Equat. à l'axe, *ibid.*
  - de l'Equat. au para. 482

*Dérivée,*
- Equat. à l'axe,
  - du Cercle, 479
  - de l'Ellipſe, *ibid.*
  - de la Parabole, 480
  - de l'Hyperbole, *ibid.*
- Equat. au para.
  - du Cercle, 483
  - de l'Ellipſe, *ibid.*
  - de la Parabole, *ibid.*
  - de l'Hyperbole, *ibid.*


ART. III.

ART. III. *Des Sections coniques comparées dans leurs affections.*


*Le Paramètre*, comparé à l'ordonnée du Foyer,
comparé à l'interv. du Sommet & du Foyer, 484

*La Sous-tangente*, comparée à l'abſciſſe,
double dans la Parabole, 485
plus que double dans l'Ellipſe, *ibid.*
moins que double dans l'Hyperb. *ibid.*

*La Sous-normale*, comp. au demi-param.
égale dans la Parabole, 486
moindre dans l'Ellipſe, *ibid.*
plus grande dans l'Hyperbole, *ibid.*

*Le Rayon vecteur*,
ſon expreſſion,
dans la Parabole, 490
dans l'Ellipſe, *ibid.*
dans l'Hyperbole, 491
ſon rapport avec
les Perpendic. 490
le grand Axe, 491

*Le Rayon oſculat.*
ſes valeurs,
premiere, 494
ſeconde, 495
troiſiéme, 496
ſon uſage, pour trouver
la Normale, 495
les Centres, *ibid.*

*Expreſſions*, du quarré du petit axe. premiere, 486
seconde, 487
troiſiéme, 488
quatriéme, 490
cinquiéme, *ibid.*
du rectangle des deux axes. égal au rectangle des diam. conju. 493

ART. IV. *Des Sections coniques comparées dans leurs meſures.*

*Meſures*, Rectification, Meſure de la ligne courb. 496
Quadrature, Meſure de la ſurface, *ibid.*
Cubature, Meſure de la ſolidité, *ibid.*

*Quadratures*, Abſolue, de la Parabole $\frac{2}{3}$ du Rectangle circonſc. 497
Hypothétique, du Cercle, 498
de l'Ellipſe, *ibid.*
de l'Hyperb. &c. 499

*Cubatures*, du Paraboloïde, moitié du Cylindre circonſcrit, 497
de l'Ellipſoïde, les deux tiers du Cylindre circonſcrit, 499

FIN DE LA TABLE.

Fig 3.

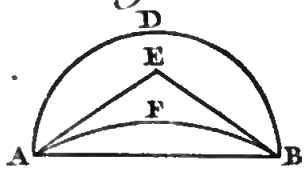



Fig 4.

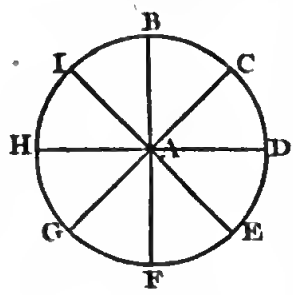



Fig. 7.

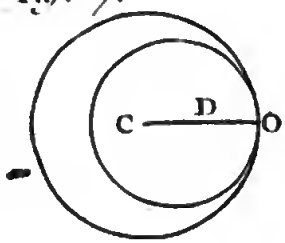



Fig. 8.

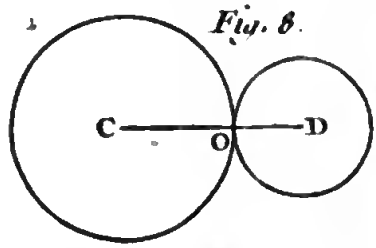



Fig. 11.

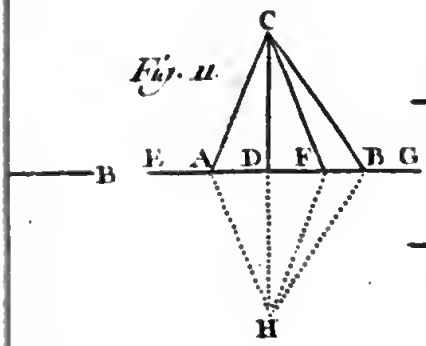



Fig. 12.

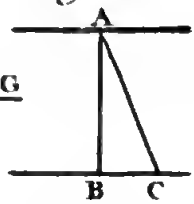
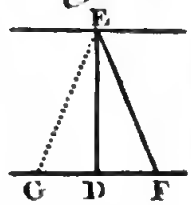



Fig. 13.



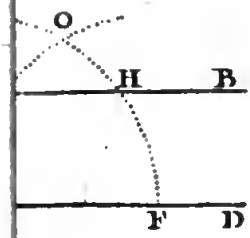




Fig. 16.

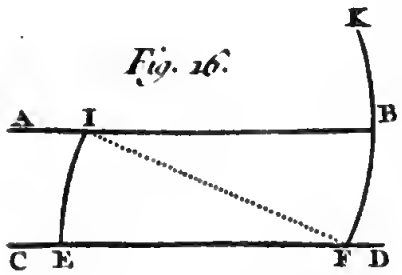



Fig 19

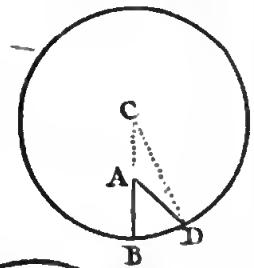
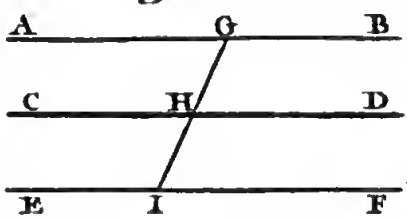



Fig. 18.




BIBLIOTECA NAPOLI VITTORIO EMANUELE III

Fig. 22.

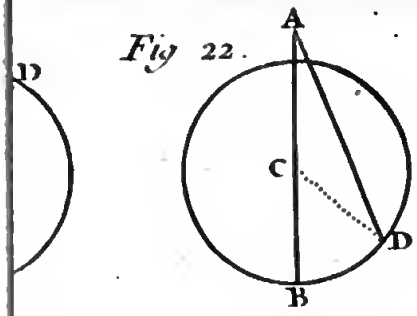



Fig. 23.

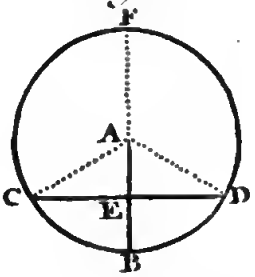



Fig. 26.

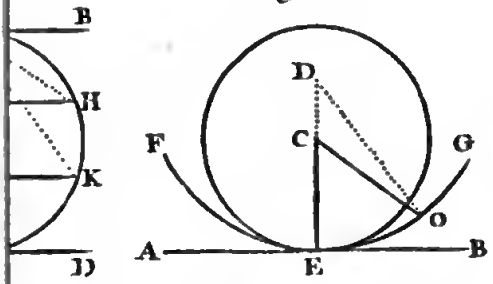



Fig. 27.

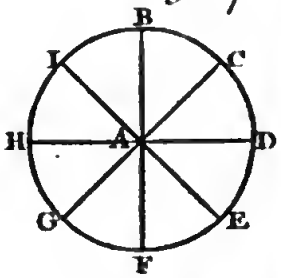



Fig. 31.

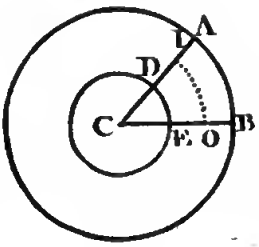



Fig. 32.

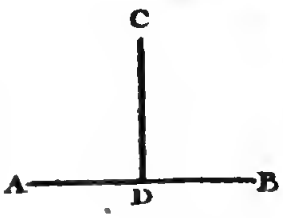



Fig. 35.

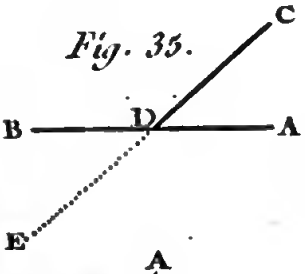



Fig. 36.

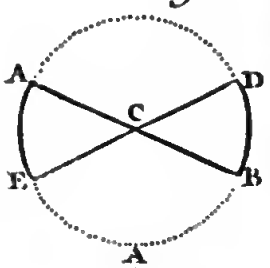



Fig. 39.

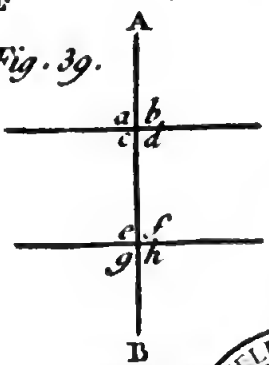
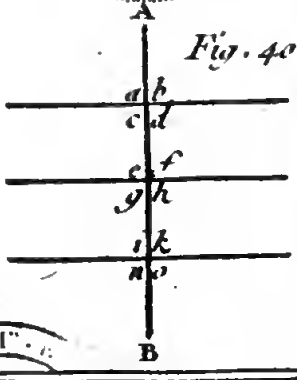



Fig. 40.




NAPOLI

Fig. 43.

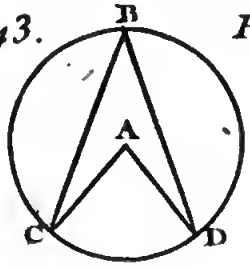



Fig. 44.

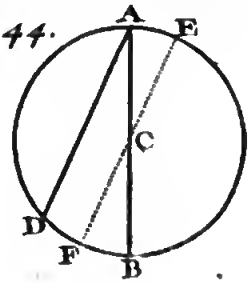



Fig. 47.

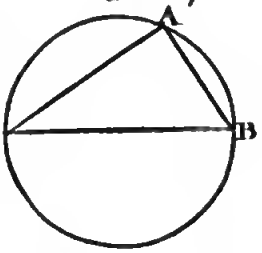
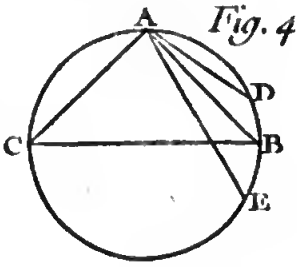



Fig. 46.

Fig. 48.




7. 50.

Fig. 51.

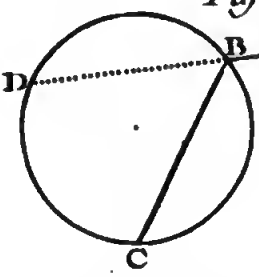



Fig. 52.

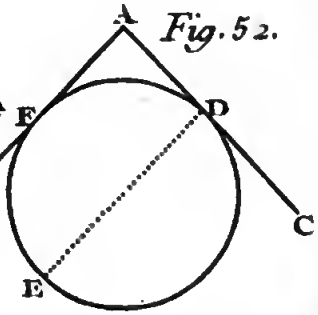



Fig. 54.

Fig. 55.

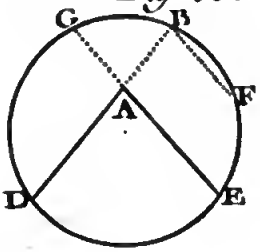
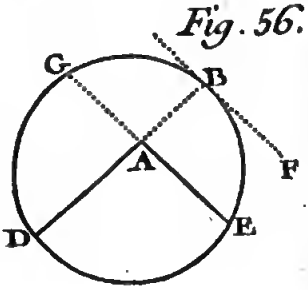



Fig. 56.




8. A

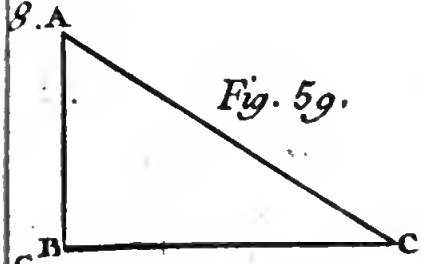
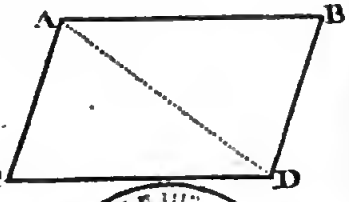



Fig. 59.

Fig. 60.




NAPOLI

Fig. 63.

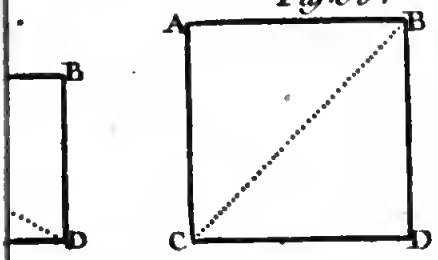



Fig. 64.

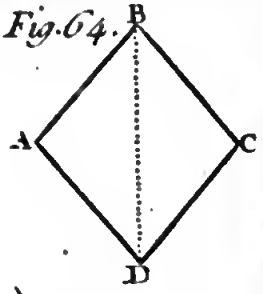



Fig. 67

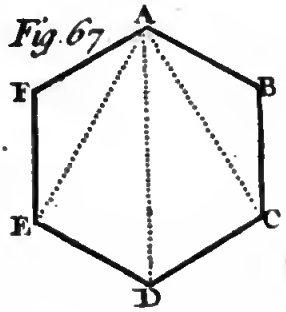



Fig. 68.

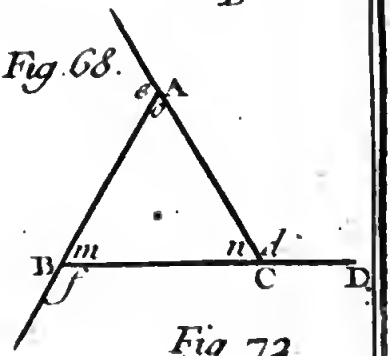



Fig. 71.

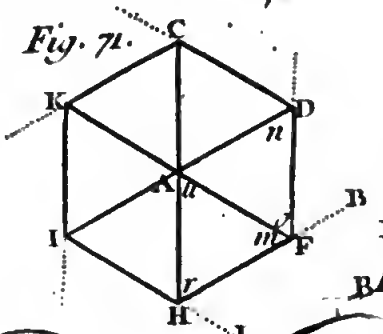



Fig 72

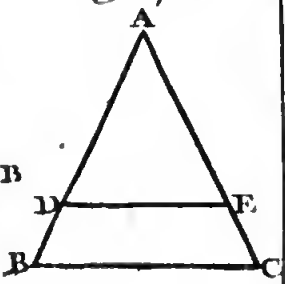



Fig. 74.

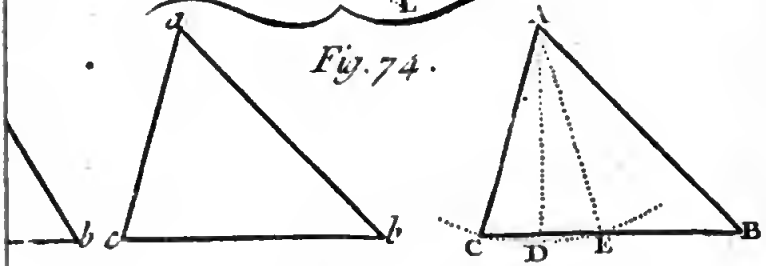



Fig. 77.

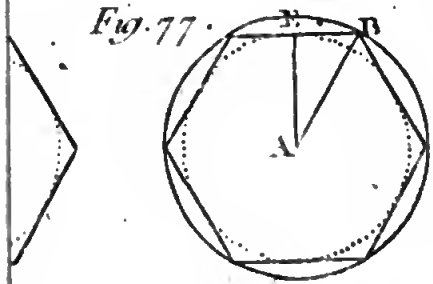
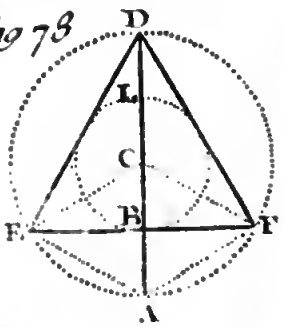
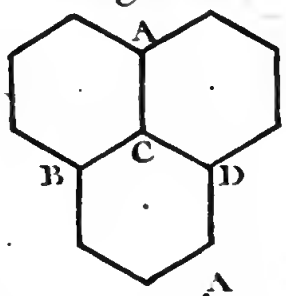


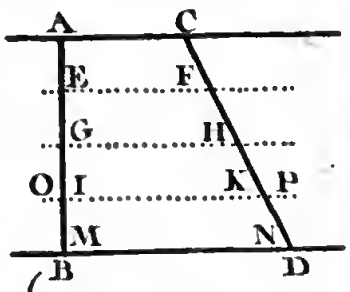

Fig 78




NAPOLI

Fig. 81.




H

Fig. 82.

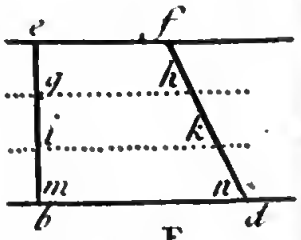
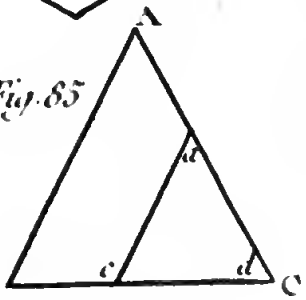


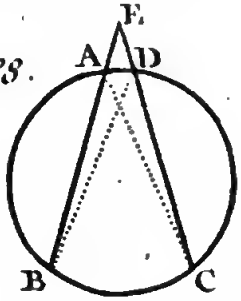

Fig. 85




d

C

Fig. 88.




C

Fig. 89

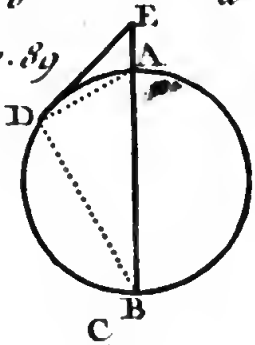



Fig. 92.

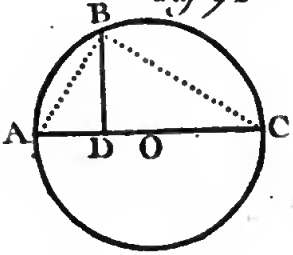
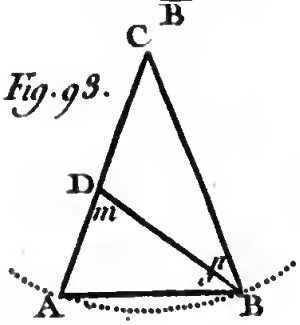



Fig. 93.




91.

r

C

Fig. 96.

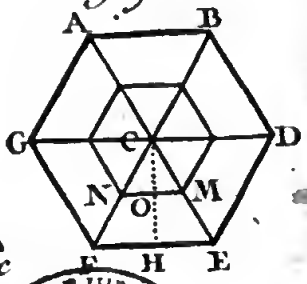
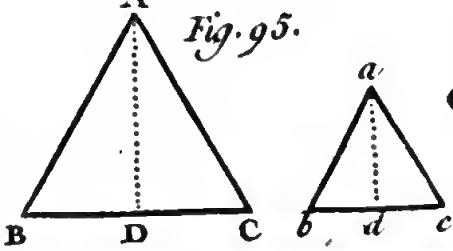



Fig. 95.




VITTORIO EM. III. NAPOLI

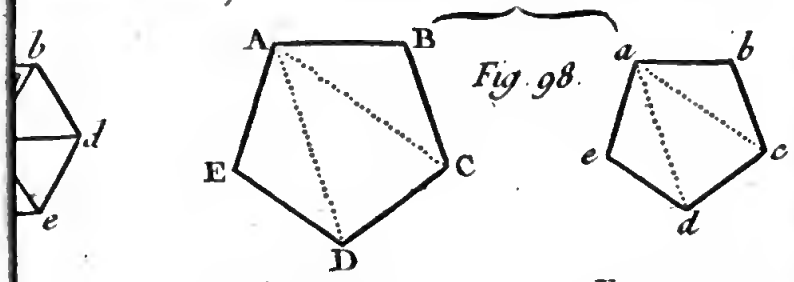



Fig. 98.

Fig. 101.

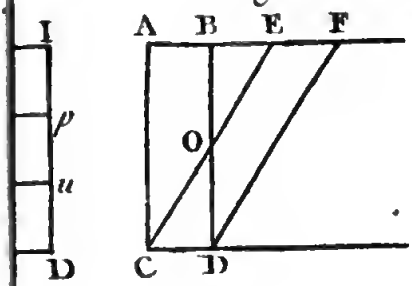



Fig. 102.

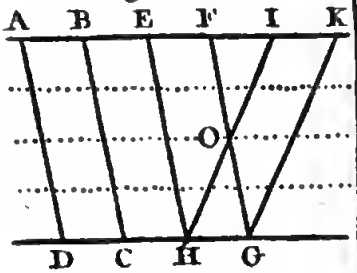



Fig. 105.

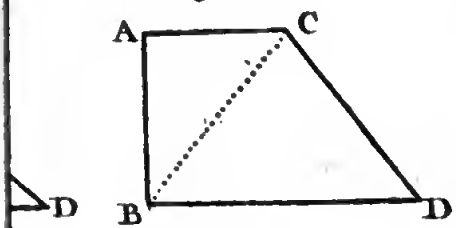



Fig. 106

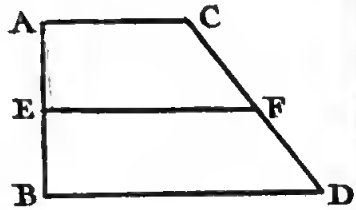



Fig. 109.

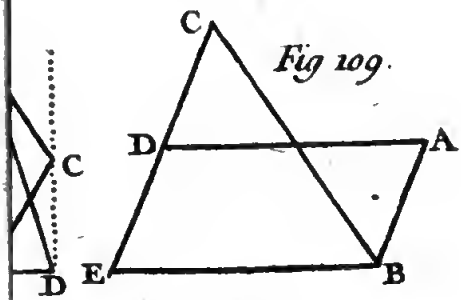



Fig. 110.

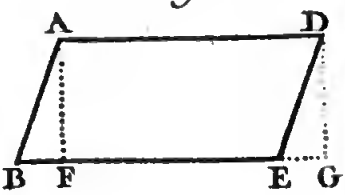
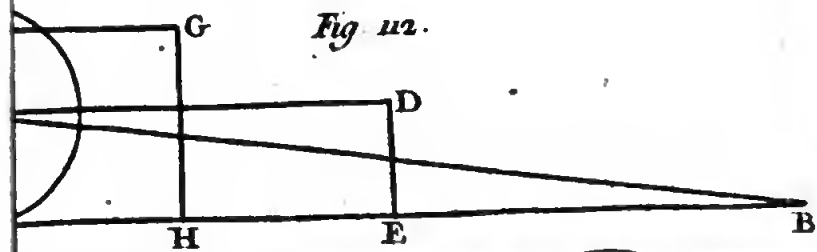
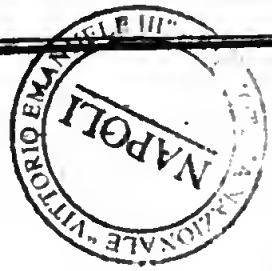



Fig. 112.



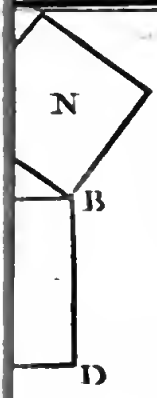



Fig. 115.

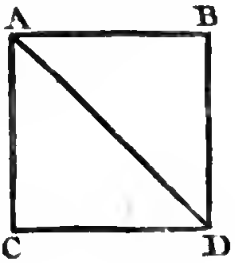
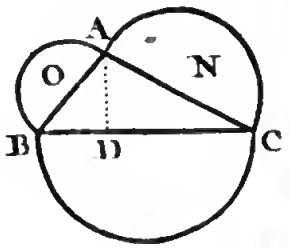



Fig. 116.



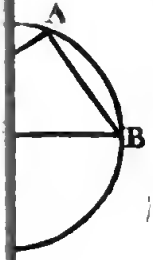




Fig. 119.

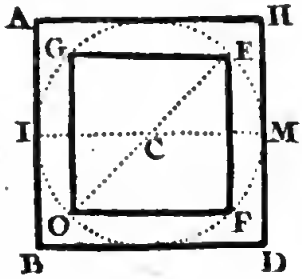



Fig. 120.

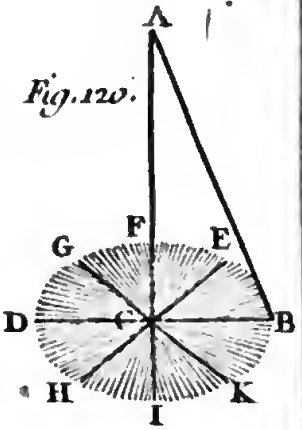



Fig. 122.

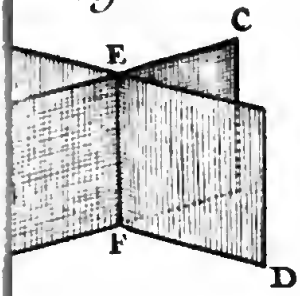



Fig. 123.

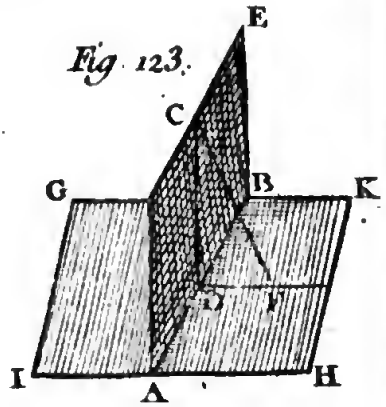



Fig. 125.

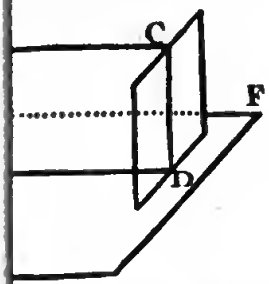
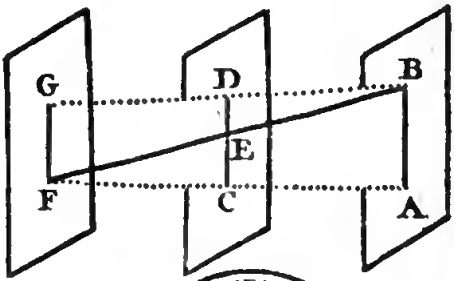



Fig. 126.




VITTORIO EMANUELE III
NAPOLI
BIBLIOTECA NAZIONALE

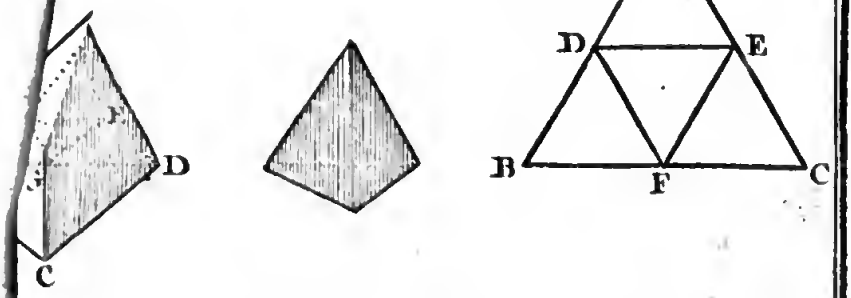



Fig 129.

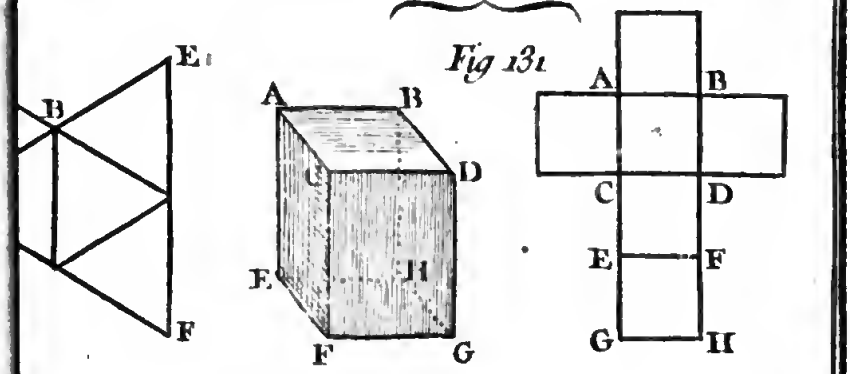



Fig 131

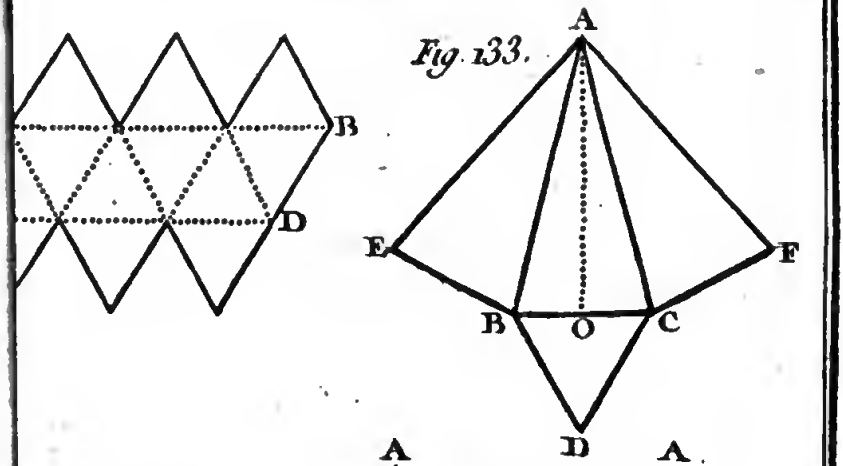



Fig. 133.

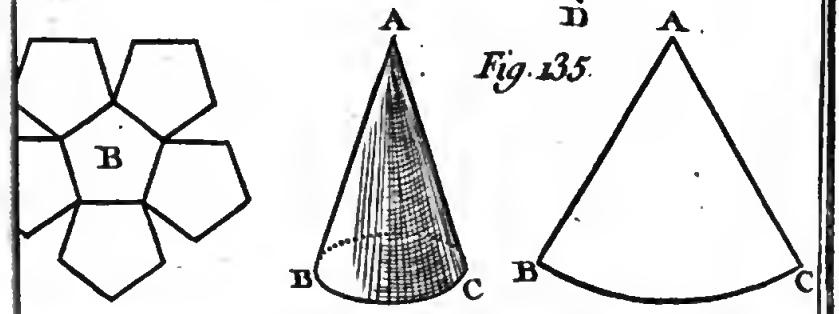



Fig. 135.

VITTORIO EMANUELE III
BIBLIOTECA NAZIONALE
NAPOLI

Fig. 137.

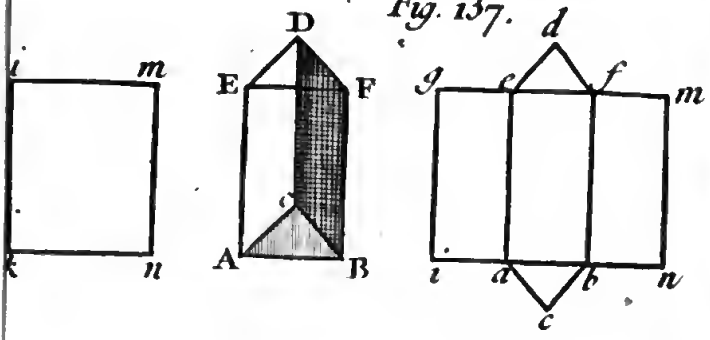
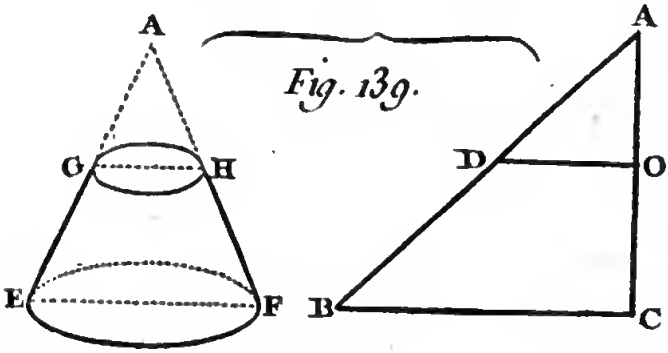



Fig. 139.



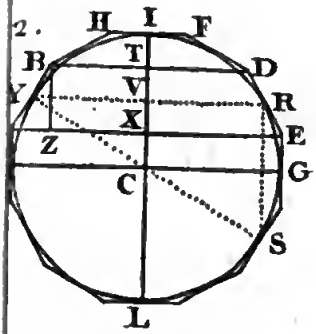




Fig. 143.

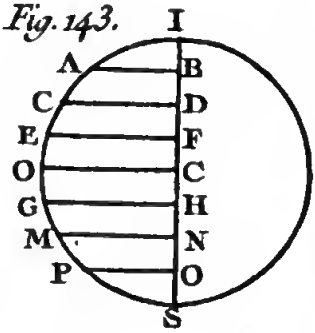



Fig. 146.

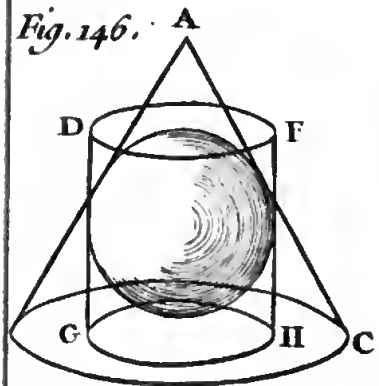
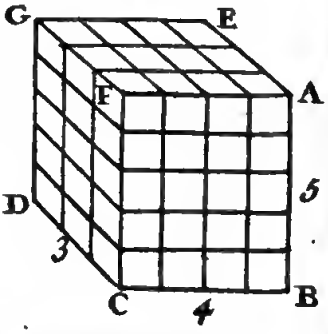



Fig. 147.




VITTORIO EMANUELE III
BIBLIOTECA NAZIONALE
NAPOLI

Fig 149

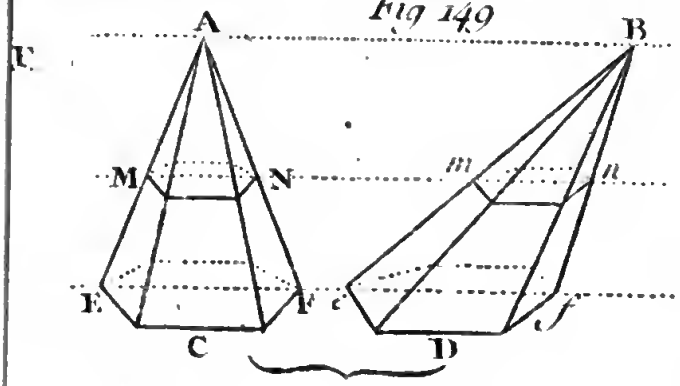



Fig. 152.

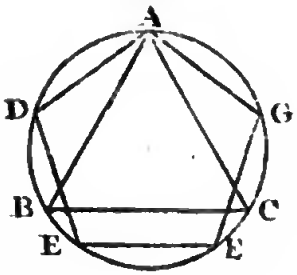
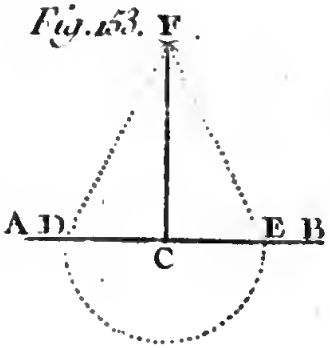



Fig. 153.



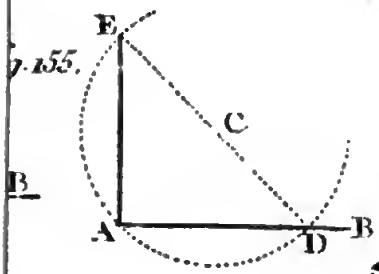
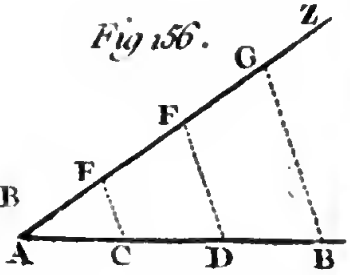




Fig 156.



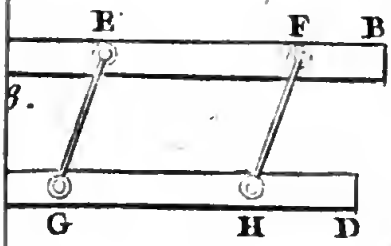
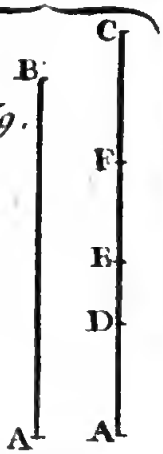
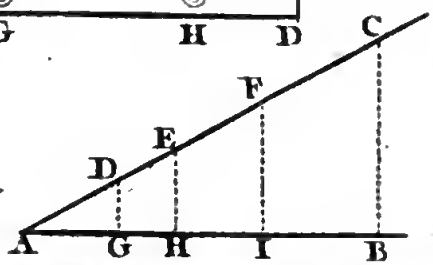
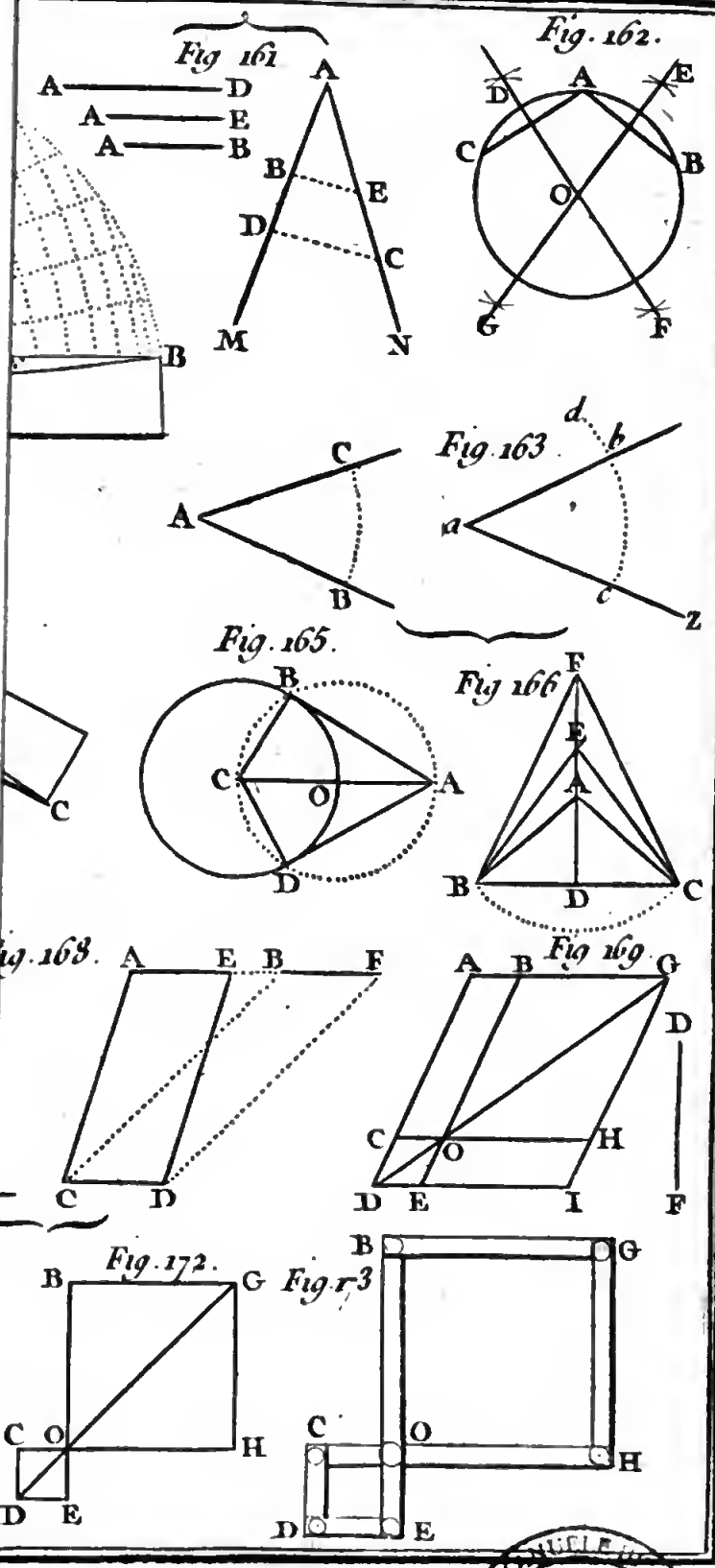




Fig. 159.




NAPOLI
VITTORIO EMANUELE III
BIBLIOTECA NAZIONALE




VITTORIO EMANUELE III BIBLIOTECA NAZIONALE NAPOLI

Fig. 176.

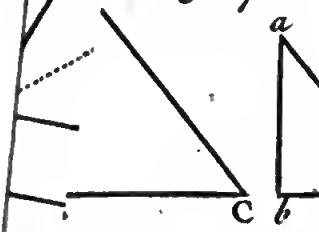



Fig 177

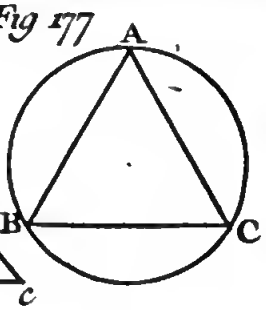



Fig 180

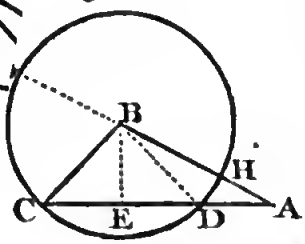
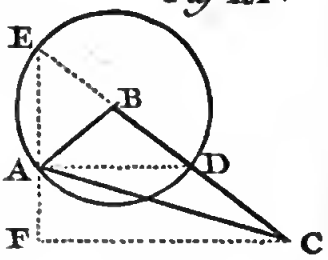



Fig 181.




83.

Fig. 184.

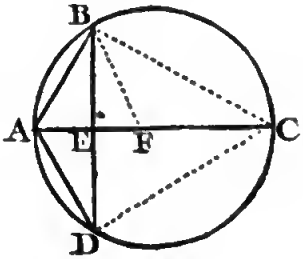
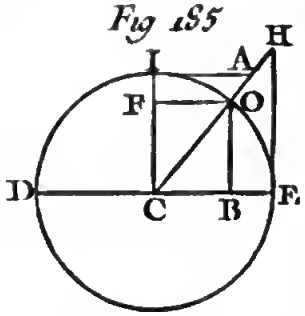



Fig 185



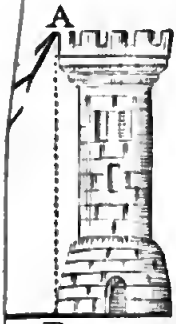
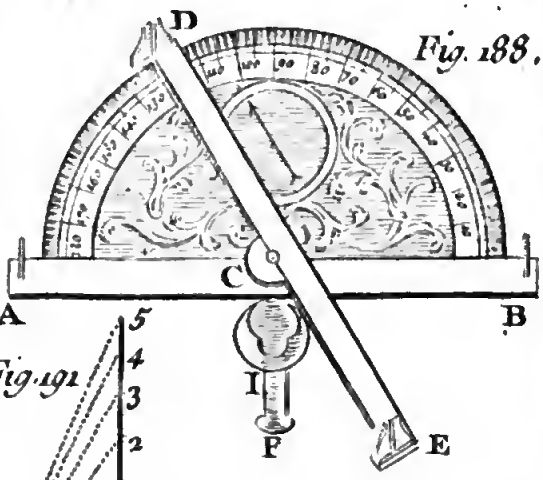
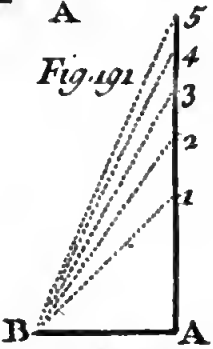




Fig. 188.



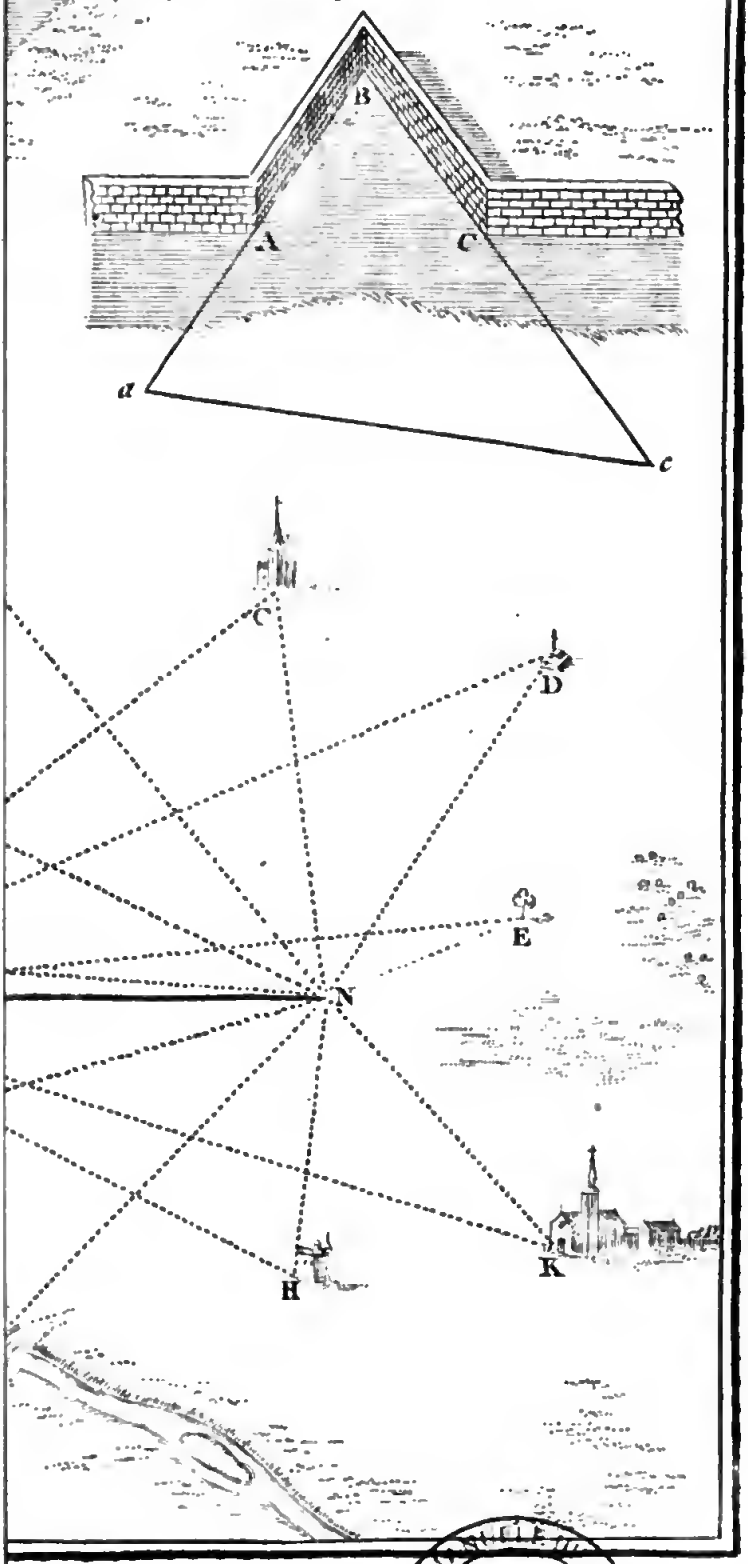

90.

Fig. 191




VITTORIO EMANUELE
BIBLIOTECA NAZIONALE
NAPOLI

Fig. 193.




BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE
NAPOLI

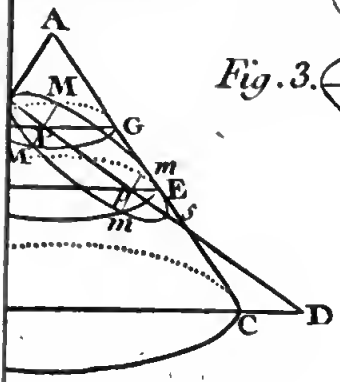



Fig. 3.

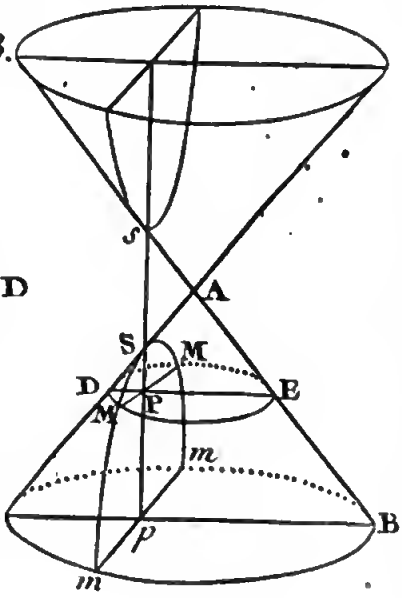
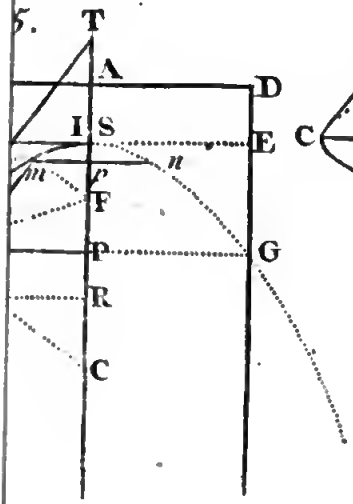
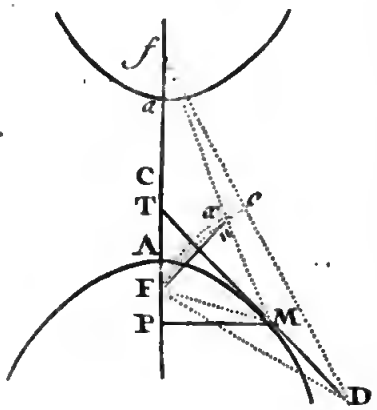
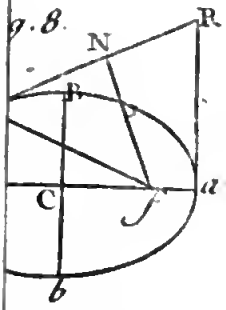



Fig. 6.



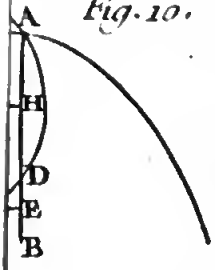
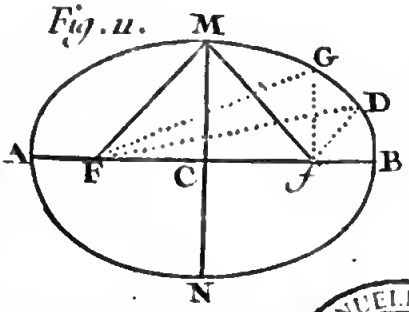



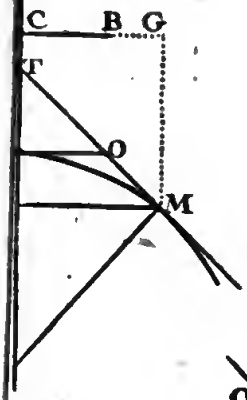

Fig. 10.

Fig. 11.




VITTORIO EMANUELE III - BIBLIOTECA NAZIONALE - NAPOLI

Fig. 13.



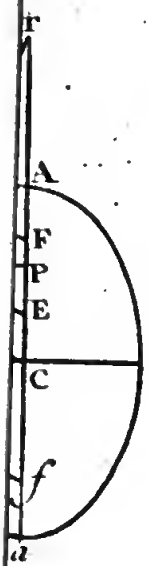
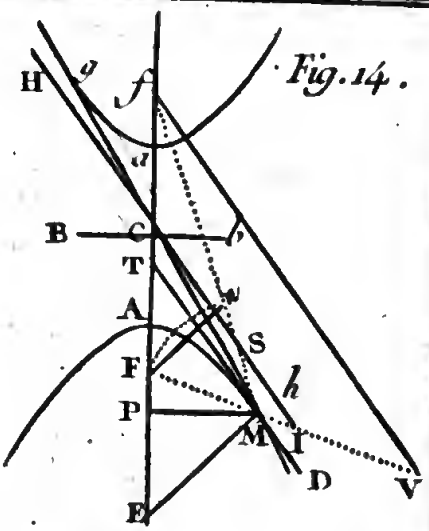




Fig. 14.



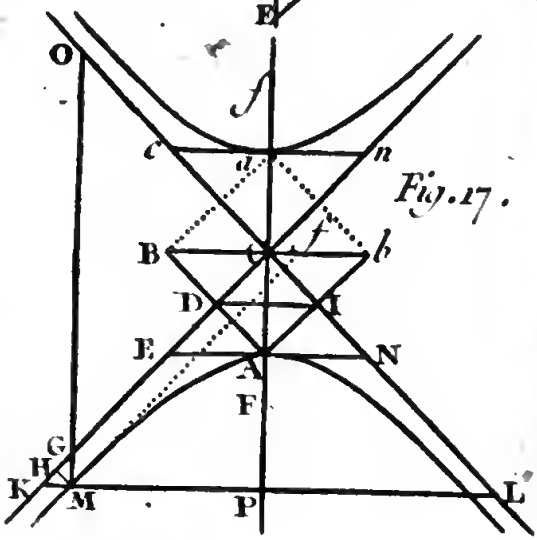




Fig. 17.

Fig. 19.

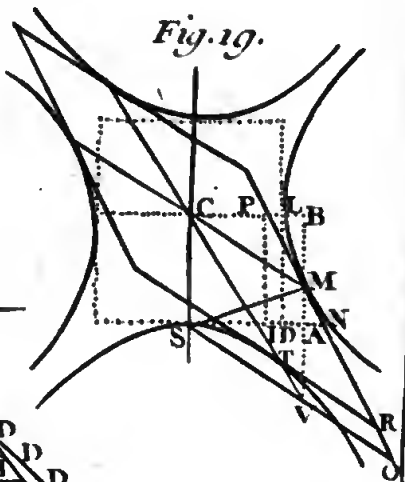
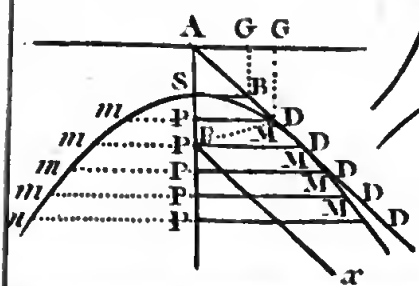



Fig. 20.




VITTORIO EMANUELE III - BIBLIOTECA NAZIONALE - NAPOLI

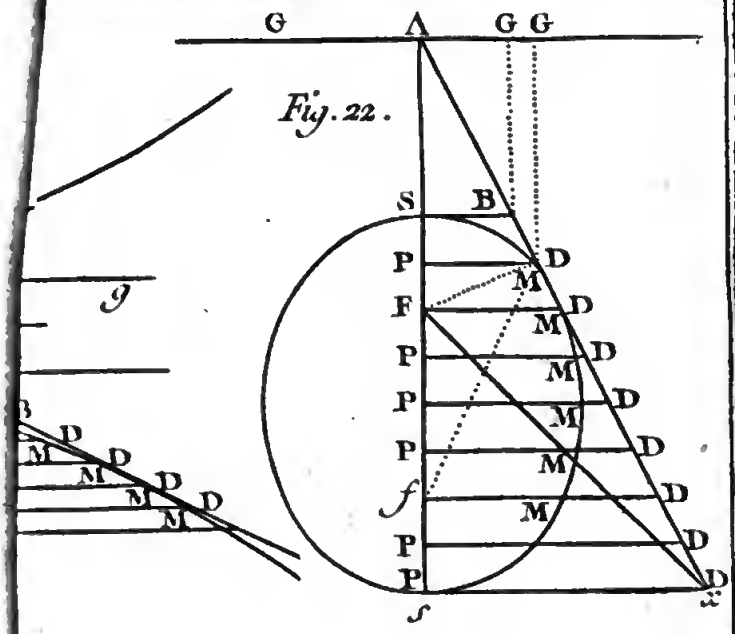



Fig. 22.

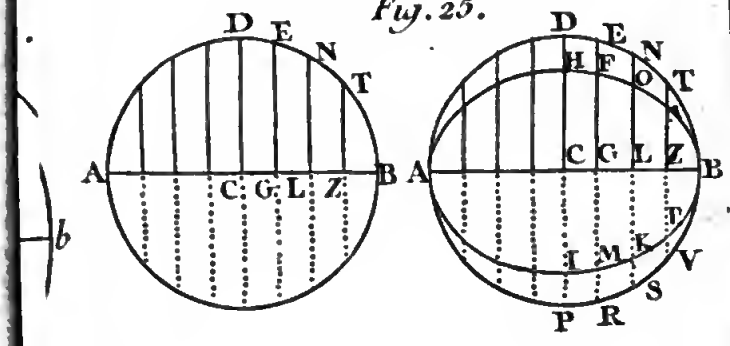



Fig. 25.

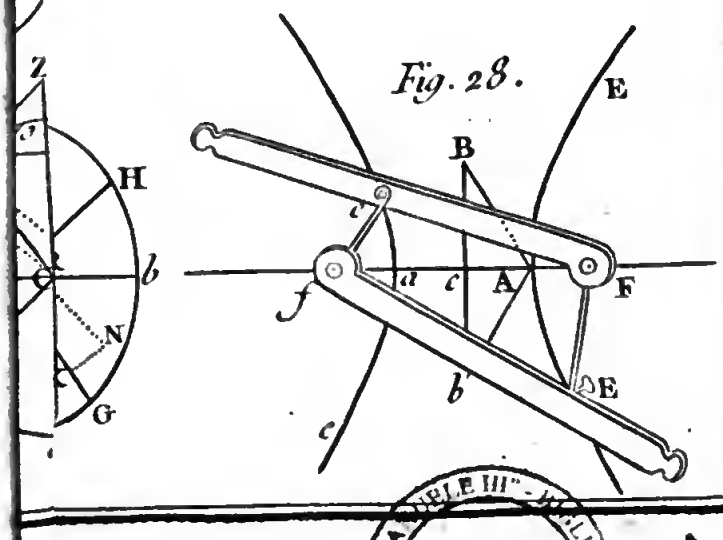



Fig. 28.

VITTORIO EMANUELE III - BIBLIOTECA NAZIONALE - NAPOLI

Digitized by Google